ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΡΩΓΜΗΣ ΕΝΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΜΕΣΟΥ ΕΙΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΕΝΤΑΤΙΚΗΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΙΝ

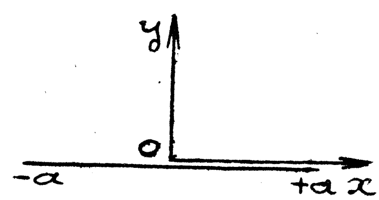
9. Ἡ Ρωγμή ἐντός Ἰσοτρόπου Μέσου.

9α. Γενικαί Παρατηρήσεις.

Τό πρόβλημα τῆς ἀπλῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου εἰς ἐπίπεδον ἐντατικήν κατάστασιν εἶναι τό ἁπλούστερον πρόβλημα διά ρωγμάς, ἡ δέ λύσις του ἐδόθη καί διά τά τρία θεμελιώδη προβλήματα ὑπό τοῦ MUSKHELISHVILI (30, § 120) καί τοῦ MILNE-THOMSON (29, § 4.12-4.16), εἰδικώτερα δέ προβλήματα ἐλύθησαν ὑπό τῶν GREEN καί ZERNA (23, § 8.15-8.17), τοῦ ENGLAND (15, § 3.10) καί ἄλλων. Ἐνταῦθα θά περιορισθῶμεν νά ἀναφέρωμεν τάς γενικάς λύσεις τῶν τριῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων ἄνευ ἀποδείξεων, αἵτινες δύνανται νά εὑρεθοῦν εἰς τάς προαναφερθείσας παραπομπάς.

9β. Τό Πρῶτον Θεμελιῶδες Πρόβλημα.

Θεωροῦμεν εἰς ὅλην τήν κατωτέρω ἀνάπτυξιν τήν ρωγμήν ἐκτεινομένην εἰς τό τμῆμα: $-\alpha < x < \alpha$ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος Ox ὡς εἰς τό Σχῆμα 7.



Σχῆμα 7

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος θά ἔχῃ πλήρως προσδιορισθῆ, ἐάν εὑρεθοῦν αἱ συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Omega(z)$ ἀναλυτικαί ἐφ' ὅλου τοῦ ἐπιπέδου πλήν τῶν σημείων t τῆς ρωγμῆς μέ $-\alpha < t < \alpha$, ὅτε αἱ τάσεις καί μετατοπίσεις εἰς ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἀπείρου δοκιμίου θά δίδωνται ὑπό τῶν ἑξῆς τύπων συναρτήσει τῶν προαναφερθεισῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ (30, §120):

$$\sigma_x+\sigma_y = 2[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}] \ , \qquad (1\alpha)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z)+\Omega(\bar{z})+(z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)} \ , \qquad (1\beta)$$

$$2\mu(u'+iv') = \kappa\Phi(z)-\Omega(\bar{z})-(z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)} \ , \qquad (1\gamma)$$

ἔνθα ἐτέθησαν:

$$u'=\frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad v'=\frac{\partial v}{\partial x} \ . \qquad (2)$$

Δι'$|z|\to\infty$ αἱ συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ ἔχουν τάς ἑξῆς ὁριακάς συμπεριφοράς:

$$\Phi(z)=\Gamma-\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)}\cdot\frac{1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right) , \qquad (3\alpha)$$

$$\Omega(z)=\bar{\Gamma}+\bar{\Gamma}'+\frac{\kappa(X+iY)}{2\pi(1+\kappa)}\cdot\frac{1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right) , \qquad (3\beta)$$

ἔνθα αἱ μιγαδικαί σταθεραί Γ καί Γ' ὁρίζονται ὡς:

$$\Gamma=\frac{1}{4}(N_1+N_2)+i\frac{2\mu\varepsilon_\infty}{1+\kappa} \ , \qquad (4\alpha)$$

$$\Gamma'=-\frac{1}{2}(N_1-N_2)e^{-2i\alpha} \ , \qquad (4\beta)$$

ὅπου N_1 καί N_2 εἶναι αἱ τιμαί τῶν κυρίων τάσεων εἰς τό ἄπειρον, α ἡ γωνία μεταξύ τῆς N_1 καί τοῦ ἄξονος Ox καί ε_∞ ἡ περιστροφή εἰς τό ἄπειρον.

Ἐπίσης X καί Y εἶναι αἱ συνιστῶσαι τοῦ διανύσματος τῆς συνισταμένης τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων τῶν ἐφηρμοσμένων ἐπ'ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς: $-\alpha < t < \alpha$.

Εἰς τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα, ἐκτός τῶν μεγεθῶν N_1, N_2, α καί ε_∞, θεωροῦνται ἐπίσης γνωσταί αἱ τιμαί τῶν τάσεων σ_y^+, σ_y^-, τ_{xy}^+ καί τ_{xy}^- ἐπί τῆς ρωγμῆς L, ἔνθα κατά τά γνωστά τά σύμβολα (+) καί (-) δηλοῦν ὁριακάς τιμάς ἐπί τῆς ἄνω καί τῆς κάτω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς ἀντιστοίχως.

Ἡ λύσις τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος εὑρισκομένη δι'ἐπιλύσεως δύο ὁριακῶν προβλημάτων τύπου RIEMANN εἶναι ἡ ἑξῆς (30, § 120,2°):

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(t)p(t)dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{q(t)dt}{t-z}-$$
$$-\frac{1}{2}\bar{\Gamma}'+\frac{C_0 z+C_1}{X(z)}, \qquad (5\alpha)$$
$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(t)p(t)dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{q(t)dt}{t-z}+$$
$$+\frac{1}{2}\bar{\Gamma}'+\frac{C_0 z+C_1}{X(z)}, \qquad (5\beta)$$

ἔνθα ἐτέθησαν:

$$p(t)=\frac{1}{2}\left[(\sigma_y^+ +\sigma_y^-)-i(\tau_{xy}^+ +\tau_{xy}^-)\right], \qquad (6\alpha)$$
$$q(t)=\frac{1}{2}\left[(\sigma_y^+ -\sigma_y^-)-i(\tau_{xy}^+ -\tau_{xy}^-)\right] \qquad (6\beta)$$

καί ἐπίσης:

$$X(z)=\sqrt{z^2-a^2}. \qquad (7)$$

Σημειοῦμεν ἐπίσης ὅτι ὁ δείκτης (L) εἰς τό σύμβολον τοῦ ὁλοκληρώματος δηλοῖ ὁλοκλήρωσιν κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς δηλαδή διά $-\alpha < t < \alpha$.

Ἡ τιμή τῆς σταθερᾶς C_0 προκύπτει:

$$C_0=\Gamma+\frac{1}{2}\bar{\Gamma}', \qquad (8)$$

ἡ δέ σταθερά C_1 προσδιορίζεται ἐκ τῆς συνθήκης τοῦ μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων, ἥτις ἀπαιτεῖ ὅπως εἶναι:

$$\int_L \left[(\kappa\Phi^+ -\Omega^-)-(\kappa\Phi^- -\Omega^+)\right]dt=0 \qquad (9\alpha)$$

λόγῳ τῆς σχέσεως (1γ) ἤ μᾶλλον:

$$\int_L \left[\kappa(\Phi^+ -\Phi^-)+(\Omega^+ -\Omega^-)\right]dt=0. \qquad (9\beta)$$

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τό θεώρημα τοῦ CAUCHY διά τάς ἀναλυτικάς ἐκτός τῆς ρωγμῆς συναρτήσεις Φ(Z) καί Ω(Z) παρεχομένας ἐκ τῶν σχέσεων (5) καί τήν ἐκ τῆς σχέσεως (6β) προκύπτουσαν σχέσιν:

$$X+iY=2i\int_L q(t)dt, \qquad (10)$$

ἔνθα (X,Y) ἡ συνισταμένη δύναμις ἐπί τῆς ρωγμῆς, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι λόγῳ τῆς συνθήκης (9β) πρέπει νά εἶναι:

$$\frac{(\kappa-1)(X+iY)}{4\pi}+(\kappa+1)C_1=0, \qquad (11)$$

ἤ, ὅπερ συμφωνεῖ καί πρός τάς σχέσεις (3α):

$$C_1 = \frac{(X+iY)(1-\kappa)}{4\pi(1+\kappa)}, \tag{12}$$

ἡ δέ σταθερά C_1 προσδιορίζεται οὕτως ἐκ τῆς σχέσεως (12).

Ἐξετάζομεν ἤδη τήν περίπτωσιν ἀφορτίστου ρωγμῆς μέ φόρτισιν μόνον εἰς τό ἄπειρον, ὅτε ἔχομεν:

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^- = \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = p(t) = q(t) = 0 \tag{13}$$

καί αἱ συναρτήσεις Φ(z) καί Ω(z) λαμβάνουν τάς ἑξῆς ἁπλᾶς μορφάς:

$$\Phi(z) = \frac{C_0 z + C_1}{X(z)} - \frac{1}{2}\bar{\Gamma}', \tag{14a}$$

$$\Omega(z) = \frac{C_0 z + C_1}{X(z)} + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}'. \tag{14b}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (12) προκύπτει εὐθύς ὅτι διά τήν παροῦσαν περίπτωσιν εἶναι: $C_1 = 0$, ὁπότε, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν καί τῶν σχέσεων (7) καί (8), ἔχομεν τελικῶς τήν ἑξῆς ἁπλῆν λύσιν τοῦ παρόντος προβλήματος:

$$\Phi(z) = \frac{(2\Gamma+\bar{\Gamma}')z}{2\sqrt{z^2-a^2}} - \frac{1}{2}\bar{\Gamma}', \tag{15a}$$

$$\Omega(z) = \frac{(2\Gamma+\bar{\Gamma}')z}{2\sqrt{z^2-a^2}} + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}', \tag{15b}$$

ἡ ὁποία λύσις ἔχει μέχρι σήμερον κατά κύριον λόγον χρησιμοποιηθῆ ὑπό πολλῶν ἐρευνητῶν διά διαφόρους μελέτας ἐπί τῶν ρωγμῶν.

Περαιτέρω ἐκ τῶν ἀκριβῶν σχέσεων (15) δυνάμεθα νά εὕρωμεν προσεγγιστικάς ἐκφράσεις διά τάς συναρτήσεις Φ(z) καί Ω(z) εἰς τήν περιοχήν τῆς συγκεντρώσεως τῶν τάσεων παρά τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς διά φόρτισιν μόνον εἰς τό ἄπειρον. Διά τό ἄκρον $t=a$ τῆς ρωγμῆς θέτοντες:

$$\zeta = z - a \tag{16}$$

καί διά $z \to a$, ὅτε $\zeta \to 0$ οἱ τύποι (15) λαμβάνουν τάς ἑξῆς

./.

ἀσυμπτωτικάς μορφάς, ἐάν ἀμελήσωμεν τούς ὅρους, οἵτινες δέν τείνουν εἰς τό ἄπειρον παρά τό ἄκρον τῆς ρωγμῆς:

$$\Phi(\zeta)=\Omega(\zeta)=\frac{K}{2\sqrt{2\pi\zeta}}\,, \tag{17}$$

ἔνθα Κεῖναι ὁ καλούμενος συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων παρά τό ἄκρον τῆς ρωγμῆς ὁριζόμενος γενικώτερον ἐκ τῆς σχέσεως (31, σ.35):

$$K=K_I-iK_{II}=\lim_{\zeta\to 0}\left[2(2\pi\zeta)^{1/2}\Phi(\zeta+a)\right]. \tag{18}$$

Διά τήν παροῦσαν περίπτωσιν εἶναι:

$$K=K_I-iK_{II}=(2\Gamma+\bar{\Gamma}')\sqrt{\pi a}\,. \tag{19}$$

Ἤδη αἱ σχέσεις (1) λόγῳ τῶν (17) καί (19) δίδουν:

$$\sigma_x+\sigma_y=\frac{2}{\sqrt{2\pi r}}\left[K_I\cos\frac{\theta}{2}-K_{II}\sin\frac{\theta}{2}\right], \tag{20α}$$

$$\sigma_y-i\tau_{xy}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2\pi r}}\left[(K_I-iK_{II})-i(K_I+iK_{II})\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{3\theta}{2}+i\sin\frac{3\theta}{2}\right)\right], \tag{20β}$$

ἔνθα ἐτέθη:

$$\zeta=re^{i\theta}, \tag{21}$$

τελικῶς δέ ἐκ τῶν σχέσεων (20) λαμβάνομεν:

$$\sigma_x=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left[K_I\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)-K_{II}\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)\right], \tag{22α}$$

$$\sigma_y=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left[K_I\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+K_{II}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right], \tag{22β}$$

$$\tau_{xy}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left[K_I\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+K_{II}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\right]. \tag{22γ}$$

Οἱ τύποι (22) καλοῦνται τύποι τοῦ SNEDDON, εὑρέθησαν δέ ὑπό διαφόρους μορφάς καί εἰς διαφόρους περιπτώσεις ὑπό τῶν SNEDDON (40, σ.234), IRWIN (25, σ.363) καί ἄλλων.

