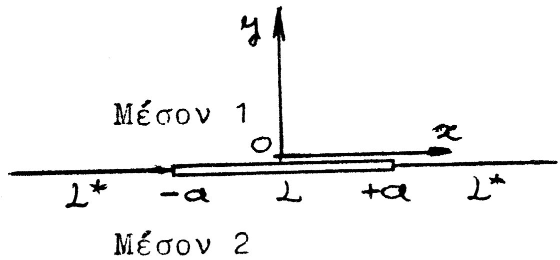
12. Ρωγμή Μεταξύ Δύο Ἰσοτρόπων Μέσων.

12α. Γενικαί Παρατηρήσεις.

Θεωροῦμεν δύο ἡμιάπειρα ἰσότροπα μέσα καί ρωγμήν κατά μῆκος τῆς εὐθείας συγκολλήσεως αὐτῶν ὡς εἰς τό Σχῆμα 8 παραπλεύρως.



Σχῆμα 8

Τό πρόβλημα τῶν δύο ἡμιαπείρων ἰσοτρόπων μέσων, ἄνευ ὅμως ρωγμῆς, φορτιζομένων διά συγκεντρωμένης δυνάμεως εἴς τι σημεῖον ἑνός τῶν ἰσοτρόπων μέσων ἐλύθη ὑπό τῶν FRASIER καί RONGVED (20). Ἀκολούθως ἐμελετήθη τό πρόβλημα τοῦ Σχήματος 8, μέ ρωγμήν, διά τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος ἄνευ φορτίσεως εἰς τό ἄπειρον, εὕρομεν δέ δημοσιευθείσας τάς ἑξῆς ἐργασίας ἐπ' αὐτοῦ.

1. Τό ἄρθρον τοῦ ERDOGAN (18) μέ πολλάς ἀφορτίστους ρωγμάς ἐπί τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος Ox καί μέ φόρτισιν ἀμελητέας ἐντάσεως εἰς τό ἄπειρον, ὥστε νά προκύπτῃ πεπερασμένη συνισταμένη δύναμις ὡς φόρτισις πολύ μακράν τῆς ρωγμῆς.

2. Τό ἄρθρον τοῦ SALGANIK (33), ἔνθα δίδεται ἡ λύσις τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος διά τυχοῦσαν φόρτισιν τῆς ρωγμῆς.

3. Τό ἄρθρον τοῦ ENGLAND (13), ἔνθα εὑρίσκεται πάλιν ἡ λύσις τοῦ ἐξεταζομένου προβλήματος μέ συμμετρικήν φόρτισιν ἐπί τῆς ρωγμῆς.

4. Τό ἄρθρον τοῦ ERDOGAN (19), ἔνθα λύονται ὡρισμένα εἰδικώτερα προβλήματα κυρίως μέ συγκεντρωμένας τάσεις καί ροπάς.

Ἐνῷ δέ εἰς τά προηγούμενα ἄρθρα αἱ λύσεις δίδονται δι' ἀναγωγῆς τῶν ἐξεταζομένων προβλημάτων εἰς προβλήματα ὁριακῶν συνθηκῶν τύπου RIEMANN, ἑτέρα μέθοδος ἀντιμετωπίσεως τοιού-

./.

των προβλημάτων στηριζομένη καί πάλιν εἰς τάς μιγαδικάς συναρτήσεις ἀνεπτύχθη ὑπό τῶν RICE καί SIH (32), ὅπου θεωροῦνται εἰς τό ἀνωτέρω πρόβλημα συγκεντρωμένα φορτία ὡς καί φόρτισις εἰς τό ἄπειρον, ἄνευ ὅμως συνεχοῦς φορτίσεως ἐπί τῶν ρωγμῶν, καί ὑπό τῶν LOEBER καί SIH (28), ὅπου δίδεται ἡ λύσις τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος διά τυχοῦσαν φόρτισιν τῆς ρωγμῆς ἄνευ φορτίσεως εἰς τό ἄπειρον.

Κατωτέρω θά δώσωμεν τήν πλήρη λύσιν τοῦ προβλήματος τῆς ρωγμῆς μεταξύ δύο ἰσοτρόπων μέσων διά τάς περιπτώσεις καί τῶν τριῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων μέ τυχοῦσαν φόρτισιν ἐπί τῆς ρωγμῆς ὡς καί φόρτισιν εἰς τό ἄπειρον δι'ἀναγωγῆς ἑκάστου τῶν προβλημάτων τούτων εἰς δύο προβλήματα ὁριακῶν συνθηκῶν τύπου RIEMANN. Διά τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος τά ἀποτελέσματα τῆς κατωτέρω διδομένης λύσεως συμφωνοῦν μέ τά ἀποτελέσματα τῶν λύσεων τῶν ἐκτιθεμένων εἰς τά προηγουμένως ἀναφερθέντα ἄρθρα.

I2β. Αἱ Βασικαί Σχέσεις.

Θεωροῦμεν ὡς εἰς τό Σχῆμα 8 τήν ρωγμήν $-\alpha < x < \alpha$ καταλαμβάνουσαν τό τμῆμα L τῆς διαχωριστικῆς εὐθείας $y=0$ τῶν δύο ἡμιεπιπέδων (1) καί (2), τά ὁποῖα διά $|x| \gg \alpha$ εἶναι συνηνωμένα πλήρως μεταξύ των. Διά τό τμῆμα τοῦτο L^* τοῦ ἄξονος Ox αἱ μεταβιβαζόμεναι τάσεις ἀπό τοῦ ἑνός ἡμιεπιπέδου εἰς τό ἄλλο, δηλαδή αἱ κάθετοι καί αἱ διατμητικαί τάσεις, εἶναι αἱ αὐταί.'Επίσης αἱ μετατοπίσεις ἐπί τῆς L^* εἶναι αἱ αὐταί θεωρούμεναι τόσον εἰς τό ἕν ἡμιεπίπεδον ὅσον καί εἰς τό ἕτερον.

῞Εστωσαν κ_1 καί μ_1 αἱ σταθεραί τοῦ μέσου (1) διά $y>0$

./.

καί $\varkappa_2$ καί μ_2 αἱ σταθεραί τοῦ μέσου (2) διά $y<0$.

'Επί τῆς L^* θά ἰσχύουν κατά τά ἀνωτέρω αἱ ἑξῆς σχέσεις:

$$\sigma_y^+ - i\tau_{xy}^+ = \sigma_y^- - i\tau_{xy}^- , \quad u^{+'} + iv^{+'} = u^{-'} + iv^{-'}, \tag{1}$$

αἵτινες λόγῳ τῶν σχέσεων (9.1) γράφονται καί ὡς ἑξῆς:

$$\Phi_1^+ + \Omega_1^- = \Phi_2^- + \Omega_2^+ , \tag{2a}$$

$$\frac{1}{2\mu_1}(\varkappa_1\Phi_1^+ - \Omega_1^-) = \frac{1}{2\mu_2}(\varkappa_2\Phi_2^- - \Omega_2^+). \tag{2b}$$

Αἱ σχέσεις (2) γράφονται καί ὡς ἑξῆς:

$$(\Phi_1 - \Omega_2)^+ = (\Phi_2 - \Omega_1)^- , \tag{3a}$$

$$(\varkappa_1\mu_2\Phi_1 + \mu_1\Omega_2)^+ = (\varkappa_2\mu_1\Phi_2 + \mu_2\Omega_1)^- , \tag{3b}$$

ἔνθα παρελείφθη ἡ μεταβλητή t εἰς τάς ὁριακάς τιμάς τῶν συναρτήσεων $\Phi_i(Z)$ καί $\Omega_i(Z)$ $(i=1,2)$, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ $\Phi_1(Z)$ καί $\Omega_2(Z)$ ὁρίζονται διά $y>0$, αἱ δέ $\Phi_2(Z)$ καί $\Omega_1(Z)$ διά $y<0$, ἐπί δέ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος ὑπάρχει ἀσυνέχεια τῶν ὁριακῶν τιμῶν τῶν συναρτήσεων $\Phi_1(Z)$ καί $\Phi_2(Z)$ ὡς καί τῶν $\Omega_1(Z)$ καί $\Omega_2(Z)$.