9β. Τό Δεύτερον Θεμελιῶδες Πρόβλημα.

Εἰς τό δεύτερον θεμελιῶδες πρόβλημα θεωροῦνται γνωσταί αἱ μετατοπίσεις u^+, u^-, v^+ καί v^- ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς $-a<t<a$ ὡς καί αἱ σταθεραί Γ καί Γ΄ὁρισθεῖσαι εἰς τάς σχέσεις (4) διά τήν φόρτισιν εἰς τό ἄπειρον καί

./.

ἡ συνισταμένη δύναμις (X, Y) ἐπί τῆς ρωγμῆς.

'Ισχύουν ἐπίσης ἐξ ὑποθέσεως αἱ ἑξῆς προφανεῖς σχέσεις:

$$u^+(a)=u^-(a) \quad , \quad u^+(-a)=u^-(-a) \quad , \tag{23a}$$

$$v^+(a)=v^-(a) \quad , \quad v^+(-a)=v^-(-a) \quad . \tag{23b}$$

'Η λύσις τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος εὑρισκομένη δι'ἐπιλύσεως δύο ὁριακῶν προβλημάτων τύπου RIEMANN εἶναι ἡ ἑξῆς (30, § 120, 2°):

$$\kappa\Phi(z)+\Omega(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{g(t)dt}{t-z}+\kappa\Gamma+\bar{\Gamma}+\bar{\Gamma}', \tag{24a}$$

$$\kappa\Phi(z)-\Omega(z)=\frac{1}{\pi i X(z)}\int_L\frac{X(t)f(t)dt}{t-z}+\frac{C_0 z+C_1}{X(z)}, \tag{24b}$$

ἔνθα ἐτέθησαν:

$$f(t)=\mu[(u^{+\prime}+u^{-\prime})+i(v^{+\prime}+v^{-\prime})], \tag{25a}$$

$$g(t)=\mu[(u^{+\prime}-u^{-\prime})+i(v^{+\prime}-v^{-\prime})], \tag{25b}$$

ἡ δέ συνάρτησις X(z) ὁρίζεται πάλιν ἐκ τῆς σχέσεως (7).

Αἱ σταθεραί C_0 καί C_1 δίδονται ἐκ τῶν ἑξῆς σχέσεων:

$$C_0=\kappa\Gamma-\bar{\Gamma}-\bar{\Gamma}' \quad , \quad C_1=-\frac{\kappa(X+iY)}{\pi(1+\kappa)} \quad . \tag{26}$$

9γ. Τό Τρίτον Θεμελιῶδες Πρόβλημα.

Εἰς τό τρίτον θεμελιῶδες πρόβλημα θεωροῦνται γνωσταί αἱ ἐφαρμοζόμεναι τάσεις ἐπί τῆς μιᾶς, ἔστω τῆς ἄνω, πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς καί αἱ μετατοπίσεις ἐπί τῆς ἑτέρας, τῆς κάτω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς, ὡς ἐπίσης καί τά μεγέθη Γ, Γ', X,Y ὁριζόμενα ὡς καί πρότερον.

'Η λύσις τοῦ τρίτου θεμελιώδους προβλήματος εὑρισκομένη δι'ἐπιλύσεως δύο ὁριακῶν προβλημάτων τύπου RIEMANN εἶναι ἡ ἑξῆς (30, § 120, 3°):

$$\Phi(z)+\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\Omega(z)=\frac{X_1(z)}{2\pi i}\int_L\frac{f_1(t)dt}{X_1^+(t)(t-z)}+X_1(z)(C_{01}z+C_{11}), \tag{27a}$$

$$\Phi(z)-\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\Omega(z)=\frac{X_2(z)}{2\pi i}\int_L\frac{f_2(t)dt}{X_2^+(t)(t-z)}+X_2(z)(C_{02}z+C_{12}), \tag{27b}$$

ἔνθα ἐτέθησαν:

$$f_1(t)=\sigma_y^+-i\tau_{xy}^+-\frac{2i\mu}{\sqrt{\kappa}}\left(u^{-\prime}+iv^{-\prime}\right), \tag{28α}$$

$$f_2(t)=\sigma_y^+-i\tau_{xy}^++\frac{2i\mu}{\sqrt{\kappa}}\left(u^{-\prime}+iv^{-\prime}\right), \tag{28β}$$

αἱ δέ συναρτήσεις $X_1(z)$ καί $X_2(z)$ δίδονται ἐκ τῶν σχέσεων:

$$X_1(z)=(z-a)^{-\gamma_1}\cdot(z+a)^{\gamma_1-1}, \tag{29α}$$

$$X_2(z)=(z-a)^{-\gamma_2}\cdot(z+a)^{\gamma_2-1}, \tag{29β}$$

ὅπου αἱ σταθεραί γ_1 καί γ_2 εἶναι:

$$\gamma_1=\frac{\ln(i\sqrt{\kappa})}{2\pi i}=\frac{1}{4}+\frac{\ln\kappa}{4\pi i}, \tag{30α}$$

$$\gamma_2=\frac{\ln(-i\sqrt{\kappa})}{2\pi i}=\frac{3}{4}+\frac{\ln\kappa}{4\pi i}. \tag{30β}$$

Αἱ σταθεραί C_{01}, C_{11}, C_{02} καί C_{12} εἰς τούς τύπους (27) ὑπολογίζονται εὐκόλως, ἐάν ληφθῇ ὑπ'ὄψιν ὅτι δι'$|z|\to\infty$ ἰσχύουν αἱ σχέσεις (3) καί ἐπίσης ὅτι διά τάς συναρτήσεις $X_1(z)$ καί $X_2(z)$ λαμβάνονται οἱ κλάδοι ἐκεῖνοι, διά τούς ὁποίους εἶναι:

$$\lim_{|z|\to\infty}[zX_1(z)]=\lim_{|z|\to\infty}[zX_2(z)]=1, \tag{31}$$

ὁπότε δι'$|z|\to\infty$ ἐκ τῶν σχέσεων (3) εὑρίσκομεν:

$$\Phi(z)+\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\Omega(z)=\Gamma+\frac{i}{\sqrt{\kappa}}(\bar{\Gamma}+\bar{\Gamma}')-\frac{(X+iY)(1-i\sqrt{\kappa})}{2\pi(1+\kappa)}\cdot\frac{1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{32α}$$

$$\Phi(z)-\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\Omega(z)=\Gamma-\frac{i}{\sqrt{\kappa}}(\bar{\Gamma}+\bar{\Gamma}')-\frac{(X+iY)(1+i\sqrt{\kappa})}{2\pi(1+\kappa)}\cdot\frac{1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{32β}$$

λαμβάνοντες δέ ὑπ'ὄψιν ὅτι δι'$|z|\to\infty$ εἶναι:

$$zX_j(z)=1+\frac{(2\gamma_j-1)a}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right),\ j=1,2, \tag{33}$$

εὑρίσκομεν δι'$|z|\to\infty$ ἐκ τῶν σχέσεων (27) ὅτι:

$$\Phi(z)+\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\Omega(z)=C_{01}+\frac{(2\gamma_1-1)aC_{01}+C_{11}}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{34α}$$

$$\Phi(z)-\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\Omega(z)=C_{02}+\frac{(2\gamma_2-1)aC_{02}+C_{12}}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{34β}$$

ὁπότε διά συγκρίσεως τῶν ἀσυμπτωτικῶν ἐκφράσεων (32) καί (34), δι'$|z|\to\infty$, προκύπτουν αἱ ἑξῆς τιμαί τῶν σταθερῶν C_{01}, C_{02}, C_{11} καί C_{12}:

$$C_{01}=\Gamma+\frac{i}{\sqrt{\kappa}}(\bar{\Gamma}+\bar{\Gamma}') \;,$$

$$C_{02}=\Gamma-\frac{i}{\sqrt{\kappa}}(\bar{\Gamma}+\bar{\Gamma}')$$

καί:

$$C_{11}=-\frac{(X+iY)(1-i\sqrt{\kappa})}{2\pi(1+\kappa)}-\frac{(2\gamma_1-1)a}{2}C_{01} \;, \qquad (36a)$$

$$C_{12}=-\frac{(X+iY)(1+i\sqrt{\kappa})}{2\pi(1+\kappa)}-\frac{(2\gamma_2-1)a}{2}C_{02} \;, \qquad (36b)$$

ἔνθα αἱ σταθεραί C_{01} καί C_{02} δίδονται ἐκ τῶν σχέσεων (35).

10. Τό Πρόβλημα RIEMANN διά Πολλάς Ἀγνώστους Συναρτήσεις μέ Σταθερούς Συντελεστάς ἐπί Ρωγμῆς.

Θεωροῦμεν κατ' ἀρχήν τό ἑξῆς ἁπλοῦν σύστημα ὁριακῶν συνθηκῶν τύπου RIEMANN ἐπί τῆς ρωγμῆς L:

$$a_{11}\Phi_1^+ + a_{12}\Phi_2^+ + b_{11}\Phi_1^- + b_{12}\Phi_2^- = g_1(t), \qquad (1\alpha)$$

$$a_{21}\Phi_1^+ + a_{22}\Phi_2^+ + b_{21}\Phi_1^- + b_{22}\Phi_2^- = g_2(t), \qquad (1\beta)$$

ἔνθα αἱ συναρτήσεις $\Phi_1(z)$ καί $\Phi_2(z)$ εἶναι ἀναλυτικαί ἐφ' ὅλου τοῦ ἐπιπέδου πλήν τῆς ρωγμῆς L, αἱ συναρτήσεις $g_1(t)$ καί $g_2(t)$ εἶναι δεδομέναι ἐπί τῆς ρωγμῆς L, αἱ δέ σταθεραι a_{ij}, b_{ij} $(i,j=1,2)$ ἐπαληθεύουν ἐξ ὑποθέσεως τάς ἑξῆς συνθήκας:

$$a_{i1}a_{i2} \neq 0, \quad b_{i1}b_{i2} \neq 0, \quad i=1,2. \qquad (2)$$

Ἄλλως δέν εἶναι δυνατή ἐν γένει ἡ ἱκανοποίησις τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (1), καθ' ὅσον δέν δύναται ἐν γένει νά ὑπάρχῃ συνάρτησις $\Phi(z)$ ἱκανοποιοῦσα ἐπί τῆς ρωγμῆς L ὁριακήν συνθήκην τῆς μορφῆς:

$$\Phi^+ = g(t) \quad \text{ἤ:} \quad \Phi^- = g(t). \qquad (3)$$

Πρός ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος ὁριακῶν συνθηκῶν (1) πολλαπλασιάζομεν τήν (1α) ἐπί μίαν σταθεράν γ_1, τήν δέ (1β) ἐπί ἑτέραν σταθεράν γ_2 καί προσθέτομεν τάς (1α) καί (1β) κατά μέλη, ὅτε ὁδηγούμεθα εἰς τό ἑξῆς πρόβλημα ὁριακῶν συνθηκῶν:

$$(a_{11}\gamma_1 + a_{21}\gamma_2)\Phi_1^+ + (a_{12}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2)\Phi_2^+ + (b_{11}\gamma_1 + b_{12}\gamma_2)\Phi_1^- +$$
$$+ (b_{12}\gamma_1 + b_{22}\gamma_2)\Phi_2^- = \gamma_1 g_1(t) + \gamma_2 g_2(t). \qquad (4)$$

Τό πρόβλημα (4) καθίσταται ἁπλοῦν πρόβλημα RIEMANN ὡς πρός μίαν ἄγνωστον συνάρτησιν τήν:

$$F(z) = (a_{11}\gamma_1 + a_{21}\gamma_2)\Phi_1(z) + (a_{12}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2)\Phi_2(z), \qquad (5)$$

ἐάν αἱ σταθεραί γ_1 καί γ_2 ἐκλεγοῦν οὕτως, ὥστε νά ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\delta(a_{11}\gamma_1+a_{21}\gamma_2)=b_{11}\gamma_1+b_{21}\gamma_2 , \qquad (6a)$$

$$\delta(a_{12}\gamma_1+a_{22}\gamma_2)=b_{12}\gamma_1+b_{22}\gamma_2 , \qquad (6b)$$

ἔνθα δ σταθερά, διάφορος τοῦ μηδενός καί πεπερασμένη, ἵνα μή τό πρόβλημα (4) καταστῇ μιᾶς τῶν μορφῶν (3).

Αἱ σχέσεις (6) γράφονται καί ὑπό τήν μορφήν:

$$(\delta a_{11}-b_{11})\gamma_1+(\delta a_{21}-b_{21})\gamma_2=0 , \qquad (7a)$$

$$(\delta a_{12}-b_{12})\gamma_1+(\delta a_{22}-b_{22})\gamma_2=0 . \qquad (7b)$$

Ἐπειδή θέλομεν ὅπως μή ἀμφότεραι αἱ σταθεραί γ_1 καί γ_2 εἶναι μηδενικαί, ὅτε τό πρόβλημα (4) οὐδεμίαν ἔννοιαν θά εἶχε, πρέπει ἡ σταθερά ἀναλογίας δ νά ἐπαληθεύῃ τήν ἑξῆς ἐξίσωσιν:

$$\begin{vmatrix} \delta a_{11}-b_{11} & \delta a_{21}-b_{21} \\ \delta a_{12}-b_{12} & \delta a_{22}-b_{22} \end{vmatrix} = 0 , \qquad (8)$$

ἥτις περαιτέρω γράφεται ὑπό τήν μορφήν τῆς κάτωθι δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως:

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\delta^2-(a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11}-a_{12}b_{21}-a_{21}b_{12})\delta+(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})=0, \quad (9)$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν:

$$\delta=\varepsilon_1\pm\sqrt{\varepsilon_1^2-\varepsilon_2} , \qquad (10)$$

ἔνθα ἐτέθησαν:

$$\varepsilon_1=\frac{a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11}-a_{12}b_{21}-a_{21}b_{12}}{2(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})} , \qquad (11a)$$

$$\varepsilon_2=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} . \qquad (11b)$$

Ὑποθέτομεν ὅτι ἰσχύουν αἱ συνθῆκαι:

/.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \;, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \;, \tag{12α}$$

$$\varepsilon_1^2 \neq \varepsilon_2 \,, \tag{12β}$$

ὁπότε ἐκ τῆς σχέσεως(10) λαμβάνομεν δύο μή μηδενικάς καί διαφόρους ἀλλήλων τιμάς τῆς σταθερᾶς ἀναλογίας δ, ἔστω τάς δ_1 καί δ_2.

Ἀκολούθως ἐκ τῆς (7α) παρατηροῦμεν ὅτι, ἐάν εἶναι διά μίαν τῶν δ_1, δ_2:

$$\delta a_{11} - b_{11} = 0 \,, \tag{13α}$$

τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ σταθερά γ_2 εἶναι μηδέν, πρᾶγμα τό ὁποῖον περαιτέρω δηλοῖ ὅτι τό πρόβλημα (1α) εἶναι ἁπλοῦν πρόβλημα RIEMANN, δηλαδή ὅτι ἰσχύει ἡ ἀναλογία:

$$\frac{a_{11}}{b_{11}} = \frac{a_{12}}{b_{12}} \,. \tag{13β}$$

Ἀναλόγως ἐκ τῆς (7β) παρατηροῦμεν ὅτι, ἐάν εἶναι διά μίαν τῶν δ_1, δ_2:

$$\delta a_{22} - b_{22} = 0 \,, \tag{14α}$$

τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ σταθερά γ_1 εἶναι μηδέν, πρᾶγμα τό ὁποῖον περαιτέρω δηλοῖ ὅτι τό πρόβλημα (1β) εἶναι ἁπλοῦν πρόβλημα RIEMANN, δηλαδή ὅτι ἰσχύει ἡ ἀναλογία:

$$\frac{a_{22}}{b_{22}} = \frac{a_{21}}{b_{21}} \,. \tag{14β}$$

Προφανῶς, ἐάν ἰσχύῃ μία τῶν σχέσεων (13β) ἤ (14β), ἤ καί ἀμφότεραι αἱ σχέσεις αὗται, τοῦτο δυνάμεθα νά διαπιστώσωμεν εὐθύς ἐκ τῶν ὁριακῶν προβλημάτων (1), ὅτε θά πρέπῃ νά ἀναμένωμεν κατά τήν περαιτέρω ἀνάλυσιν, ὡς ἀνωτέρω, νά εὕρωμεν: $\gamma_1=0$ ἤ $\gamma_2=0$, ὁπότε ἐνδιαφερόμεθα κυρίως δι'ἐκείνην ἐκ τῶν δ_1, δ_2, ἐκ τῆς ὁποίας θά λάβωμεν τιμάς τῶν σταθερῶν γ_1 καί γ_2 διαφόρους τοῦ μηδενός.

Ἐάν ἔχωμεν ὑπ'ὄψιν ταῦτα, δυνάμεθα ἐν γένει νά θέτωμεν: $\gamma_1=1$, ἤ καί $\gamma_2=1$, καθ'ὅσον ἐνδιαφερόμεθα μόνον διά τήν σχέ-

./.

σιν μεταξύ αὐτῶν. Ὡς ἄλλωστε φαίνεται ἐκ τῶν σχέσεων (7α) καί (7β) δι'ἑκάστην τῶν τιμῶν δ_1 καί δ_2 ἔχομεν ἀπειρίαν ζευγῶν τιμῶν γ_1 καί γ_2 εἰς σταθεράν ἀναλογίαν μεταξύ των. Ἡ χρησιμοποίησις δύο σταθερῶν, τῶν γ_1 καί γ_2, εἰς τήν ὅλην ἀνάπτυξιν ἀντί μόνον μιᾶς, ἔστω τῆς γ_2, ἐγένετο ἐπί τῷ σκοπῷ ὅπως μή ἐπέλθῃ σύγχυσις εἴς τινα περίπτωσιν, ὅπου θά ἴσχυε μία τῶν σχέσεων (13α) ἤ (14α), χωρίς νά ἔχῃ γίνῃ πρότερον ἀντιληπτή ἡ ἰσχύς τῆς (13β) ἤ τῆς (14β) ἀντιστοίχως.

Ἤδη κατά ταῦτα καί ὑπό τάς ἀναφερθείσας προϋποθέσεις ἔχομεν πρός ἐπίλυσιν δύο ὁριακά προβλήματα τῆς μορφῆς:

$$F^+ + \delta F^- = f(t) \,, \tag{15}$$

μέ τάς συναρτήσεις F(z) διδομένας ἐκ τῆς σχέσεως (5) δι'ἑκάστην τῶν τιμῶν δ_1 καί δ_2, αἱ δέ συναρτήσεις $f(t)$ δίδονται ἐκ τῆς σχέσεως:

$$f(t) = \gamma_1 g_1(t) + \gamma_2 g_2(t) \,. \tag{16}$$

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος ὁριακῶν συνθηκῶν (I5) εἶναι:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X(t) f(t)}{t-z} dt + \frac{C_0 z + C_1}{X(z)} \,, \tag{17}$$

ἔνθα C_0 καί C_1 σταθεραί, κατ'ἀρχήν αὐθαίρετοι, προσδιοριζόμεναι δέ ἐκ τῶν συνθηκῶν εἰς τό ἄπειρον.

Διά ρωγμήν L μέ $-\alpha < x < \alpha$ ἡ συνάρτησις X(z) εἰς τόν τύπον (17) ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$X(z) = (z-\alpha)^{1-\gamma} \cdot (z+\alpha)^{\gamma} \,, \tag{18α}$$

ἔνθα εἶναι:

$$\gamma = \frac{\ln(-\delta)}{2\pi i} \,. \tag{18β}$$

Εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν, ἔνθα δ=1, προκύπτει ὅτι:

$$\gamma = \frac{1}{2} \tag{19α}$$

καί συνεπῶς:

$$X(z) = \sqrt{z^2 - \alpha^2} \,. \tag{19β}$$

'Εάν τέλος εἶναι: $\delta=-1$, ἡ λύσις τοῦ προβλήματος (15) εἶναι:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}\,dt+C, \tag{20}$$

ἔνθα C αὐθαίρετος σταθερά.

Διά τάς δύο τιμάς τῆς σταθερᾶς δ, τάς δ_1 καί δ_2, εὑρίσκομεν οὕτω τάς ἀντιστοίχους τιμάς τῶν γ_1 καί γ_2, τάς γ_{11} καί γ_{21} διά τήν δ_1 καί τάς γ_{12} καί γ_{22} διά τήν δ_2, ὁπότε ἐκ τῆς σχέσεως (5) ἔχομεν διά τάς ἀντιστοίχους συναρτήσεις $F_1(z)$, $F_2(z)$ προσδιοριζομένας βάσει τοῦ τύπου (17):

$$(a_{11}\gamma_{11}+a_{21}\gamma_{21})\Phi_1(z)+(a_{12}\gamma_{11}+a_{22}\gamma_{21})\Phi_2(z)=F_1(z), \tag{21a}$$

$$(a_{11}\gamma_{12}+a_{21}\gamma_{22})\Phi_1(z)+(a_{12}\gamma_{12}+a_{22}\gamma_{22})\Phi_2(z)=F_2(z). \tag{21b}$$

'Εκ τῶν σχέσεων (21) δυνάμεθα ἐπιλύοντες ὡς πρός τάς συναρτήσεις $\Phi_1(z)$ καί $\Phi_2(z)$ νά προσδιορίσωμεν ταύτας ὡς κάτωθι ἐκ τῶν ἤδη εὑρεθεισῶν συναρτήσεων $F_1(z)$ καί $F_2(z)$:

$$\Phi_1(z)=\frac{(a_{12}\gamma_{12}+a_{22}\gamma_{22})F_1(z)-(a_{12}\gamma_{11}+a_{22}\gamma_{21})F_2(z)}{(a_{11}\gamma_{11}+a_{21}\gamma_{21})(a_{12}\gamma_{12}+a_{22}\gamma_{22})-(a_{11}\gamma_{12}+a_{21}\gamma_{22})(a_{12}\gamma_{11}+a_{22}\gamma_{21})}, \tag{22a}$$

$$\Phi_2(z)=\frac{-(a_{11}\gamma_{12}+a_{21}\gamma_{22})F_1(z)+(a_{11}\gamma_{11}+a_{21}\gamma_{21})F_2(z)}{(a_{11}\gamma_{11}+a_{21}\gamma_{21})(a_{12}\gamma_{12}+a_{22}\gamma_{22})-(a_{11}\gamma_{12}+a_{21}\gamma_{22})(a_{12}\gamma_{11}+a_{22}\gamma_{21})}. \tag{22b}$$

"Ετερον σύστημα ὁριακῶν συνθηκῶν, τοῦ ὁποίου ἡ λύσις θά μᾶς χρειασθῇ κατωτέρω, εἶναι τό ἑξῆς σύστημα ὁριακῶν συνθηκῶν τύπου RIEMANN:

$$\sum_{j=1}^{4}(a_{ij}\Phi_j^{+}+b_{ij}\Phi_j^{-})=g_i(t), \quad i=1,2,3,4, \tag{23}$$

τοῦ ὁποίου ἡ μέθοδος ἐπιλύσεως εἶναι ἁπλῶς γενίκευσις τῆς ἀκολουθηθείσης διά τό σύστημα τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (1), ἐάν δέ θεωρήσωμεν ὅτι δέν ἔχομεν ἐξεζητημένας περιπτώσεις ἀνα-

./.