Αἱ σχέσεις (3) μᾶς ὁδηγοῦν νά ὁρίσωμεν, διά νά ἀποφύγωμεν τάς ἀσυνεχείας τῶν ὁριακῶν τιμῶν τῶν $\Phi(Z)$ καί $\Omega(Z)$ ἐπί τῆς L^*, τάς νέας συναρτήσεις $F_1(Z)$ καί $F_2(Z)$, αἵτινες θά εἶναι τμηματικῶς συνεχεῖς εἰς τό ἄπειρον ἐπίπεδον μέ ἀσυνεχείας μόνον ἐπί τῆς ρωγμῆς L, ὡς κάτωθι:

$$F_1(Z) = \begin{cases} \Phi_1(Z) - \Omega_2(Z) & , \text{διά: } y>0, \\ \Phi_2(Z) - \Omega_1(Z) & , \text{διά: } y<0, \end{cases} \tag{4a}$$

$$F_2(Z) = \begin{cases} \varkappa_1\mu_2\Phi_1(Z) + \mu_1\Omega_2(Z) & , \text{διά: } y>0, \\ \varkappa_2\mu_1\Phi_2(Z) + \mu_2\Omega_1(Z) & , \text{διά: } y<0. \end{cases} \tag{4b}$$

Αἱ σχέσεις (3) ἤδη γράφονται ἐπί τῆς L^*:

$$F_i^+ = F_i^- \ , \ i=1,2, \tag{5}$$

ἐπί δέ τῆς ρωγμῆς L θά ἔχωμεν τάς γνωστάς σχέσεις:

$$\Phi^+ + \Omega^- = \sigma_y^+ - i\tau_{xy}^+ , \tag{6a}$$

$$\Phi^- + \Omega^+ = \sigma_y^- - i\tau_{xy}^- \tag{6b}$$

./.

διά τάς τάσεις καί:

$$\frac{1}{2\mu_1}(\kappa_1\Phi^+ - \Omega^-) = u'^+ + i v'^+ , \qquad (7a)$$

$$\frac{1}{2\mu_2}(\kappa_2\Phi^- - \Omega^+) = u'^- + i v'^- \qquad (7b)$$

διά τάς παραμορφώσεις.

Αἱ σχέσεις (4) ὁρισμοῦ τῶν $F_1(z)$ καί $F_2(z)$ λυόμεναι ὡς πρός $\Phi(z)$ καί $\Omega(z)$ δίδουν:

Διά τό μέσον (1):

$$\Phi_1(z) = \frac{\mu_1 F_1(z) + F_2(z)}{\kappa_1\mu_2 + \mu_1}, \text{διά: } y > 0, \qquad (8a)$$

$$\Omega_1(z) = \frac{-\kappa_2\mu_1 F_1(z) + F_2(z)}{\kappa_2\mu_1 + \mu_2}, \text{διά: } y < 0, \qquad (8b)$$

καί διά τό μέσον (2):

$$\Phi_2(z) = \frac{\mu_2 F_1(z) + F_2(z)}{\kappa_2\mu_1 + \mu_2}, \text{διά: } y > 0, \qquad (9a)$$

$$\Omega_2(z) = \frac{-\kappa_1\mu_2 F_1(z) + F_2(z)}{\kappa_1\mu_2 + \mu_1}, \text{διά: } y < 0. \qquad (9b)$$

Τούς ἀνωτέρω τύπους παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα νά γράψωμεν χρησιμοποιοῦντες ἀντί τῶν σταθερῶν μ_1 καί μ_2 τῶν δύο μέσων τόν λόγον αὐτῶν:

$$\Gamma_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1} . \qquad (10)$$

Δέν ἐπράξαμεν ὅμως τοῦτο ἀνωτέρω διά νά εἶναι οἱ τύποι, εἰς τούς ὁποίους κατελήξαμεν, περισσότερον ὁμοιογενεῖς.

Ἕν ἕτερον μέγεθος ὁριζόμενον διά τήν περίπτωσιν δύο μέσων (1) καί (2), ὡς τό μέγεθος Γ_0 , συναρτήσει τῶν σταθερῶν μ_1, μ_2, κ_1 καί κ_2 τῶν δύο μέσων εἶναι τό ἑξῆς:

$$m = \frac{\kappa_1\mu_2 + \mu_1}{\kappa_2\mu_1 + \mu_2} = \frac{\kappa_1\Gamma_0 + 1}{\kappa_2 + \Gamma_0} , \qquad (11)$$

τό ὁποῖον καί θά χρησιμοποιήσωμεν κατωτέρω.

./.

I2γ. Αἱ Συνθῆκαι Ἀπείρως Μακράν τῆς Ρωγμῆς.

Εἰς τάς συνθήκας ἀπείρως μακράν τῆς ρωγμῆς ὑπεισέρχονται τά ἑξῆς μεγέθη: Αἱ συνιστῶσαι X,Y τῆς συνισταμένης δυνάμεως τῆς ἐξασκουμένης ἐπί τῆς ρωγμῆς, αἱ τάσεις $\sigma_{x1\infty}$ καί $\sigma_{x2\infty}$ καί αἱ περιστροφαί $\varepsilon_{1\infty}$ καί $\varepsilon_{2\infty}$ εἰς τό ἄπειρον διά τά δύο ἡμιεπίπεδα μέ $y>0$ καί $y<0$ ἀντιστοίχως καί αἱ κοιναί δι' ἀμφότερα τά ἡμιεπίπεδα τάσεις $\sigma_{y\infty}$ καί $\tau_{xy\infty}$ εἰς τό ἄπειρον.