λόγους πρός ἐκείνας, τάς ὁποίας διηρευνήσαμεν κατά τήν λύσιν τοῦ συστήματος ὁριακῶν συνθηκῶν (1), προχωροῦμεν εἰς τήν λύσιν τοῦ συστήματος (23) ὡς κάτωθι:

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τά μέλη ἑκάστης τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (23) ἐπί τάς σταθεράς γ_i $(i=1,2,3,4)$, μή προσδιορισθείσας εἰσέτι καί ἀθροίζομεν κατά μέλη λαμβάνοντες:

$$\sum_{j=1}^{4}\Big[\sum_{i=1}^{4} a_{ij}\gamma_i\Big]\Phi_j^{+}+\sum_{j=1}^{4}\Big[\sum_{i=1}^{4} b_{ij}\gamma_i\Big]\Phi_j^{-}=\sum_{i=1}^{4}\gamma_i g_i(t)\,. \tag{24}$$

Ἡ ὁριακή συνθήκη (24) ἀποτελεῖ ἁπλοῦν πρόβλημα RIEMANN ὡς πρός μίαν ἄγνωστον συνάρτησιν τήν:

$$F(z)=\sum_{j=1}^{4}\Big[\sum_{i=1}^{4} a_{ij}\gamma_i\Big]\Phi_j(z)\,, \tag{25}$$

ἐάν αἱ σταθεραί γ_i ἐκλεγοῦν οὕτως, ὥστε νά ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\delta\sum_{i=1}^{4} a_{ij}\gamma_i=\sum_{i=1}^{4} b_{ij}\gamma_i\ ,\quad j=1,2,3,4\,, \tag{26}$$

ἔνθα δ σταθερά θεωρουμένη μή μηδενική καί πεπερασμένη.

Αἱ σχέσεις (26) γράφονται καί ὑπό τήν μορφήν:

$$\sum_{i=1}^{4}(\delta a_{ij}-b_{ij})\gamma_i=0\,,\quad j=1,2,3,4\,, \tag{27}$$

καί, ἐπειδή θέλομεν ὅπως τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (27) ἔχῃ μή μηδενικήν λύσιν ὡς πρός τάς προσδιοριστέας σταθεράς γ_i, πρέπει ἡ σταθερά ἀναλογίας δ νά ἐπαληθεύῃ τήν ἑξῆς ἐξίσωσιν:

$$|\delta a_{ij}-b_{ij}|=0\,, \tag{28}$$

ἐννοοῦντες ὅτι ἡ ὁρίζουσα τετάρτης τάξεως μέ στοιχεῖα $(\delta a_{ij}-b_{ij})$, $(i,j=1,2,3,4)$, πρέπει νά ἰσοῦται μέ μηδέν.

Ἡ ἐξίσωσις (28) εἶναι ἐξίσωσις τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρός τήν σταθεράν δ καί ἔχει ἐν γένει τέσσαρας ρίζας τάς δ_i $(i=1,2,3,4)$.

Ἀναπτύσσοντες τήν ὁρίζουσαν εἰς τήν ἐξίσωσιν (28) θά λάβωμεν μίαν τεταρτοβάθμιον ἐξίσωσιν, ἔστω τήν:

$$\delta^4+\varepsilon_1\delta^3+\varepsilon_2\delta^2+\varepsilon_3\delta+\varepsilon_4=0\,. \tag{29}$$

Αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως (29) παρέχονται ὑπό τῶν τύπων:

$$\delta_1 = \frac{1}{2}\left[+\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}+\sqrt{\sigma_3}\right], \tag{30α}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2}\left[+\sqrt{\sigma_1}-\sqrt{\sigma_2}-\sqrt{\sigma_3}\right], \tag{30β}$$

$$\delta_3 = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}-\sqrt{\sigma_3}\right], \tag{30γ}$$

$$\delta_4 = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{\sigma_1}-\sqrt{\sigma_2}+\sqrt{\sigma_3}\right], \tag{30δ}$$

ἤ τῶν τύπων:

$$\delta_1 = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{\sigma_1}-\sqrt{\sigma_2}-\sqrt{\sigma_3}\right], \tag{31α}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}+\sqrt{\sigma_3}\right], \tag{31β}$$

$$\delta_3 = \frac{1}{2}\left[+\sqrt{\sigma_1}-\sqrt{\sigma_2}+\sqrt{\sigma_3}\right], \tag{31γ}$$

$$\delta_4 = \frac{1}{2}\left[+\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}-\sqrt{\sigma_3}\right], \tag{31δ}$$

ἀναλόγως τοῦ ἐάν ἡ παράστασις:

$$\rho = \frac{16\varepsilon_1^2\varepsilon_2+256\varepsilon_4-64\varepsilon_1\varepsilon_3-3\varepsilon_1^4}{256} \tag{32}$$

εἶναι ἀρνητική ἤ θετική ἀντιστοίχως, ἔνθα τά $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ δίδονται ὑπό τῶν ἑξῆς τύπων:

$$\sigma_1 = A+B-\frac{\varepsilon}{3}, \tag{33α}$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{2}\left[A+B+i\,(A-B)\sqrt{3}\right]-\frac{\varepsilon}{3}, \tag{33β}$$

$$\sigma_3 = -\frac{1}{2}\left[A+B-i\,(A-B)\sqrt{3}\right]-\frac{\varepsilon}{3}, \tag{33γ}$$

ὅπου ἐτέθησαν:

$$A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,,\quad B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,, \tag{34}$$

ἔνθα εἶναι:

$$p=\frac{8\varepsilon_2-3\varepsilon_1}{4}, \tag{35α}$$

$$q=\frac{(8\varepsilon_2-3\varepsilon_1)^2}{64}-4\rho \tag{35β}$$

καί ἐπίσης:

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_1^3-4\varepsilon_1\varepsilon_2+8\varepsilon_3}{8}. \tag{36}$$

Ὑποθέτοντες ὅτι αἱ οὕτως εὑρισκόμεναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (29) εἶναι διάφοροι ἀλλήλων καί μή μηδενικαί, εὑρίσκομεν περαιτέρω ἐκ τῶν σχέσεων (27) τάς σταθεράς γ_i δι'ἑκάστην ρίζαν δ_i, θεωροῦντες αὐθαιρέτους τάς σταθεράς ἀναλογίας κατά τάς λύσεις τῶν συστημάτων τῶν ἐξισώσεως (27), καί περαιτέρω λαμβάνομεν ἐκ τῆς ὁριακῆς συνθήκης (24) λόγῳ καί τῆς σχέσεως (25) ἐκ τῶν τεσσάρων ριζῶν δ_i τῆς ἐξισώσεως (29) τέσσαρα ἁπλᾶ προβλήματα RIEMANN μέ ἀγνώστους συναρτήσεις τάς $F_i(z)$, τά ἑξῆς:

$$F_i^+ + \delta_i F_i^- = f_i(t)\ , \ i=1,2,3,4, \tag{37}$$

ἔνθα ἐτέθησαν:

$$f_i(t) = \sum_{i=1}^{4} \gamma_i g_i(t). \tag{38}$$

Αἱ λύσεις τῶν προβλημάτων (37) εὑρίσκονται πάλιν βάσει τοῦ τύπου (17), ἔχοντες δέ οὕτω προσδιορίσει τάς συναρτήσεις $F_i(z)$ δυνάμεθα πλέον ἐκ τῶν σχέσεων (25) νά εὕρωμεν τάς ζητουμένας συναρτήσεις $\Phi_j(z)$ λύοντες τό σύστημα τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων (25) ὡς πρός αὐτάς.

Σημειοῦμεν τέλος διά τόν ὑπολογισμόν τῶν σταθερῶν C_0 καί C_1 τοῦ τύπου (17) ὅτι ἀπαιτεῖται ὅπως γνωρίζωμεν τήν συμπεριφοράν εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου τῶν συναρτήσεων $F_i(Z)$. Πρός τοῦτο, ἐάν ἔχωμεν δι'$/Z/\to\infty$ διά τάς συναρτήσεις $\Phi_j(Z)$ καί $F_j(Z)$:

$$\Phi_j(z) = \varphi_{j\infty} + \frac{\varphi_j}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\ , \ F_j(z) = F_{j\infty} + \frac{f_j}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{39}$$

ἐκ τῶν σχέσεων (5) ἤ (25) προκύπτουν εὐθύς αἱ ἀντίστοιχοι ἐκφράσεις τῶν συναρτήσεων $F_j(Z)$ δι'$/Z/\to\infty$ εἶναι δέ προφανῶς:

$$C_{0j} = F_{j\infty}, \tag{40}$$

λόγῳ δέ τῆς ὁριακῆς συμπεριφορᾶς τῆς συναρτήσεως $2X^{-1}(z)$ δι'$/Z/\to\infty$:

$$\frac{2}{X(z)} = 1 + \frac{\alpha(1-2\gamma)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \tag{41}$$

εὑρίσκομεν διά τάς σταθεράς C_{1j}:

$$C_{1j} = f_j - \alpha(1-2\gamma_j)F_{j\infty}. \tag{42}$$

11. Ἡ Ρωγμή ἐντός Ἀνισοτρόπου Μέσου.

11α. Γενικαί Παρατηρήσεις.

Μετά τήν ἀνάπτυξιν τῆς Μαθηματικῆς Θεωρίας τῆς Ἐλαστικότητος διά τά ἰσότροπα μέσα ἠκολούθησεν, ὡς ἦτο φυσικόν, ἡ ἐπέκτασις αὐτῆς, ὥστε νά καλύψῃ καί τήν γενικωτέραν κατηγορίαν τῶν ἀνισοτρόπων μέσων. Ἡ Μαθηματική Θεωρία τῆς Ἐλαστικότητος διά τά ἀνισότροπα μέσα ἀναπτύσσεται εἰς τά συγγράμματα τοῦ Καθηγητοῦ τοῦ Ε.Μ.Π. κ.Ν.ΓΑΛΙΔΑΚΗ (21), τῶν GREEN καί ZERNA (23), τοῦ LEKHNITSKII, τοῦ SAVIN (34), τοῦ MILNE-THOMSON (29) καί ἄλλων.

Ἐκ τῆς βιβλιογραφίας, τήν ὁποίαν ἔχομεν ὑπ'ὄψιν, ἀναφέρομεν κατωτέρω τά προβλήματα ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου εἰς ἐπίπεδον ἐντατικήν κατάστασιν, τά ὁποῖα ἔχουν λυθῆ.

Οἱ GREEN καί ZERNA (23) ἔλυσαν τά προβλήματα σειρᾶς συγγραμμικῶν ρωγμῶν ἐντός ἀνισοτρόπου ἐπιπέδου εἰς τάς εἰδικάς περιπτώσεις τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος μέ κάθετον συμμετρικήν φόρτισιν τῆς ρωγμῆς, δηλαδή μέ δεδομένα τά: $\tau_{xy}^{+}=\tau_{xy}^{-}=0$, $\sigma_{y}^{+}=\sigma_{y}^{-}=-p(t)$ ἐπί τῆς ρωγμῆς καί τοῦ ἑξῆς ἐπίσης εἰδικοῦ προβλήματος μέ δεδομένα τά: $v^{+}=v^{-}=s(t)$ ἐπί τῆς ρωγμῆς, $v=0$ καί $\tau_{xy}=0$ ἐπί τῆς εὐθείας τῆς ὁριζομένης ὑπό τῆς ρωγμῆς καί ἐκτός ταύτης, δι'ἀναγωγῆς τῶν προβλημάτων τούτων εἰς τά ἀντίστοιχα προβλήματα διά τό ἡμιεπίπεδον λόγῳ τῆς προφανοῦς συμμετρίας κατά τήν διατύπωσίν των ὡς πρός τήν εὐθεῖαν, ἐφ'ἧς κεῖται ἡ ρωγμή.

Ὁ SAVIN (34) ἔλυσε τά προβλήματα ἁπλῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς ἀφορτίστου μέ ἐφελκυστικήν φόρτισιν κάθετον ἐπί τήν

./.

διεύθυνσιν τῆς ρωγμῆς εἰς τό ἄπειρον ὡς καί ρωγμῆς μέ ὁμοιόμορφον κάθετον φόρτισιν ἐπ'ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν αὐτῆς δι'ἀναγωγῆς τῶν προβλημάτων τούτων διά τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως εἰς τόν μοναδιαῖον κύκλον.

'Ο MILNE-THOMSON (29) ἐπέλυσεν ἐπίσης τά αὐτά ὡς καί ὁ SAVIN προβλήματα διά τῆς αὐτῆς μεθόδου μέ τυχοῦσαν ὅμως φόρτισιν εἰς τό ἄπειρον διά τήν περίπτωσιν τῆς ἀφορτίστου ρωγμῆς.

Τέλος ὁ Καθηγητής τοῦ Ε.Μ.Π. κ.Ν.Γαλιδάκης εἰς τήν διδακτορικήν διατριβήν του (21) ἐπέλυσεν ὡς πρός τό πρόβλημα τῆς ἁπλῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς εἰς ἄπειρον ἀνισότροπον δίσκον,πέραν τῆς περιπτώσεως τῆς φορτίσεως μόνον εἰς τό ἄπειρον κατά τυχόντα τρόπον, καί τάς περιπτώσεις τῆς τμηματικῆς φορτίσεως τοῦ περιγράμματος τῆς ρωγμῆς διά καθέτου ἤ διατμητικοῦ ὁμοιομόρφως κατανεμημένου φορτίου, δηλαδή προβλήματα ἀσυμμέτρου φορτίσεως τῆς ρωγμῆς διά τῆς μεθόδου τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως τῆς ρωγμῆς ἐπί τοῦ μοναδιαίου κύκλου. 'Η διαπραγμάτευσις καί τῶν τριῶν περιπτώσεων φορτίσεως ἐδόθη κατά τρόπον συστηματικόν καί πλήρη μέ ἐπεκτάσεις καί εἰς τά συγγενῆ προβλήματα τοῦ ἀνισοτρόπου ἡμιεπιπέδου.

'Ημεῖς κατωτέρω θά δώσωμεν τάς γενικάς λύσεις, κατά συνοπτικόν τρόπον, τῶν τριῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων διά τήν ἁπλῆν εὐθύγραμμον ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου ἐπιπέδου δι'ἀπ' εὐθείας λύσεως τῶν προβλημάτων τούτων ἄνευ συμμόρφου ἀπεικονίσεως ἐπί τοῦ μοναδιαίου κύκλου καί χωρίς νά ἔχωμεν συμμετρίαν περί τήν εὐθεῖαν, ἐφ'ἧς κεῖται ἡ ρωγμή, ὅτε θά ἠδυνάμεθα νά ἀναχθῶμεν εἰς τά προβλήματα διά τό ἀνισότροπον ἡμιεπίπεδον. Τά τρία θεμελιώδη προβλήματα θά ἐπιλύσωμεν ἀνάγοντες

./.

ταῦτα εἰς ὁριακά προβλήματα RIEMANN. Ἡ γενική περίπτωσις τοῦ μικτοῦ θεμελιώδους προβλήματος παρουσιάζει διά τήν λύσιν της δυσκολίας καί δέν θά δοθῇ κατωτέρω.

11β. Αἱ **Βασικαί** Σχέσεις τῆς Θεωρίας τῆς Ἐλαστικότητος διά τά Ἀνισότροπα Μέσα εἰς Ἐπίπεδον Ἐντατικήν Κατάστασιν.

Ἡ ἐπίπεδος ἐντατική κατάστασις εἰς ἀνισότροπον μέσον καθορίζεται πλήρως ὑπό δύο συναρτήσεων Φ(Z) καί Ψ(Z), συναρτήσει τῶν ὁποίων αἱ τάσεις καί μετατοπίσεις ἐκφράζονται ὡς ἀκολούθως (21, σ.24):

$$\sigma_x = s_1^2\Phi(z_1) + s_2^2\Psi(z_2) + \bar{s}_1^2\overline{\Phi(z_1)} + \bar{s}_2^2\overline{\Psi(z_2)}\,, \qquad (1\alpha)$$

$$\sigma_y = \Phi(z_1) + \Psi(z_2) + \overline{\Phi(z_1)} + \overline{\Psi(z_2)}\,, \qquad (1\beta)$$

$$\tau_{xy} = -\left[s_1\Phi(z_1) + s_2\Psi(z_2) + \bar{s}_1\overline{\Phi(z_1)} + \bar{s}_2\overline{\Psi(z_2)}\right] \qquad (1\gamma)$$

καί:

$$u' = p_1\Phi(z_1) + p_2\Psi(z_2) + \bar{p}_1\overline{\Phi(z_1)} + \bar{p}_2\overline{\Psi(z_2)}\,, \qquad (2\alpha)$$

$$v' = q_1\Phi(z_1) + q_2\Psi(z_2) + \bar{q}_1\overline{\Phi(z_1)} + \bar{q}_2\overline{\Psi(z_2)}\,, \qquad (2\beta)$$

ἤ ὑπό πλέον συνεπτυγμένην μορφήν οἱ ἀνωτέρω τύποι γράφονται:

$$\sigma_x = 2\,\mathrm{Re}\left[s_1^2\Phi(z_1) + s_2^2\Psi(z_2)\right], \qquad (3\alpha)$$

$$\sigma_y = 2\,\mathrm{Re}\left[\Phi(z_1) + \Psi(z_2)\right], \qquad (3\beta)$$

$$\tau_{xy} = -2\,\mathrm{Re}\left[s_1\Phi(z_1) + s_2\Psi(z_2)\right] \qquad (3\gamma)$$

καί:

$$u' = 2\,\mathrm{Re}\left[p_1\Phi(z_1) + p_2\Psi(z_2)\right], \qquad (4\alpha)$$

$$v' = 2\,\mathrm{Re}\left[q_1\Phi(z_1) + q_2\Psi(z_2)\right], \qquad (4\beta)$$

ἔνθα s_1, s_2, p_1, p_2, q_1 καί q_2 σταθεραί τοῦ ἀνισοτρόπου ὑλικοῦ προσδιοριζόμεναι εὐκόλως συναρτήσει τῶν ἐλαστικῶν σταθερῶν αὐτοῦ καί αἱ μιγαδικαί μεταβληταί Z_1 καί Z_2 ὁρίζονται ὡς ἑξῆς:

$$z_1 = x + s_1 y\,, \quad z_2 = x + s_2 y\,, \qquad (5\alpha)$$

ἐνῷ:
$$z = x + iy. \tag{5β}$$

Εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ ἀπείρου ἀνισοτρόπου ἐπιπέδου μέ τήν ρωγμήν ἐντός αὐτοῦ δι'$|z| \to \infty$,ὁπότε : $|z_1| \to \infty$ καί $|z_2| \to \infty$, αἱ συναρτήσεις Φ(z) καί Ψ(z) θά ἔχουν τάς ἑξῆς ἐκφράσεις (21, σ.27):

$$\Phi(z) = A_o + \frac{A_1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{6α}$$
$$\Psi(z) = B_o + \frac{B_1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{6β}$$

ἔνθα αἱ σταθεραί A_o, B_o, A_1 καί B_1 εἶναι ἐν γένει μιγαδικαί.

Αἱ σταθεραί A_1 καί B_1 προκύπτουν ὡς λύσεις τοῦ συστήματος τῶν ἑξῆς δύο ἐξισώσεων (34, σ.33):

$$-(1-is_1)A_1+(1-i\bar{s}_1)\bar{A}_1-(1-is_2)B_1+(1-i\bar{s}_2)\bar{B}_1=-\frac{X-iY}{2\pi}, \tag{7α}$$
$$-(p_1-iq_1)A_1+(\bar{p}_1-i\bar{q}_1)\bar{A}_1-(p_2-iq_2)B_1+(\bar{p}_2-i\bar{q}_2)\bar{B}_1=0 \tag{7β}$$

καί τῶν συζυγῶν αὐτῶν μέ ἀγνώστους τά A_1, $\bar{A}_1$, B_1 καί $\bar{B}_1$, ἔνθα (X, Y) ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων ἐπί τῆς ρωγμῆς.

Αἱ σταθεραί A_o καί B_o προσδιορίζονται ἐκ τῶν συνθηκῶν φορτίσεως εἰς τό ἄπειρον, ἐάν δέ $\sigma_{x\infty}$, $\sigma_{y\infty}$ καί $\tau_{xy\infty}$ εἶναι αἱ τάσεις εἰς τό ἄπειρον καί ἀμελήσωμεν τήν συνθήκην ἐκ τῆς περιστροφῆς ε_∞ εἰς τό ἄπειρον, ἥτις δέν μεταβάλλει τήν ἐντατικήν κατάστασιν, ὁπότε αὐθαιρέτως θέτομεν ἀντ'αὐτῆς τήν συνθήκην:

$$A_o = \bar{A}_o \tag{8}$$

ἔχοντες οὕτως ἁπλοποίησιν τῶν ὑπολογισμῶν, λαμβάνομεν τελικῶς τάς ἑξῆς σχέσεις διά τάς σταθεράς A_o καί B_o(34, σ.38), (29, σ.187):

$$A_o - \bar{A}_o = 0, \tag{9α}$$
$$s_1^2 A_o + s_2^2 B_o + \bar{s}_1^2 \bar{A}_o + \bar{s}_2^2 \bar{B}_o = \sigma_{x\infty}, \tag{9β}$$
$$A_o + B_o + \bar{A}_o + \bar{B}_o = \sigma_{y\infty}, \tag{9γ}$$
$$s_1 A_o + s_2 B_o + \bar{s}_1 \bar{A}_o + \bar{s}_2 \bar{B}_o = -\tau_{xy\infty}, \tag{9δ}$$

ἐκ τῶν ὁποίων προσδιορίζονται αἱ σταθεραί A_0 καί B_0, δεδομένου ὅτι ἡ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος δέν εἶναι ποτέ μηδέν (34, σ. 38).

IIγ. Τό Πρῶτον Θεμελιῶδες Πρόβλημα.

Θεωροῦμεντήν ρωγμήν L ἐπί τοῦ ἄξονος Ox κατά τό διάστημα $-a < x < a$ καί ὑποθέτομεν δεδομένας ὡς ὁριακάς συνθήκας τάς συνιστώσας τῶν τάσεων σ_y καί τ_{xy} ἐπ'ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς, ἤτοι τάς συναρτήσεις σ_y^+, σ_y^-, τ_{xy}^+ καί τ_{xy}^- ἐπί τῶν σημείων t τῆς ρωγμῆς ὡς καί τάς τάσεις $\sigma_{x\infty}$, $\sigma_{y\infty}$ καί $\tau_{xy\infty}$ εἰς τό ἄπειρον.

Διά τά σημεῖα t τῆς ρωγμῆς καί δι'ὅλα ἐν γένει τά σημεῖα τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος εἶναι προφανῶς: $z_1 = z_2 = z = x$, ὁπότε θέτοντες:

$$F(z) = \Phi(z) + \Psi(z) \,, \tag{10α}$$

$$G(z) = s_1\Phi(z) + s_2\Psi(z) \tag{10β}$$

δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν τάς ὁριακάς συνθήκας βάσει τῶν σχέσεων (1) καί λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τάς σχέσεις (10) ὡς κάτωθι:

$$F^+(t) + \overline{F}^-(t) = \sigma_y^+ \,, \tag{11α}$$

$$F^-(t) + \overline{F}^+(t) = \sigma_y^- \tag{11β}$$

καί:

$$G^+(t) + \overline{G}^-(t) = -\tau_{xy}^+ \,, \tag{12α}$$

$$G^-(t) + \overline{G}^+(t) = -\tau_{xy}^- \tag{12β}$$

ἐπί τῆς ρωγμῆς L, ἐνῷ αἱ συναρτήσεις $F(z)$ καί $G(z)$ θά εἶναι ἀναλυτικαί ἐκτός τῆς ρωγμῆς ἐφ'ὅλου τοῦ ἐπιπέδου, ὡς καί αἱ συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$.