Συμφώνως πρός τά ἀναφερθέντα εἰς τό προηγούμενον ἐδάφιον αἱ βασικαί συναρτήσεις διά τό ἐξεταζόμενον πρόβλημα τῆς ρωγμῆς μεταξύ δύο ἰσοτρόπων μέσων εἶναι αἱ F_i (Z) (i=1,2) ὁριζόμεναι ἐκ τῶν σχέσεων (4), καθ'ὅσον αὗται εἶναι ἀναλυτικαί ἐφ'ὅλου τοῦ ἐπιπέδου ἐκτός τῆς ρωγμῆς.Δι'$|Z|\to\infty$ θά ἔχουν τάς ἑξῆς ὁριακάς ἐκφράσεις ἀναλόγους πρός τάς (9.3) διά τάς συναρτήσεις Φ(Z) καί Ω(Z) δι'ἕν ἰσότροπον μέσον:

$$F_i(z)=F_{i\infty}+\frac{k_i}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\,,\ i=1,2. \tag{12}$$

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τάς σχέσεις (4) ὁρισμοῦ τῶν $F_1(Z)$ καί $F_2(Z)$, τάς ἐκ τῶν βασικῶν σχέσεων (9.1) προκυπτούσας ἀναλόγως πρός τάς (9.3) συνθήκας εἰς τό ἄπειρον:

$$\Phi_{j\infty}=\Gamma_j\,,\quad j=1,2, \tag{13a}$$

$$\Omega_{j\infty}=\overline{\Gamma}_j+\overline{\Gamma}_j'\,,\quad j=1,2, \tag{13b}$$

ἔνθα διά τοῦ δείκτου 1 δηλοῦται τό ἡμιεπίπεδον μέ $y>0$ καί διά τοῦ δείκτου 2 τό ἡμιεπίπεδον μέ $y<0$, τάς ἰσοδυνάμους πρός τάς (9.4) ἐκφράσεις τῶν σταθερῶν Γ_j καί Γ_j' συναρτήσει τῶν τάσεων καί τῆς περιστροφῆς εἰς τό ἄπειρον:

$$\Gamma_j=\frac{1}{4}(\sigma_{xj\infty}+\sigma_{y\infty})+i\,\frac{2\mu_j\varepsilon_{j\infty}}{1+\kappa_j}\,,\quad j=1,2, \tag{14a}$$

$$\Gamma_j'=-\frac{1}{2}(\sigma_{xj\infty}-\sigma_{y\infty}-2i\tau_{xy\infty})\,,\quad j=1,2, \tag{14b}$$

ὡς καί τάς σχέσεις (I2) ἔχομεν τάς ἑξῆς συνθήκας, αἵτινες πρέπει νά πληρῶνται μεταξύ τῶν τάσεων καί περιστροφῶν εἰς τό ἄπειρον:

$$F_{1\infty}=\Gamma_1-\overline{\Gamma}_2-\overline{\Gamma}_2'=\Gamma_2-\overline{\Gamma}_1-\overline{\Gamma}_1'\,, \tag{15a}$$

$$F_{2\infty}=\kappa_1\mu_2\Gamma_1+\mu_1(\overline{\Gamma}_2+\overline{\Gamma}_2')=\kappa_2\mu_1\Gamma_2+\mu_2(\overline{\Gamma}_1+\overline{\Gamma}_1'). \tag{15b}$$

./.

Ἡ συνθήκη (I5α) ἰσχύει ἐκ ταυτότητος λόγῳ τῶν ἀρχικῶν ὑποθέσεων ὅτι αἱ τάσεις $\sigma_{y\infty}$ καί $\tau_{xy\infty}$ εἶναι κοιναί δι'ἀμφότερα τά ἡμιεπίπεδα, ὡς τοῦτο εὐκόλως διαπιστοῦται. Ἡ συνθήκη (I5β) λόγῳ τῶν σχέσεων (I4) διά θεωρήσεως τῶν ἰσοτήτων τῶν πραγματικῶν καί τῶν φανταστικῶν μερῶν τῶν δύο μελῶν αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμος μέ τάς ἑξῆς δύο συνθήκας:

$$(1+\kappa_1)\mu_2\sigma_{x1\infty}-(1+\kappa_2)\mu_1\sigma_{x2\infty}=[(3-\kappa_1)\mu_2-(3-\kappa_2)\mu_1]\sigma_{y\infty}, \quad (16\alpha)$$

$$2\mu_1\mu_2(\varepsilon_{2\infty}-\varepsilon_{1\infty})=(\mu_2-\mu_1)\tau_{xy\infty}, \quad (16\beta)$$

αἵτινες εὑρέθησαν κατά διάφορον τρόπον ὑπό τῶν RICE καί SIH (32, σ.420, 423), οἵτινες διεπίστωσαν μάλιστα ὅτι ἡ πρώτη τούτων ἰσοδυναμεῖ μέ τήν συνθήκην τῆς συνεχείας τῆς παραμορφώσεως ε_x κατά μῆκος τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος εἰς τό ἄπειρον, διά τά δύο ἰσότροπα μέσα. Εἰς τήν κατωτέρω ἀνάπτυξιν θά θεωρῶμεν τάς σχέσεις (I6) ἰσχυούσας, ὡς τοῦτο ἀπαιτεῖται, αἱ δέ τιμαί $F_{1\infty}$ καί $F_{2\infty}$ θά δίδωνται τότε ἐκ τῶν σχέσεων (I5) συναρτήσει τῶν τάσεων καί περιστροφῶν εἰς τό ἄπειρον θεωρούμεναι οὕτω γνωσταί.

Περαιτέρω, ὅσον ἀφορᾷ εἰς τόν προσδιορισμόν τῶν σταθερῶν f_i τῶν ἀναπτυγμάτων (I2) τῶν συναρτήσεων $F_i(Z)$ εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐπί τῆς ρωγμῆς L, λόγῳ τῶν βασικῶν τύπων (9.1) ὡς καί τῶν σχέσεων (4) ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων $F_i(Z)$ θά ἔχωμεν τάς ἑξῆς σχέσεις:

$$F_1^+-F_1^-=(\sigma_y^+-\sigma_y^-)-i(\tau_{xy}^+-\tau_{xy}^-), \quad (17\alpha)$$

$$F_2^+-F_2^-=(u^{+\prime}-u^{-\prime})+i(v^{+\prime}-v^{-\prime}). \quad (17\beta)$$

Ἐκ τούτων διά τήν συνισταμένην δύναμιν (X,Y) τήν ἐξασκουμένην ἐπί τῆς ρωγμῆς θά ἔχωμεν:

$$X+iY=\int_L[i(\sigma_y^+-\sigma_y^-)+(\tau_{xy}^+-\tau_{xy}^-)]dt=i\int_L(F_1^+-F_1^-)dt, \quad (18)$$

διά νά ἐξασφαλίσωμεν δέ τό μονοσήμαντον τῶν μετατοπίσεων ἤ, ὑπό πλέον φυσικήν ἔκφρασιν, ἐπειδή αἱ μεταβολαί τῶν μετατο-

./.

πίσεων ἀπό τοῦ ἑνός εἰς τό ἕτερον ἄκρον τῆς ρωγμῆς θά πρέπῃ νά εἶναι αἱ αὐταί μετρούμεναι εἴτε ἐπί τῆς ἄνω εἴτε ἐπί τῆς κάτω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς, θά ἔχωμεν:

$$\int_{L_0}[(u^{+\prime}-u^{-\prime})+i(v^{+\prime}-v^{-\prime})]dt=\int_{L}(F_2^{+}-F_2^{-})dt=0. \qquad (19)$$

Δεδομένου δέ ὅτι αἱ συναρτήσεις $F_i(Z)$ εἶναι ἀναλυτικαί ἐφ'ὅλου τοῦ ἐπιπέδου πλήν τῆς ρωγμῆς θεωροῦντες τόν ἄπειρον κύκλον L_0 τόν περιβάλλοντα τήν ρωγμήν θά ἔχωμεν συμφώνως πρός τό θεώρημα τοῦ CAUCHY:

$$\int_{L_0}F_i(t)dt=-\int_{L}(F_i^{+}-F_i^{-})dt\ ,\ i=1,2, \qquad (20)$$

ὅπου ἐλήφθη ὡς φορά διαγραφῆς τοῦ ἀπείρου κύκλου L ἡ θετική τοιαύτη, ὡς φορά δέ διαγραφῆς τῆς ρωγμῆς ἡ κατά τάς αὐξούσας τιμάς τῆς μεταβλητῆς χ. Ἐν συνεχείᾳ δέ λόγῳ τῶν ἀναπτυγμάτων κατά LAURENT (I2) τῶν συναρτήσεων $F_i(Z)$ εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου λαμβάνοντες δέ ὑπ'ὄψιν καί τάς σχέσεις (I8) καί (I9) θά ἔχωμεν τελικῶς:

$$f_1=\frac{X+iY}{2\pi}\ ,\ f_2=0\ , \qquad (21)$$

ὁπότε, ἔχοντες καθορίσει πλήρως τήν συμπεριφοράν τῶν συναρτήσεων $F_i(Z)$ εἰς τό ἄπειρον κατά τούς τύπους (I2) διά τῆς κατά τά ἀνωτέρω εὑρέσεως τῶν μεγεθῶν $F_{i\infty}$ καί f_i δυνάμεθα νά προχωρήσωμεν περαιτέρω εἰς τήν λύσιν τῶν τριῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων.

I2γ. Τό Πρῶτον Θεμελιῶδες Πρόβλημα.

Δίδονται εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος αἱ τάσεις $\sigma_y^{+}, \sigma_y^{-}$, τ_{xy}^{+} καί τ_{xy}^{-} ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς καί αἱ τάσεις ὡς καί αἱ περιστροφαί εἰς τό ἄπειρον ἱκανοποιοῦσαι τάς ὁριακάς συνθήκας (I6).

Ἰσχύουν ἐν προκειμένῳ αἱ ὁριακαί συνθῆκαι (6).

Ἀφαιροῦντες ταύτας κατά μέλη λαμβάνομεν:

$$(\Phi_1-\Omega_2)^{+}-(\Phi_2-\Omega_1)^{-}=(\sigma_y^{+}-\sigma_y^{-})-i(\tau_{xy}^{+}-\tau_{xy}^{-}). \qquad (22)$$

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τόν ὁρισμόν (4α) τῆς συναρτήσεως $F_1(Z)$ καί θέτοντες:

$$f(t)=(\sigma_y^+-\sigma_y^-)-i(\tau_{xy}^+-\tau_{xy}^-) \tag{23}$$

γράφομεν τήν σχέσιν (12) ὑπό τήν μορφήν τοῦ ἑξῆς ἁπλουστάτου προβλήματος RIEMANN ἐπί τῆς ρωγμῆς L:

$$F_1^+-F_1^-=f(t), \tag{24}$$

ἡ λύσις τοῦ ὁποίου, λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν καί τῆς συνθήκης(15α) λόγω τῆς φορτίσεως εἰς τό ἄπειρον, εἶναι:

$$F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}dt+\Gamma_1-\overline{\Gamma}_2-\overline{\Gamma}_2'. \tag{25}$$

'Εκ τῶν δύο ὁριακῶν συνθηκῶν (6) πρέπει νά φθάσωμεν καί εἰς δεύτερον πρόβλημα RIEMANN μέ μίαν ἄγνωστον συνάρτησιν πέραν τοῦ προβλήματος (24), διότι ἔχομεν δύο ἀγνώστους συναρτήσεις. Πρός τοῦτο χρησιμοποιοῦντες τήν μέθοδον τῆς § 10 πολλαπλασιάζομεν τήν ὁριακήν συνθήκην (6α) ἐπί προσδιοριστέαν σταθεράν λ καί προσθέτομεν ἀκολούθως κατά μέλη τάς ὁριακάς συνθήκας (6) λαμβάνοντες:

$$(\lambda\Phi_1+\Omega_2)^+ +(\Phi_2+\lambda\Omega_1)^-=(\lambda\sigma_y^++\sigma_y^-)-i(\lambda\tau_{xy}^++\tau_{xy}^-). \tag{26}$$

'Η ὁριακή συνθήκη (26) λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν σχέσεων (8) καί (9) γράφεται:

$$\left[\frac{(\lambda\mu_1-\kappa_1\mu_2)F_1+(\lambda+1)F_2}{\kappa_1\mu_2+\mu_1}\right]^+ + \left[\frac{(-\lambda\kappa_2\mu_1+\mu_2)F_1+(\lambda+1)F_2}{\kappa_2\mu_1+\mu_2}\right]^- =$$

$$=(\lambda\sigma_y^++\sigma_y^-)-i(\lambda\tau_{xy}^++\tau_{xy}^-). \tag{27}$$

Τό πρόβλημα ὁριακῶν συνθηκῶν (27) καθίσταται πρόβλημα RIEMANN μέ μίαν ἄγνωστον συνάρτησιν, ἐάν εἶναι λ=-1, ὁπότε ἀγόμεθα εἰς τό πρόβλημα (24) ὁριακῶν συνθηκῶν, ἤ ἐάν εἶναι:

$$\lambda\mu_1-\kappa_1\mu_2=-\lambda\kappa_2\mu_1+\mu_2, \tag{28}$$

ὁπότε λαμβάνομεν:

$$\lambda=\frac{\mu_2}{\mu_1}\cdot\frac{1+\kappa_1}{1+\kappa_2}=\Gamma\frac{1+\kappa_1}{1+\kappa_2}. \tag{29}$$

./.

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τόν ὁρισμόν (II) τῆς σταθερᾶς m, τήν τιμήν (29) τῆς σταθερᾶς λ, θέτοντες δέ:

$$R(t)=\frac{\mu_2(1+\kappa_1)(\sigma_y^+-i\tau_{xy}^+)+\mu_1(1+\kappa_2)(\sigma_y^--i\tau_{xy}^-)}{\kappa_2\mu_1+\mu_2} \tag{30}$$

καί:

$$H(z)=\frac{\mu_1\mu_2[1-\kappa_1\kappa_2]F_1(z)+[\mu_1(1+\kappa_2)+\mu_2(1+\kappa_1)]F_2(z)}{(\kappa_1\mu_2+\mu_1)(\kappa_2\mu_1+\mu_2)} \tag{31}$$

λαμβάνομεν ἐκ τῆς ὁριακῆς συνθήκης (27) τό ἑξῆς πρόβλημα RIEMANN ἐπί τῆς ρωγμῆς L:

$$H^++mH^-=R(t), \tag{32}$$

ἡ λύσις τοῦ ὁποίου εἶναι:

$$H(z)=\frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L\frac{X(t)R(t)}{t-z}dt+\frac{C_0z+C_1}{X(z)}, \tag{33}$$

ἔνθα ἐτέθη:

$$X(z)=(z+a)^{\frac{1}{2}-i\beta}\cdot(z-a)^{\frac{1}{2}+i\beta}, \tag{34}$$

ἔνθα ἡ σταθερά β εἶναι:

$$\beta=\frac{\ln m}{2\pi}, \tag{35}$$

οὖσα καί αὐτή χαρακτηριστικόν μέγεθος τοῦ συστήματος τῶν δύο μέσων (1) καί (2). Αἱ σταθεραί C_0 καί C_1 θά προσδιορισθοῦν, ὡς κατωτέρω ἐκτίθεται.