Αἱ ὁριακαί συνθῆκαι (11) καί (12) γράφονται καί ὡς κάτωθι, ἐάν ἀθροίσωμεν καί ἀφαιρέσωμεν κατά μέλη τόσον τάς (11) ὅσον καί τάς (12) καί παραλείψωμεν πρός ἀπλούστευσιν τῶν συμ-

./.

βολισμῶν τήν μεταβλητήν t εἰς τάς ὁριακάς τιμάς $F^{\pm}(t)$ καί $G^{\pm}(t)$ τῶν ἀναρτήσεων $F(z)$ καί $G(z)$:

$$(F+\bar{F})^{+}+(F+\bar{F})^{-}=\sigma_y^{+}+\sigma_y^{-}, \tag{13α}$$

$$(F-\bar{F})^{+}-(F-\bar{F})^{-}=\sigma_y^{+}-\sigma_y^{-} \tag{13β}$$

καί:

$$(G+\bar{G})^{+}+(G+\bar{G})^{-}=-\tau_{xy}^{+}-\tau_{xy}^{-}, \tag{14α}$$

$$(G-\bar{G})^{+}-(G-\bar{G})^{-}=-\tau_{xy}^{+}+\tau_{xy}^{-}. \tag{14β}$$

Αἱ σχέσεις (I3) καί (I4) ἰσχύουσαι ἐπί τῶν σημείων τῆς ρωγμῆς ἀποτελοῦν τέσσαρα ὁριακά προβλήματα RIEMANN, αἱ λύσεις τῶν ὁποίων βάσει τῶν τύπων (1.2) καί (10.20) εἶναι αἱ ἑξῆς:

$$F(z)+\bar{F}(z)=\frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(t)(\sigma_y^{+}+\sigma_y^{-})}{t-z}dt+\frac{2(C_{01}z+C_{11})}{X(z)}, \tag{15α}$$

$$F(z)-\bar{F}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\sigma_y^{+}-\sigma_y^{-}}{t-z}dt+2iD_1 \tag{15β}$$

καί ἀναλόγως:

$$G(z)+\bar{G}(z)=-\frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(t)(\tau_{xy}^{+}+\tau_{xy}^{-})}{t-z}dt+\frac{2(C_{02}z+C_{12})}{X(z)}, \tag{16α}$$

$$G(z)-\bar{G}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\tau_{xy}^{+}-\tau_{xy}^{-}}{t-z}dt+2iD_2, \tag{16β}$$

ἔνθα ὁρίζεται ὡς καί διά τήν περίπτωσιν ἰσοτρόπου μέσου:

$$X(z)=\sqrt{z^2-a^2} \tag{17}$$

καί C_{01}, C_{11}, C_{02}, C_{12}, D_1 καί D_2 εἶναι σταθεραί πραγματικαί, δεδομένου ὅτι ἐκ τῆς προφανοῦς σχέσεως:

$$F(z)-\bar{F}(z)=-\left[\bar{F}(z)-F(z)\right] \tag{18}$$

καί τῆς σχέσεως (I5β) ἔπεται ὅτι:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\sigma_y^{+}-\sigma_y^{-}}{t-z}dt+2iD_1=-\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\sigma_y^{+}-\sigma_y^{-}}{t-z}dt-2i\bar{D}_1\right], \tag{19}$$

ἀπό ὅπου προκύπτει εὐθύς ὅτι:

$$D_1=\bar{D}_1, \tag{20}$$

./.

ἤτοι ἡ σταθερά D_1 εἶναι πραγματική, ἐκ δέ τῆς σχέσεως (I6β) τό αὐτό ἔπεται καί διά τήν σταθεράν D_2.

Ἀναλόγως ἐκ τῆς προφανοῦς σχέσεως:

$$F(z)+\bar{F}(z)=\bar{F}(z)+F(z) \tag{21}$$

καί τῶν σχέσεων (I5α) καί (I7) ἔπεται ὅτι:

$$\frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(t)(\sigma_y^+ + \sigma_y^-)}{t-z}dt+\frac{2(C_{01}z+C_{11})}{X(z)}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{-X(t)(\sigma_y^+ + \sigma_y^-)}{t-z}dt+\frac{2(\bar{C}_{01}z+\bar{C}_{11})}{X(z)}, \tag{22}$$

ἀπό ὅπου προκύπτει ἀμέσως ὅτι:

$$C_{01}=\bar{C}_{01}, \tag{23α}$$

$$C_{11}=\bar{C}_{11}, \tag{23β}$$

ἤτοι αἱ σταθεραί C_{01} καί C_{11} εἶναι πραγματικαί, ἐκ δέ τῶν σχέσεων (I6α) καί (I7) τό αὐτό ἔπεται καί διά τάς σταθεράς C_{02} καί C_{12}.

Ἐκ τῶν σχέσεων (I5) δι'ἀθροίσεως κατά μέλη προκύπτει ἡ συνάρτησις $F(z)$, ἐκ δέ τῶν σχέσεων (I6) δι'ἀθροίσεως κατά μέλη προκύπτει ἡ συνάρτησις $G(z)$, ἤτοι ἔχομεν:

$$F(z)=\frac{1}{4\pi i X(z)}\int_L \frac{X(t)(\sigma_y^+ + \sigma_y^-)}{t-z}dt+\frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{\sigma_y^+ - \sigma_y^-}{t-z}dt+ \\ +\frac{C_{01}z+C_{11}}{X(z)}+iD_1, \tag{24α}$$

$$G(z)=-\frac{1}{4\pi i X(z)}\int_L \frac{X(t)(\tau_{xy}^+ + \tau_{xy}^-)}{t-z}dt-\frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-}{t-z}dt+ \\ +\frac{C_{02}z+C_{12}}{X(z)}+iD_2. \tag{24β}$$

Αἱ συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ ἐκφράζονται συναρτήσει τῶν $F(z)$ καί $G(z)$ λόγῳ τῶν σχέσεων (I0) ὁρισμοῦ τῶν $F(z)$ καί $G(z)$ ὡς ἑξῆς:

$$\Phi(z)=\frac{-s_2F(z)+G(z)}{s_1-s_2}, \tag{25α}$$

$$\Psi(z)=\frac{s_1F(z)-G(z)}{s_1-s_2}. \tag{25β}$$

Δι' $|z|\to\infty$ αἱ σχέσεις (3), λόγῳ καί τῶν (10), (24) καί (25), δίδουν:

$$C_{01}=\frac{\sigma_{y\infty}}{2}\,, \tag{26α}$$

$$C_{02}=\frac{-\tau_{xy\infty}}{2} \tag{26β}$$

καί ἐπίσης:

$$\sigma_{x\infty}=2\lim_{|z|\to\infty}\left[s_1^2\Phi(z)+s_2^2\Psi(z)\right], \tag{27}$$

ἤ λόγῳ τῶν (25):

$$\sigma_{x\infty}=2\lim_{|z|\to\infty}\left[-s_1s_2F(z)+(s_1+s_2)G(z)\right]. \tag{28}$$

Συμφώνως πρός τά ἀναφερθέντα εἰς τήν § 11β ἐκλέγομεν αὐθαιρέτως:

$$D_1=0\,, \tag{29}$$

ὁπότε ἡ σχέσις (28), λόγῳ τῶν (24) καί τῶν (26), δίδει:

$$\sigma_{x\infty}=Re\left[-s_1s_2\sigma_{y\infty}+(s_1+s_2)(-\tau_{xy\infty}+2iD_2)\right] \tag{30}$$

καί ἡ σταθερά D_2 προκύπτει ὡς:

$$D_2=-\frac{\sigma_{x\infty}+\sigma_{y\infty}Re[s_1s_2]+\tau_{xy\infty}\cdot Re\,[s_1+s_2]}{2Im[s_1+s_2]}\,. \tag{31}$$

Περαιτέρω θά προσδιορίσωμεν τάς σταθεράς C_{11} καί C_{12} τῶν σχέσεων (24), ὥστε νά ἐξασφαλίζεται τό μονοσήμαντον τῶν μετατοπίσεων. Πρέπει δηλαδή νά εἶναι:

$$u^+(a)=u^-(a)\quad,\quad u^+(-a)=u^-(-a), \tag{32α}$$

$$v^+(a)=v^-(a)\quad,\quad v^+(-a)=v^-(-a), \tag{32β}$$

καί ἑπομένως θά ἔχωμεν:

$$u^+(a)-u^+(-a)=u^-(a)-u^-(-a), \tag{33α}$$

$$v^+(a)-v^+(-a)=v^-(a)-v^-(-a) \tag{33β}$$

καί περαιτέρω:

$$\int_L(u^{+\prime}-u^{-\prime})\,dt=0, \tag{34α}$$

$$\int_L(v^{+\prime}-v^{-\prime})\,dt=0. \tag{34β}$$

'Εκ τῶν σχέσεων (4), λόγῳ καί τῶν (25), ἐπί τῶν σημείων τῆς ρωγμῆς θά ἔχωμεν:

$$u^{\pm\prime}(t) = 2Re\left[a_1 F^{\pm}(t) + a_2 G^{\pm}(t)\right], \qquad (35a)$$

$$v^{\pm}(t) = 2Re\left[b_1 F^{\pm}(t) + b_2 G^{\pm}(t)\right], \qquad (35b)$$

ἔνθα αἱ σταθεραί a_1, a_2, b_1 καί b_2 δίδονται ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων:

$$a_1 = \frac{s_1 q_2 - s_2 q_1}{s_1 - s_2}, \qquad b_1 = \frac{s_1 p_2 - s_2 p_1}{s_1 - s_2}, \qquad (36a)$$

$$a_2 = \frac{q_1 - q_2}{s_1 - s_2}, \qquad b_2 = \frac{p_1 - p_2}{s_1 - s_2}. \qquad (36b)$$

Αἱ συνθῆκαι (34) λόγῳ τῶν (35) γράφονται:

$$Re\int_L \left[a_1 (F^+ - F^-) + a_2 (G^+ - G^-)\right] dt = 0, \qquad (37a)$$

$$Re\int_L \left[b_1 (F^+ - F^-) + b_2 (G^+ - G^-)\right] dt = 0, \qquad (37b)$$

ἐκ τῶν ὁποίων θά προσδιορισθοῦν αἱ σταθεραί C_{11} καί C_{12} τῶν σχέσεων (24) λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν καί τῶν ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ **CAUCHY** προκυπτουσῶν, λόγῳ τῶν (24), σχέσεων:

$$Re\left\{2\pi i\left[a_1\left(C_{11} - \frac{Y}{4\pi}\right) + a_2\left(C_{12} + i\frac{X}{4\pi}\right)\right]\right\} = 0, \qquad (38a)$$

$$Re\left\{2\pi i\left[b_1\left(C_{11} - \frac{Y}{4\pi}\right) + b_2\left(C_{12} + i\frac{X}{4\pi}\right)\right]\right\} = 0, \qquad (38b)$$

ἤ περαιτέρω:

[redacted]

"Ηδη αἱ σχέσεις (24), (25), (26), (29), (31) καί (39) δίδουν τήν πλήρη λύσιν τοῦ θεωρηθέντος πρώτου θεμελιώδους προβλήματος διά ρωγμήν εἰς ἀνισότροπον ἐπίπεδον μέ τυχοῦσαν φόρτισιν ἐπί τῆς ρωγμῆς καί εἰς τό ἄπειρον.

Θά ἐφαρμόσωμεν τώρα τά ἀνωτέρω διά τήν περίπτωσιν τῆς

./.