Ἡ συνάρτησις $F_2(Z)$ ἐκ τῆς σχέσεως (31) ἐκφράζεται συναρτήσει τῆς $H(Z)$ ὡς ἑξῆς:

$$F_2(z)=\frac{-\mu_1\mu_2(1-\kappa_1\kappa_2)F_1(z)+(\kappa_1\mu_2+\mu_1)(\kappa_2\mu_1+\mu_2)H(z)}{\mu_1(1+\kappa_2)+\mu_2(1+\kappa_1)}. \tag{36}$$

Δι'ἀντικαταστάσεως εἰς τάς σχέσεις (8) καί (9) τῆς συναρτήσεως $F_2(Z)$ βάσει τῆς ἀνωτέρω σχέσεως (36) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι διά $y>0$:

$$\Phi_1(z)=\frac{\mu_1(1+\kappa_2)F_1(z)+(\mu_2+\mu_1\kappa_2)H(z)}{\mu_1(1+\kappa_2)+\mu_2(1+\kappa_1)}, \tag{37α}$$

$$\Omega_2(z)=\frac{-\mu_2(1+\kappa_1)F_1(z)+(\mu_2+\mu_1\kappa_2)H(z)}{\mu_1(1+\kappa_2)+\mu_2(1+\kappa_1)} \tag{37β}$$

/

καί διά $y<0$:

$$\Phi_2(z)=\frac{\mu_2(1+\kappa_1)F_1(z)+(\mu_1+\mu_2\kappa_1)H(z)}{\mu_1(1+\kappa_2)+\mu_2(1+\kappa_1)}\,, \tag{38α}$$

$$\Omega_1(z)=\frac{-\mu_1(1+\kappa_2)F_1(z)+(\mu_1+\mu_2\kappa_1)H(z)}{\mu_1(1+\kappa_2)+\mu_2(1+\kappa_1)}\,. \tag{38β}$$

Αἱ σχέσεις (37) καί (38) δίδουν τήν λύσιν τοῦ προβλήματός μας συναρτήσει τῶν βοηθητικῶν συναρτήσεων $F_1(Z)$ καί $H(Z)$ ὁριζομένωνἐκ τῶν σχέσεων (25) καί (33) συναρτήσει τῶν δεδομένων τάσεων ἐπί τῆς ρωγμῆς, αἱ δέ εἰς τήν σχέσιν (33) ὑπεισερχόμεναι σταθεραί C_0 καί C_1 προσδιορίζονται ὡς ἑξῆς:

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τάς σχέσεις (13α), (15α) καί (37α) δι'$|Z|\to\infty$ ἔχομεν:

$$\Gamma_1=\frac{\mu_1(1+\kappa_2)(\Gamma_1-\bar{\Gamma}_2-\bar{\Gamma}_2')+(\mu_2+\mu_1\kappa_2)C_0}{\mu_1(1+\kappa_2)+\mu_2(1+\kappa_1)}\,, \tag{39α}$$

ἀπό ὅπου εὑρίσκομεν:

$$C_0=\frac{\Gamma_1\mu_2(1+\kappa_1)+(\bar{\Gamma}_2+\bar{\Gamma}_2')\mu_1(1+\kappa_2)}{\mu_2+\mu_1\kappa_2}\,. \tag{39β}$$

'Επίσης ἐκ τῶν συνθηκῶν (21) εἰς τό ἄπειρον ἡ μέν πρώτη πληροῦται αὐτομάτως ὑπό τῆς συναρτήσεως (25) τῆς διδούσης τήν συνάρτησιν $F_1(Z)$, ἐάν ληφθῇ ὑπ'ὄψιν καί ἡ σχέσις (18), ἡ δέ δευτέρα ἀπαιτεῖ λόγῳ τῆς σχέσεως(36) ὡς καί τῶν (10.39) καί (10.42) ὅπως ληφθῇ:

$$-\mu_1\mu_2(1-\kappa_1\kappa_2)f_1+(\mu_1+\kappa_1\mu_2)(\mu_2+\kappa_2\mu_1)(2i\beta C_0+C_1)=0\,, \tag{40α}$$

ἤ τελικῶς λόγῳ καί τῆς (21):

$$C_1=\frac{\mu_1\mu_2(1-\kappa_1\kappa_2)(X+iY)}{2\pi(\mu_1+\kappa_1\mu_2)(\mu_2+\kappa_2\mu_1)}-2i\beta C_0\,, \tag{40β}$$

ὅπου ἡ σταθερά C_0 δίδεται ἐκ τοῦ τύπου (29β).

12δ.Τό Δεύτερον Θεμελιῶδες Πρόβλημα.

Δίδονται εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προ-

./.

βλήματος αἱ μετατοπίσεις u^+, u^-, v^+ καί v^- ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς, αἱ τάσεις καί αἱ περιστροφαί εἰς τό ἄπειρον ἱκανοποιοῦσαι τάς ὁριακάς συνθήκας (Ι6) ὡς καί αἱ συνιστῶσαι (X,Y) τῆς συνισταμένης δυνάμεως ἐπί τῆς ρωγμῆς. Ἡ λύσις τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος εἶναι ἀνάλογος πρός τήν λύσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος.

Ἰσχύουν ἐν προκειμένῳ αἱ ὁριακαί συνθῆκαι (7). Ἀφαιροῦντες ταύτας κατά μέλη λαμβάνομεν:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa_1}{\mu_1}\varphi_1+\frac{1}{\mu_2}\Omega_2\right)^+-\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa_2}{\mu_2}\varphi_2+\frac{1}{\mu_1}\Omega_1\right)^-=u^{+\prime}-u^{-\prime}+i(v^{+\prime}-v^{-\prime}). \quad (41)$$

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τόν ὁρισμόν (4β) τῆς συναρτήσεως $F_2(Z)$ καί θέτοντες:

$$f(t)=2\mu_1\mu_2[u^{+\prime}-u^{-\prime}+i(v^{+\prime}-v^{-\prime})] \quad (42)$$

γράφομεν τήν σχέσιν (41) ὑπό τήν μορφήν τοῦ ἑξῆς ἁπλουστάτου προβλήματος RIEMANN ἐπί τῆς ρωγμῆς L:

$$F_2^+-F_2^-=f(t), \quad (43)$$

ἡ λύσις τοῦ ὁποίου λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν καί τῆς συνθήκης(Ι5β) λόγῳ τῆς φορτίσεως εἰς τό ἄπειρον εἶναι:

$$F_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)}{t-z}\,dt+\kappa_2\mu_1\Gamma_2+\mu_2(\bar{\Gamma}_1+\bar{\Gamma}_1'). \quad (44)$$