ἀφορτίστου ρωγμῆς μέ φόρτισιν μόνον εἰς τό ἄπειρον, ὅτε θά ἔχωμεν:

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^- = \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0 \tag{40}$$

καί αἱ σχέσεις (26) δίδουν:

$$C_{01} = \frac{\sigma_{y\infty}}{2}, \tag{41α}$$

$$C_{02} = -\frac{\tau_{xy\infty}}{2} \tag{41β}$$

καί λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι:

$$X = Y = 0, \tag{41γ}$$

ἐκ τῶν συνθηκῶν (39) διά τό μονοσήμαντον τῶν μετατοπίσεων λαμβάνομεν:

$$C_{11} = C_{12} = 0. \tag{42}$$

Τότε αἱ σχέσεις (24) γράφονται ἰσχυουσῶν καί τῶν (29) καί (3Ι):

$$F(z) = \frac{\sigma_{y\infty} z}{2X(z)}, \tag{43α}$$

$$G(z) = -\frac{\tau_{xy\infty} z}{2X(z)} + iD_2. \tag{43β}$$

Αἱ μιγαδικαί συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ εὑρίσκονται περαιτέρω βάσει τῶν σχέσεων (25) ὡς:

$$\Phi(z) = -\frac{(s_2\sigma_{y\infty} + \tau_{xy\infty})z}{2(s_1 - s_2)X(z)} + i\frac{D_2}{s_1 - s_2}, \tag{44α}$$

$$\Psi(z) = \frac{(s_1\sigma_{y\infty} + \tau_{xy\infty})z}{2(s_1 - s_2)X(z)} - i\frac{D_2}{s_1 - s_2}, \tag{44β}$$

ἔνθα ἡ σταθερά D_2 δίδεται, ὡς προανεφέρθη, ἐκ τῆς σχέσεως (3Ι) συναρτήσει τῶν τάσεων $\sigma_{x\infty}$, $\sigma_{y\infty}$ καί $\tau_{xy\infty}$ εἰς τό ἄπειρον.

Δεδομένου ὅτι ἡ ειδική αὕτη περίπτωσις τῆς ἀφορτίστου

./.

ρωγμῆς μέ φόρτισιν μόνον εἰς τό ἄπειρον παρουσιάζεται συχνά, θά δώσωμεν περαιτέρω καί τάς συνιστώσας τῶν τάσεων σ_x, σ_y καί τ_{xy} εἰς ὅλον τό ἄπειρον δοκίμιον, ὡς καί τάς ἐκφράσεις αὐτῶν διά σημεῖα τείνοντα νά συμπέσουν μέ τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς. Οὕτω οἱ τύποι (3) λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν καί τῶν σχέσεων (3I) καί (42) δίδουν:

$$\sigma_x=\sigma_{x\infty}+Re\left\{\frac{1}{S_1-S_2}\left[-S_1^2(S_2\sigma_{y\infty}+\tau_{xy\infty})\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2-a^2}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+S_2^2(S_1\sigma_{y\infty}+\tau_{xy\infty})\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2-a^2}}\right]+S_1S_2\sigma_{y\infty}+(S_1+S_2)\tau_{xy\infty}\right\}, \quad (45\alpha)$$

$$\sigma_y=Re\left\{\frac{1}{S_1-S_2}\left[-(S_2\sigma_{y\infty}+\tau_{xy\infty})\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2-a^2}}+(S_1\sigma_{y\infty}+\tau_{xy\infty})\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2-a^2}}\right]\right\}, \quad (45\beta)$$

$$\tau_{xy}=Re\left\{\frac{1}{S_1-S_2}\left[S_1(S_2\sigma_{y\infty}+\tau_{xy\infty})\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2-a^2}}-S_2(S_1\sigma_{y\infty}+\tau_{xy\infty})\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2-a^2}}\right]\right\}. \quad (45\gamma)$$

Αἱ σχέσεις (45) ταυτίζονται μέ τάς σχέσεις (29) τῆς παραπομπῆς (2I) διά τήν λύσιν τοῦ αὐτοῦ προβλήματος διά τῆς μεθόδου τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως τῆς ρωγμῆς, ἐπί τοῦ μοναδιαίου κύκλου, ἐάν λάβωμεν ὑπ'ὄψιν ὅτι ἔχομεν διά τήν σύμμορφον ἀπεικόνισιν ἀπό τοῦ ἐπιπέδου z εἰς τό ἐπίπεδον ζ τήν συνάρτησιν:

$$z=\frac{a}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right) \quad (46\alpha)$$

καί ἀναλόγως:

$$z_1=\frac{a}{2}\left(\zeta_1+\frac{1}{\zeta_1}\right), \quad (46\beta)$$

$$z_2=\frac{a}{2}\left(\zeta_2+\frac{1}{\zeta_2}\right). \quad (46\gamma)$$

Τέλος πρέπει νά σημειώσωμεν ὅτιδιά $z\to a$ θέτοντες

$$z=a+\tau e^{i\theta}=a+\tau(\cos\theta+i\sin\theta) \quad (47)$$

δυνάμεθα κατά προσέγγισιν δι' $\tau\to 0$ νά γράφωμεν:

$$\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2-a^2}}=\sqrt{\frac{a}{2\tau(\cos\theta+S_1\sin\theta)}}, \quad (48\alpha)$$

$$\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2-a^2}}=\sqrt{\frac{a}{2\tau(\cos\theta+S_2\sin\theta)}}, \quad (48\beta)$$

./.

ὅτε αἱ σχέσεις (45) γράφονται ἁπλούστερον διά $z \to a$:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{a}{2r}} \cdot Re\left\{\frac{1}{s_1 - s_2}\left[-\frac{s_1^2(s_2\sigma_{y\infty}+\tau_{xy\infty})}{\sqrt{\cos\theta + s_1\sin\theta}} + \frac{s_2^2(s_1\sigma_{y\infty}+\tau_{xy\infty})}{\sqrt{\cos\theta + s_2\sin\theta}}\right]\right\}, \quad (49\alpha)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{a}{2r}} \cdot Re\left\{\frac{1}{s_1 - s_2}\left[-\frac{s_2\sigma_{y\infty}+\tau_{xy\infty}}{\sqrt{\cos\theta + s_1\sin\theta}} + \frac{s_1\sigma_{y\infty}+\tau_{xy\infty}}{\sqrt{\cos\theta + s_2\sin\theta}}\right]\right\}, \quad (49\beta)$$

$$\tau_{xy} = \sqrt{\frac{a}{2r}} \cdot Re\left\{\frac{1}{s_1 - s_2}\left[\frac{s_1(s_2\sigma_{y\infty}+\tau_{xy\infty})}{\sqrt{\cos\theta + s_1\sin\theta}} - \frac{s_2(s_1\sigma_{y\infty}+\tau_{xy\infty})}{\sqrt{\cos\theta + s_2\sin\theta}}\right]\right\}. \quad (49\gamma)$$

Αἱ σχέσεις (49) εἶναι ἀνάλογοι τῶν τύπων τοῦ SNEDDON (9.26) διά τήν περίπτωσιν ρωγμῆς εἰς ἰσότροπον ἐπίπεδον.

Εἰς τάς προσεγγιστικάς σχέσεις (49) διά $r \to 0$ παρελείφθησαν οἱ ὅροι, οἵτινες δέν τείνουν εἰς τό ἄπειρον διά $r \to 0$.

11δ. Τό Δεύτερον Θεμελιῶδες Πρόβλημα

Εἰς τό δεύτερον θεμελιῶδες πρόβλημα θεωροῦνται γνωσταί αἱ μετατοπίσεις $u^+(t)$, $u^-(t)$, $v^+(t)$ καί $v^-(t)$ ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς $-a<t<a$ ὡς καί αἱ τάσεις $\sigma_{x\infty}$, $\sigma_{y\infty}$ καί $\tau_{xy\infty}$ εἰς τό ἄπειρον καί αἱ συνιστῶσαι (X,Y) τῆς συνισταμένης δυνάμεως ἐπί τῆς ρωγμῆς.

Διά τά σημεῖα t τῆς ρωγμῆςκαί δι'ὅλα ἐν γένει τά σημεῖα τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος εἶναι προφανῶς: $z_1=z_2=z=x$, ὁπότε, ἐργαζόμενοι κατ'ἀνάλογον τρόπον ὡς καί εἰς τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα, θέτομεν:

$$F(z) = p_1\Phi(z) + p_2\Psi(z), \quad (50\alpha)$$

$$G(z) = q_1\Phi(z) + q_2\Psi(z). \quad (50\beta)$$

Τῇ βοηθείᾳ τῶν συναρτήσεων τούτων $F(z)$ καί $G(z)$ δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν τάς ὁριακάς συνθήκας λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν καί τάς σχέσεις (2) ὡς κάτωθι:

$$F^{+}(t)+\bar{F}^{-}(t)=u^{+\prime},\tag{51a}$$
$$F^{-}(t)+\bar{F}^{+}(t)=u^{-\prime}\tag{51b}$$

καί:

$$G^{+}(t)+\bar{G}^{-}(t)=v^{+\prime},\tag{52a}$$
$$G^{-}(t)+\bar{G}^{+}(t)=v^{-\prime}\tag{52b}$$

ἐπί τῆς ρωγμῆς L, ἐνῷ αἱ συναρτήσεις $F(z)$ καί $G(z)$ θά εἶναι ἀναλυτικαί ἐκτός τῆς ρωγμῆς ἐφ'ὅλου τοῦ ἐπιπέδου, ὡς καί αἱ συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$.

Διά τήν λύσιν τῶν προβλημάτων ὁριακῶν συνθηκῶν (51) καί (52) ἐργαζόμενοι κατ'ἐντελῶς ἀνάλογον τρόπον μέ τόπρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα εὑρίσκομεν:

$$(F+\bar{F})^{+}+(F+\bar{F})^{-}=u^{+\prime}+u^{-\prime},\tag{53a}$$
$$(F-\bar{F})^{+}-(F-\bar{F})^{-}=u^{+\prime}-u^{-\prime}\tag{53b}$$

καί:

$$(G+\bar{G})^{+}+(G+\bar{G})^{-}=v^{+\prime}+v^{-\prime},\tag{54a}$$
$$(G-\bar{G})^{+}-(G-\bar{G})^{-}=v^{+\prime}-v^{-\prime}\tag{54b}$$

καί περαιτέρω:

$$F(z)+\bar{F}(z)=\frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L\frac{X(t)(u^{+\prime}+u^{-\prime})}{t-z}dt+\frac{2(C_{01}z+C_{11})}{X(z)},\tag{55a}$$

$$F(z)-\bar{F}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{u^{+\prime}-u^{-\prime}}{t-z}dt+2iD_1\tag{55b}$$

καί ἀναλόγως:

$$G(z)+\bar{G}(z)=\frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L\frac{X(t)(v^{+\prime}+v^{-\prime})}{t-z}dt+\frac{2(C_{02}z+C_{12})}{X(z)},\tag{56a}$$

$$G(z)-\bar{G}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{v^{+\prime}-v^{-\prime}}{t-z}dt+2iD_2,\tag{56b}$$

ἔνθα ἡ συνάρτησις $X(z)$ ὁρίζεται πάλιν ἐκ τῆς σχέσεως(17), αἱ δέ πραγματικαί σταθεραί $C_{01}, C_{11}, C_{02}, C_{12}, D_1$ καί D_2 θά προσδιορισθοῦν συναρτήσει τῶν τάσεων είς τό ἄπειρον καί τῆς συνισταμένης δυνάμεως ἐπί τῆς ρωγμῆς.