Ἐκ τῶν δύο ὁριακῶν συνθηκῶν (7) πρέπει νά φθάσωμεν καί εἰς δεύτερον πρόβλημα RIEMANN μέ μίαν ἄγνωστον συνάρτησιν πέραν τοῦ προβλήματος (43), διότι ἔχομεν δύο ἀγνώστους συναρτήσεις. Πρός τοῦτο χρησιμοποιοῦντες τήν μέθοδον τῆς § ΙΟ πολλαπλασιάζομεν τήν ὁριακήν συνθήκην (7α) ἐπί προσδιοριστέαν σταθεράν λ καί προσθέτομεν ἀκολούθως κατά μέλη τάς ὁριακάς συνθήκας (7) λαμβάνοντες:

$$(\lambda\kappa_1\mu_2\varphi_1-\mu_1\Omega_2)^++(\kappa_2\mu_1\varphi_2-\lambda\mu_2\Omega_1)^-=2\mu_1\mu_2[\lambda u^{+\prime}+u^{-\prime}+i(\lambda v^{+\prime}+v^{-\prime})]. \quad (45)$$

'Η όριακή συνθήκη (45) λαμβανομένων ύπ'ὄψιν τῶν σχέσεων (8) καί (9) γράφεται:

$$\left[\frac{\kappa_1\mu_1\mu_2(1+\lambda)F_1+(\lambda\kappa_1\mu_2-\mu_1)F_2}{\kappa_1\mu_2+\mu_1}\right]^{+}+\left[\frac{\kappa_2\mu_1\mu_2(1+\lambda)F_1+(\kappa_2\mu_1-\lambda\mu_2)F_2}{\kappa_2\mu_1+\mu_2}\right]^{-}=$$

$$=2\mu_1\mu_2\left[\lambda u^{+\prime}+u^{-\prime}+i(\lambda v^{+\prime}+v^{-\prime})\right]. \qquad (46)$$

Τό πρόβλημα όριακῶν συνθηκῶν (46) καθίσταται πρόβλημα RIEMANN μέ μίαν ἄγνωστον συνάρτησιν, ἐάν εἶναι: $\lambda=-1$, ὁπότε άγόμεθα εἰς τό πρόβλημα (43) όριακῶν συνθηκῶν, ἤ ἐάν εἶναι:

$$\frac{\lambda\kappa_1\mu_2-\mu_1}{\kappa_2\mu_1-\lambda\mu_2}=\frac{\kappa_1}{\kappa_2}, \qquad (47)$$

ὁπότε λαμβάνομεν:

$$\lambda=\frac{\kappa_2\mu_1(1+\kappa_1)}{\kappa_1\mu_2(1+\kappa_2)}. \qquad (48)$$

Λαμβάνοντες ύπ'ὄψιν τόν όρισμόν (II) τῆς σταθερᾶς m, τήν τιμήν (48) τῆς σταθερᾶς λ, θέτοντες δέ:

$$h(t)=\frac{\kappa_2\mu_1(1+\kappa_1)(u^{+\prime}+iv^{+\prime})+\kappa_1\mu_2(1+\kappa_2)(u^{-\prime}+iv^{-\prime})}{\kappa_1(\kappa_2\mu_1+\mu_2)} \qquad (49)$$

καί:

$$H(z)=\frac{[\kappa_2\mu_1(1+\kappa_1)+\kappa_1\mu_2(1+\kappa_2)]F_1(z)-[1-\kappa_1\kappa_2]F_2(z)}{2(\kappa_1\mu_2+\mu_1)(\kappa_2\mu_1+\mu_2)} \qquad (50)$$

λαμβάνομεν ἐκ τῆς όριακῆς συνθήκης (46) τό ἑξῆς πρόβλημα RIEMANN ἐπί τῆς ρωγμῆς L:

$$H^{+}+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}mH^{-}=h(t), \qquad (51)$$

ἡ λύσις τοῦ ὁποίου δίδεται πάλιν ἐκ τῶν τύπων (33) καί (34), ἔνθα ἡ σταθερά β εἶναι:

$$\beta=\frac{\ln\left[\frac{\kappa_2}{\kappa_1}m\right]}{2\pi}, \qquad (52)$$

οὖσα καί αὐτή χαρακτηριστικόν μέγεθος τοῦ συστήματος τῶν δύο μέσων (I) καί (2). Αἱ σταθεραί C_0 καί C_1 θά προσδιορισθοῦν, ὡς κατωτέρω ἐκτίθεται.

'Η συνάρτησις $F_1(Z)$ ἐκ τῆς σχέσεως (50) ἐκφράζεται συναρτήσει τῆς $H(Z)$ ὡς ἑξῆς:

$$F_1(z)=\frac{(1-\kappa_1\kappa_2)F_2(z)+2(\kappa_1\mu_2+\mu_1)(\kappa_2\mu_1+\mu_2)H(z)}{\kappa_2\mu_1(1+\kappa_1)+\kappa_1\mu_2(1+\kappa_2)}. \tag{53}$$

Δι'ἀντικαταστάσεως εἰς τάς σχέσεις (8) καί (9) τῆς συναρτήσεως $F_1(Z)$ βάσει τῆς ἀνωτέρω σχέσεως (53) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι διά $y>0$:

$$\Phi_1(z)=\frac{(1+\kappa_2)F_2(z)+2\mu_1(\kappa_2\mu_1+\mu_2)H(z)}{\kappa_2\mu_1(1+\kappa_1)+\kappa_1\mu_2(1+\kappa_2)}, \tag{54α}$$

$$\Omega_2(z)=\frac{\kappa_2(1+\kappa_1)F_2(z)-2\kappa_1\mu_2(\kappa_2\mu_1+\mu_2)H(z)}{\kappa_2\mu_1(1+\kappa_1)+\kappa_1\mu_2(1+\kappa_2)} \tag{54β}$$

καί διά $y<0$:

$$\Phi_2(z)=\frac{(1+\kappa_1)F_2(z)+2\mu_2(\kappa_1\mu_2+\mu_1)H(z)}{\kappa_2\mu_1(1+\kappa_1)+\kappa_1\mu_2(1+\kappa_2)}, \tag{55α}$$

$$\Omega_1(z)=\frac{\kappa_1(1+\kappa_2)F_2(z)-2\kappa_2\mu_1(\kappa_1\mu_2+\mu_1)H(z)}{\kappa_2\mu_1(1+\kappa_1)+\kappa_1\mu_2(1+\kappa_2)}. \tag{55β}$$

Αἱ σχέσεις (54) καί (55) δίδουν τήν λύσιν τοῦ προβλήματός μας συναρτήσει τῶν βοηθητικῶν συναρτήσεων $F_2(Z)$ καί $H(Z)$ ὁριζομένων ἐκ τῶν σχέσεων (44) καί (33), τῇ βοηθείᾳ καί τῶν (34) καί (52), συναρτήσει τῶν δεδομένων μετατοπίσεων ἐπί τῆς ρωγμῆς, αἱ δέ εἰς τήν σχέσιν (33) ὑπεισερχόμεναι σταθεραί C_o καί C_1 προσδιορίζονται ὡς ἑξῆς:

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τάς σχέσεις (Ι3α),(Ι5β) καί (54α) δι'$/Z/\rightarrow\infty$ ἔχομεν:

$$\Gamma_1=\frac{(1+\kappa_2)[\kappa_2\mu_1\Gamma_2+\mu_2(\bar{\Gamma}_1+\bar{\Gamma}_1')]+2\mu_1(\kappa_2\mu_1+\mu_2)C_o}{\kappa_2\mu_1(1+\kappa_1)+\kappa_1\mu_2(1+\kappa_2)}, \tag{56}$$

ἀπό ὅπου εὑρίσκομεν:

$$C_o=\frac{[\kappa_2\mu_1(1+\kappa_1)+\kappa_1\mu_2(1+\kappa_2)]\Gamma_1-(1+\kappa_2)[\kappa_2\mu_1\Gamma_2+\mu_2(\Gamma_1+\bar{\Gamma}_1)]}{2\mu_1(\kappa_2\mu_1+\mu_2)}. \tag{57}$$

'Επίσης ἐκ τῶν συνθηκῶν (2Ι) εἰς τό ἄπειρον ἡ μέν δευτέρα

./.