Αἱ συναρτήσεις $F(z)$ καί $G(z)$ λόγω τῶν (55) καί(56) ἐκφράζονται ὡς ἑξῆς:

$$F(z)=\frac{1}{4\pi i X(z)}\int_L \frac{X(t)(u^{+\prime}+u^{-\prime})}{t-z}dt+\frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{u^{+\prime}-u^{-\prime}}{t-z}dt+$$
$$+\frac{C_{01}z+C_{11}}{X(z)}+iD_1, \qquad (57a)$$
$$G(z)=\frac{1}{4\pi i X(z)}\int_L \frac{X(t)(v^{+\prime}+v^{-\prime})}{t-z}dt+\frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{v^{+\prime}-v^{-\prime}}{t-z}dt+$$
$$+\frac{C_{02}z+C_{12}}{X(z)}+iD_2. \qquad (57b)$$

Αἱ συναρτήσεις Φ(Z) καί Ψ(Z) ἐκφράζονται συναρτήσει τῶν F(Z) καί G(Z), λόγῳ τῶν σχέσεων (50) ὁρισμοῦ τῶν F(Z) καί G(Z), ὡς ἑξῆς:

$$\Phi(z)=\frac{q_2F(z)-p_2G(z)}{p_1q_2-p_2q_1}, \qquad (58a)$$

$$\Psi(z)=\frac{-q_1F(z)+p_1G(z)}{p_1q_2-p_2q_1}. \qquad (58b)$$

Δι'$|z|\to\infty$ λόγῳ τῶν σχέσεων (I) γράφομεν:

$$s_1^2\Phi_\infty+s_2^2\Psi_\infty+\bar{s}_1^2\bar{\Phi}_\infty+\bar{s}_2^2\bar{\Psi}_\infty=\sigma_{x\infty}, \qquad (59a)$$
$$\Phi_\infty+\Psi_\infty+\bar{\Phi}_\infty+\bar{\Psi}_\infty=\sigma_{y\infty}, \qquad (59b)$$
$$s_1\Phi_\infty+s_2\Psi_\infty+\bar{s}_1\bar{\Phi}_\infty+\bar{s}_2\bar{\Psi}_\infty=-\tau_{xy\infty}. \qquad (59\gamma)$$

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν καί τάς σχέσεις (57) καί (58) ἔχομεν περαιτέρω, ἐάν ἐκλέξωμεν αὐθαιρέτως, ὡς καί εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος ἐπράξαμεν:

$$D_1=0: \qquad (60)$$

$$\mathrm{Re}\frac{s_1^2q_2-s_2^2q_1}{p_1q_2-p_2q_1}\cdot C_{01}-\mathrm{Re}\frac{s_1^2p_2-s_2^2p_1}{p_1q_2-p_2q_1}\cdot C_{02}+\mathrm{Im}\frac{s_1^2p_2-s_2^2p_1}{p_1q_2-p_2q_1}\cdot D_2=\frac{\sigma_{x\infty}}{2}, \qquad (61a)$$

$$\mathrm{Re}\frac{q_2-q_1}{p_1q_2-p_2q_1}\cdot C_{01}-\mathrm{Re}\frac{p_2-p_1}{p_1q_2-p_2q_1}\cdot C_{02}+\mathrm{Im}\frac{p_2-p_1}{p_1q_2-p_2q_1}\cdot D_2=\frac{\sigma_{y\infty}}{2}, \qquad (61b)$$

$$\mathrm{Re}\frac{s_1q_2-s_2q_1}{p_1q_2-p_2q_1}\cdot C_{01}-\mathrm{Re}\frac{s_1p_2-s_2p_1}{p_1q_2-p_2q_1}\cdot C_{02}+\mathrm{Im}\frac{s_1p_2-s_2p_1}{p_1q_2-p_2q_1}\cdot D_2=-\frac{\tau_{xy\infty}}{2}. \qquad (61\gamma)$$

'Εκ τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (6I) δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν τάς σταθεράς C_{01} C_{02} καί D_2 ,αἵτινες εἶναι πραγματικαί, ὡς καί διά τήν περίπτωσιν τοῦπρώτου θεμελιώδους προβλήματος.

./.

Ὅσον ἀφορᾷ τέλος εἰς τόν προσδιορισμόν τῶν σταθερῶν C_{11} καί C_{12} ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Δι'/Z/ ⟶ ∞ ἔχομεν:

$$X(z) = z + O\left(\frac{1}{z}\right), \tag{62}$$

ὁπότε ἐκ τῶν τύπων (57) εὑρίσκομεν:

$$F(z) = (C_{01} + iD_1)z + \frac{C_{11}}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{63α}$$

$$G(z) = (C_{02} + iD_2)z + \frac{C_{12}}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \tag{63β}$$

Δι'/Z/ ⟶ ∞ ἐπίσης οἱ συντελεσταί A_1 καί A_2 τῶν ὅρων $\frac{1}{z}$ τῶν συναρτήσεων Φ(Z) καί Ψ(Z) λόγῳ τῶν (58) καί (65) θά εἶναι:

$$A_1 = \frac{q_2 C_{11} - p_2 C_{12}}{p_1 q_2 - p_2 q_1}, \tag{64α}$$

$$A_2 = \frac{-q_1 C_{11} + p_1 C_{12}}{p_1 q_2 - p_2 q_1}. \tag{64β}$$

Θά πρέπῃ ὅμως οἱ συντελεσταί αὐτοί A_1 καί A_2 νά ἐπαληθεύουν τάς ἑξῆς δύο μιγαδικάς ἐξισώσεις (29, σ.186),(34,σ.33):

$$(1+is_1)A_1 - (1+i\bar{s}_1)\bar{A}_1 + (1+is_2)A_2 - (1+i\bar{s}_2)\bar{A}_2 = -\frac{X+iY}{2\pi}, \tag{65α}$$

$$(p_1+iq_1)A_1 - (\bar{p}_1+i\bar{q}_1)\bar{A}_1 + (p_2+iq_2)A_2 - (\bar{p}_2+i\bar{q}_2)\bar{A}_2 = 0. \tag{65β}$$

Ἡ σχέσις (65β) γράφεται καί ὡς ἑξῆς:

$$\mathrm{Im}(p_1 A_1 + p_2 A_2) + i\,\mathrm{Im}(q_1 A_1 + q_2 A_2) = 0. \tag{65γ}$$

Ἐπειδή ὅμως αἱ σταθεραί C_{11} καί C_{12} εἶναι πραγματικαί, αἱ σταθεραί A_1 καί A_2, ὡς δίδονται ἐκ τῶν σχέσεων (64), ἐπαληθεύουν ἐκ ταυτότητος τήν σχέσιν (65γ).

Ἡ σχέσις (65α) ἰσοδυναμεῖ μέ τάς ἑξῆς σχέσεις:

$$\mathrm{Im}(A_1 + A_2) = -\frac{Y}{4\pi}, \tag{66α}$$

$$\mathrm{Im}(s_1 A_1 + s_2 A_2) = \frac{X}{4\pi}. \tag{66β}$$

Αἱ σχέσεις (66), λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν καί τῶν (64), γράφονται:

$$\mathrm{Im}\frac{q_2 - q_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1} \cdot C_{11} - \mathrm{Im}\frac{p_2 - p_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1} \cdot C_{12} = -\frac{Y}{4\pi}, \tag{67α}$$

$$\mathrm{Im}\frac{s_1 q_2 - s_2 q_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1} \cdot C_{11} - \mathrm{Im}\frac{s_1 p_2 - s_2 p_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1} \cdot C_{12} = \frac{X}{4\pi}. \tag{67β}$$

./.

Τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (67) ἀποδεικνύεται, (34, σ.33), ὅτι δίδει μονοσημάντως ὡρισμένας τιμάς τῶν σταθερῶν C_{11} καί C_{12}.

Οὕτως αἱ σχέσεις (56), (57), (59) καί (67) δίδουν τήν πλήρη λύσιν τοῦ προβλήματός μας.

2ε. Τό Τρίτον Θεμελιῶδες Πρόβλημα.

Εἰς τό τρίτον θεμελιῶδες πρόβλημα θεωροῦνται γνωσταί αἱ ἐφαρμοζόμεναι τάσεις ἐπί τῆς ἄνω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς καί αἱ μετατοπίσεις ἐπί τῆς κάτω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς ὡς καί αἱ συνιστῶσαι (X, Y) τῆς συνισταμένης δυνάμεως ἐπί τῆς ρωγμῆς.

Αἱ ὁριακαί συνθῆκαι ἐπί τῆς ρωγμῆς βάσει τῶν σχέσεων (1) καί (2) γράφονται:

$$\Phi^+ + \Psi^+ + \overline{\Phi}^- + \overline{\Psi}^- = \sigma_y^+ \,, \tag{68α}$$

$$s_1\Phi^+ + s_2\Psi^+ + \bar{s}_1\overline{\Phi}^- + \bar{s}_2\overline{\Psi}^- = -\tau_{xy}^+ \,, \tag{68β}$$

$$\bar{p}_1\overline{\Phi}^+ + \bar{p}_2\overline{\Psi}^+ + p_1\Phi^- + p_2\Psi^- = u^{-\prime} \,, \tag{68γ}$$

$$\bar{q}_1\overline{\Phi}^+ + \bar{q}_2\overline{\Psi}^+ + q_1\Phi^- + q_2\Psi^- = v^{-\prime} . \tag{68δ}$$

Ὑπενθυμίζομεν ἐνταῦθα ὅτι αἱ συναρτήσεις Φ(z) καί Ψ(z) εἶναι ἀναλυτικαί εἰς ὅλον τό ἐπίπεδον πλήν τῆς ρωγμῆς.

Ἤδη ἐργαζόμεθα ἀναλόγως πρός τήν περίπτωσιν τοῦ τρίτου θεμελιώδους προβλήματος διά ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου ἐπιπέδου (29, σ.83) ὡς καί (30, σ.50Ι).

Διά τήν λύσιν τοῦ συστήματος τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (68) χρησιμοποιοῦμεν τήν ἀναπτυχθεῖσαν εἰς τήν § ΙΟ θεωρίαν. Αἱ σταθεραί δ_k (k =Ι,2,3,4) προσδιορίζονται ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἑξῆς ἐξισώσεως τετάρτου βαθμοῦ:

$$\begin{vmatrix} \delta & -1 & \delta & -1 \\ \delta s_1 & -\bar{s}_1 & \delta s_2 & -\bar{s}_2 \\ -p_1 & \delta\bar{p}_1 & -p_2 & \delta\bar{p}_2 \\ -q_1 & \delta\bar{q}_1 & -q_2 & \delta\bar{q}_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{69}$$

./.

καί περαιτέρω αἱ σταθεραί γ_k αἱ ὑπεισερχόμεναι εἰς τάς σχέσεις (10.18α) λόγῳ τῆς σχέσεως (10.18β), ἥτις γράφεται καί ὡς:

$$\delta_k = -e^{2\pi i\gamma_k}, \quad k=1,2,3,4, \tag{70}$$

θά προκύψουν ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἑξῆς ἐξισώσεως:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ s_1 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_2 \\ p_1 e^{-2\pi i\gamma} & \bar{p}_1 e^{2\pi i\gamma} & p_2 e^{-2\pi i\gamma} & \bar{p}_2 e^{2\pi i\gamma} \\ q_1 e^{-2\pi i\gamma} & \bar{q}_1 e^{2\pi i\gamma} & q_2 e^{-2\pi i\gamma} & \bar{q}_2 e^{2\pi i\gamma} \end{vmatrix} = 0, \tag{71}$$

ἥτις ταυτίζεται ἀπολύτως μέ τήν ἐξίσωσιν (6.28) μέ διαφοράν μόνον ὅτι ἐνταῦθα ἐτέθη τό $(-\gamma)$ ἀντί τοῦ λ. Βλέπομεν ἐπίσης εὐκόλως ὅτι ἡ ἐξίσωσις (69) εἶναι διτετράγωνος λυομένη κατ'ἁπλοῦν τρόπον, ἀλλ'ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως (71) κατά τήν μέθοδον τῆς § 8 εἶναι ἔτι ἁπλουστέρα καί κομψοτέρα.

Αἱ σχέσεις (6) ἐπίσης καθορίζουν τήν συμπεριφοράν τῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ εἰς τό ἄπειρον καί ὁ προσδιορισμός τῶν σταθερῶν, ἐν προκειμένῳ ὀκτώ, αἵτινες θά προκύψουν ἐκ τῶν σχέσεων (10.17) κατά τήν λύσιν τοῦ προβλήματος, γίνεται, ἀκριβῶς ὡς ἐκτίθεται εἰς τήν § 10.

Οὕτω ἡ μέθοδος τῆς § 10 ὁδηγεῖ εἰς πλήρη λύσιν κλειστῆς μορφῆς τοῦ παρόντος προβλήματος.