πληροῦται αὐτομάτως ὑπό τῆς συναρτήσεως (44) τῆς διδούσης τήν $F_2(Z)$, ἐάν ληφθοῦν ὑπ'ὄψιν καί αἱ σχέσεις (9,23), ἡ δέ πρώτη ἀπαιτεῖ λόγῳ τῆς σχέσεως (53) καί τῆς (Ι0.39) ὅπως ληφθῇ:

$$\left[\kappa_2\mu_1(1+\kappa_1)+\kappa_1\mu_2(1+\kappa_2)\right]\ell_1 = 2(\kappa_1\mu_2+\mu_1)(\kappa_2\mu_1+\mu_2)(2i\beta C_0+C_1), \quad (58)$$

ἤ τελικῶς λόγῳ καί τῆς (2Ι):

$$C_1 = \frac{\left[\kappa_2\mu_1(1+\kappa_1)+\kappa_1\mu_2(1+\kappa_2)\right](X+iY)}{4\pi(\kappa_1\mu_2+\mu_1)(\kappa_2\mu_1+\mu_2)} - 2i\beta C_0, \qquad (59)$$

ὅπου ἡ σταθερά C_0 δίδεται ἐκ τοῦ τύπου (56β).

Ι2ε. Τό Τρίτον Θεμελιῶδες Πρόβλημα.

Δίδονται εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ τρίτου θεμελιώδους προβλήματος αἱ τάσεις σ_y^+ καί τ_{xy}^+ ἐπί τῆς ἄνω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς, αἱ μετατοπίσεις u^- καί v^- ἐπί τῆς κάτω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς ὡς καί ἡ συνισταμένη δύναμις (X,Y) τῶν ἐπ'ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς ἐφηρμοσμένων τάσεων ὡς καί εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος.

'Εφαρμόζοντες τάς σχέσεις (9.1β) ἐπί τῆς ἄνω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς καί (9.1γ) ἐπί τῆς κάτω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς γράφομεν:

$$\Phi_1^+ + \Omega_1^- = \sigma_y^+ - i\tau_{xy}^+, \qquad (60\alpha)$$

$$\kappa_2\Phi_2^- - \Omega_2^+ = 2\mu_2(u'^- + iv'^-). \qquad (60\beta)$$

Λαμβάνοντες ἤδη ὑπ'ὄψιν τάς ἐκφράσεις (8) καί (9) τῶν συναρτήσεων $\Phi_1(Z)$, $\Omega_1(Z)$, $\Phi_2(Z)$ καί $\Omega_2(Z)$ συναρτήσει τῶν βασικῶν συναρτήσεων $F_1(Z)$ καί $F_2(Z)$ διά τήν περίπτωσιν δύο ἰσοτρόπων μέσων βλέπομεν ὅτι τό τρίτον θεμελιῶδες πρόβλημα, ὡς καί τά προηγουμένως ἐξετασθέντα πρῶτον καί δεύτερον θεμελιώδη πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τόν προσδιορισμόν τῶν δύο συναρτήσεων

$F_i(Z)$ $(i=1,2)$ ἐξ ἑνός συστήματος δύο προβλημάτων RIEMANN ἐπί τῆς ρωγμῆς L τῆς κάτωθι μορφῆς:

$$\sum_{j=1}^{2}(a_{ij}F_j^{+}+b_{ij}F_j^{-})=g_i(t), \qquad (61)$$

ἔνθα αἱ $g_i(t)$ εἶναι συναρτήσεις τῶν ὁριακῶν τιμῶν τῶν δεδομένων τάσεων ἐπί τῆς ἄνω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς καί παραμορφώσεων ἐπί τῆς κάτω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς καί a_{ij} καί b_{ij} σταθεραί εὐκόλως προσδιοριζόμεναι, ἐάν λάβωμεν ὑπ'ὄψιν τάς σχέσεις (8), (9) καί (60).

Τό σύστημα τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (61) συμπίπτει ἀπολύτως μέ τό μελετηθέν εἰς τήν § IO σύστημα ὁριακῶν συνθηκῶν (IO.I), ὅπου καί παραπέμπομεν.

13. Ρωγμή Μεταξύ Δύο 'Ανισοτρόπων Μέσων.

13α. Γενικαί Παρατηρήσεις.

Θεωροῦμεν δύο ἡμιάπειρα ἀνισότροπα μέσα καί ρωγμήν κατά μῆκος τῆς εὐθείας συγκολλήσεως αὐτῶν, ὡς εἰς τό Σχῆμα 8, ἀκριβῶς ὡς καί διά τήν ἐξετασθεῖσαν προηγουμένως περίπτωσιν τοῦ ἀντιστοίχου προβλήματος διά δύο ἰσότροπα μέσα.

Διά τήν λύσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος διά τήν περίπτωσιν ταύτην γνωρίζομεν ὅτι ἐδημοσιεύθησαν αἱ ἑξῆς δύο ἐργασίαι:

1. Τό ἄρθρον τοῦ GOTOH (22), τό ὁποῖον διαπραγματεύεται ἐπιτυχῶς τήν γενικήν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος κατά τρόπον ὄχι πολύ κομψόν καί μέ βασικόν μειονέκτημα τῆς ἀκολουθουμένης μεθόδου ὅτι ἐκ τῶν δύο ἀναζητουμένων μιγαδικῶν συναρτήσεων $\Lambda_1(W)$ καί $\Lambda_2(W)$ ἀπαιτεῖται, μετά τήν εὕρεσιν τῆς $\Lambda_1(W)$, ἡ εἰσαγωγή τῶν ἀκολούθως ὑπολογισθησομένων ὁριακῶν τιμῶν ταύτης παρά τάς πλευράς τῆς ρωγμῆς εἰς ἀρκετά πολυπλόκους τύπους πρός προσδιορισμόν περαιτέρω τῆς συναρτήσεως $\Lambda_2(W)$. 'Ο τρόπος ἐργασίας οὗτος ἐμφανίζει ἐπίσης τό μειονέκτημα ὅτι δέν δύναται νά γενικευθῇ διά τήν περίπτωσιν τοῦ τρίτου θεμελιώδους προβλήματος, ὅπου οὐδεμία τῶν συναρτήσεων $\Lambda_1(W)$ καί $\Lambda_2(W)$ δύναται νά εὑρεθῇ πρώτη καί ὕστερα ἐκ τῶν ὁριακῶν τιμῶν ταύτης καί συναρτήσει τούτων νά προσδιορισθῇ ἡ ἑτέρα τῶν συναρτήσεων $\Lambda_1(W)$ καί $\Lambda_2(W)$.

2. Τό ἄρθρον τοῦ CLEMENTS (7), ἔνθα κατά ὡραιότατον τρόπον ἐπιλύεται ἡ περίπτωσις τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος διά ρωγμήν μεταξύ δύο ἀνισοτρόπων μέσων μέ μόνον περιορισμόν ὅτι ὑπετέθη ὅτι αἱ τάσεις καί ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς εἶναι αἱ αὐταί μέ ἀποτέλεσμα τήν ὕπαρξιν συμμετρίας εἰς τό πρό-

./.

βλημα καθιστῶσαν ἁπλουστέραν τήν λύσιν του.

Κατωτέρω θά δώσωμεν τήν λύσιν τοῦ προβλήματος τῆς ρωγμῆς μεταξύ δύο ἀνισοτρόπων μέσων διά τάς περιπτώσεις καίτῶν τριῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων γενικεύοντες τήν ἀκολουθουμένην εἰς τό ἄρθρον τοῦ CLEMENTS μέθοδον. Ὁ τρόπος οὗτος ἐργασίας συμπίπτει σχεδόν πλήρως μέ τήν πορεῖαν, ἥτις ἠκολουθήθη διά τήν περίπτωσιν τῶν δύο ἰσοτρόπων μέσων. Ἐπίσης θά θεωρήσωμεν φόρτισιν εἰς τό ἄπειρον καί θά εὕρωμεν τάς συνθήκας τάς ὑφισταμένας μεταξύ τῶν τάσεων καί τῶν περιστροφῶν εἰς τό ἄπειρον εἰς τά δύο μέσα, τοῦ ἄνω καί τοῦ κάτω ἡμιεπιπέδου, ἐπεκτείνοντες οὕτω καί κατά τό σημεῖον τοῦτο τάς λύσεις τάς διδομένας εἰς τά δύο προαναφερθέντα ἄρθρα, ὅπου ἐθεωρήθη ἡ φόρτισις εἰς τό ἄπειρον μηδενική, καίτοι πολλάς φοράς εἶναι ἡ μόνη ὑπάρχουσα.

13β. Αἱ Βασικαί Σχέσεις.

Ὡς καί διά τήν περίπτωσιν τῶν δύο ἰσοτρόπων μέσων, θεωροῦμεν τήν ρωγμήν: $-a < x < a$ καταλαμβάνουσαν τό τμῆμα L τῆς διαχωριστικῆς εὐθείας $y=0$ τῶν δύο ἡμιεπιπέδων (1) καί (2), τά ὁποῖα δι' $|x| \geqslant a$ εἶναι συνηνωμένα πλήρως μεταξύ των (Σχῆμα 8). Διά τό τελευταῖον τοῦτο τμῆμα L^* τοῦ ἄξονος $0x$ αἱ μεταβιβαζόμεναι τάσεις ἀπό τοῦ ἑνός ἡμιεπιπέδου εἰς τό ἄλλο, δηλαδή αἱ κάθετοι καί αἱ διατμητικαί τάσεις, εἶναι αἱ αὐταί. Ἐπίσης αἱ μετατοπίσεις ἐπί τῆς L^* εἶναι αἱ αὐταί θεωρούμεναι τόσον εἰς τό ἕν ἡμιεπίπεδον ὅσον καί εἰς τό ἕτερον.

Ἔστωσαν $s_{11}, s_{21}, p_{11}, p_{21}, q_{11}$ καί q_{21} αἱ σταθεραί τοῦ μέσου (1) καί $s_{12}, s_{22}, p_{12}, p_{22}, q_{12}$ καί q_{22} αἱ σταθεραί τοῦ μέσου (2) αἱ ὑπεισερχόμεναι εἰς τούς τύπους (11.1) καί (11.2) ἐν γένει ἰσχύοντας διά τά ἀνισότροπα μέσα.

./.

'Επί τῆς L^* θά ἰσχύουν κατά τά ἀνωτέρω αἱ ἑξῆς σχέσεις:

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^-\ ,\ \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-\ ,\ u^{+\prime} = u^{-\prime}\ ,\ v^{+\prime} = v^{-\prime}, \qquad (1)$$

αἵτινες λόγῳ τῶν τύπων (11.1) καί (11.2) γράφονται καί ὡς ἑξῆς:

$$\varphi_1^+ + \psi_1^+ + \overline{\Phi}_1^- + \overline{\Psi}_1^- = \varphi_2^- + \psi_2^- + \overline{\Phi}_2^+ + \overline{\Psi}_2^+ , \qquad (2\alpha)$$

$$s_{11}\varphi_1^+ + s_{21}\psi_1^+ + \bar{s}_{11}\overline{\Phi}_1^- + \bar{s}_{21}\overline{\Psi}_1^- = s_{12}\varphi_2^- + s_{22}\psi_2^- + \bar{s}_{12}\overline{\Phi}_2^+ + \bar{s}_{22}\overline{\Psi}_2^+ , \qquad (2\beta)$$

$$p_{11}\varphi_1^+ + p_{21}\psi_1^+ + \bar{p}_{11}\overline{\Phi}_1^- + \bar{p}_{21}\overline{\Psi}_1^- = p_{12}\varphi_2^- + p_{22}\psi_2^- + \bar{p}_{12}\overline{\Phi}_2^+ + \bar{p}_{22}\overline{\Psi}_2^+ , \qquad (2\gamma)$$

$$q_{11}\varphi_1^+ + q_{21}\psi_1^+ + \bar{q}_{11}\overline{\Phi}_1^- + \bar{q}_{21}\overline{\Psi}_1^- = q_{12}\varphi_2^- + q_{22}\psi_2^- + \bar{q}_{12}\overline{\Phi}_2^+ + \bar{q}_{22}\overline{\Psi}_2^+ . \qquad (2\delta)$$

Αἱ σχέσεις (2) γράφονται καί ὡς ἑξῆς:

$$(\varphi_1 + \psi_1 - \overline{\Phi}_2 - \overline{\Psi}_2)^+ = (\varphi_2 + \psi_2 - \overline{\Phi}_1 - \overline{\Psi}_1)^- , \qquad (3\alpha)$$

$$(s_{11}\varphi_1 + s_{21}\psi_1 - \bar{s}_{12}\overline{\Phi}_2 - \bar{s}_{22}\overline{\Psi}_2)^+ = (s_{12}\varphi_2 + s_{22}\psi_2 - \bar{s}_{11}\overline{\Phi}_1 - \bar{s}_{21}\overline{\Psi}_1)^- , \qquad (3\beta)$$

$$(p_{11}\varphi_1 + p_{21}\psi_1 - \bar{p}_{12}\overline{\Phi}_2 - \bar{p}_{22}\overline{\Psi}_2)^+ = (p_{12}\varphi_2 + p_{22}\psi_2 - \bar{p}_{11}\overline{\Phi}_1 - \bar{p}_{21}\overline{\Psi}_1)^- , \qquad (3\gamma)$$

$$(q_{11}\varphi_1 + q_{21}\psi_1 - \bar{q}_{12}\overline{\Phi}_2 - \bar{q}_{22}\overline{\Psi}_2)^+ = (q_{12}\varphi_2 + q_{22}\psi_2 - \bar{q}_{11}\overline{\Phi}_1 - \bar{q}_{21}\overline{\Psi}_1)^- . \qquad (3\delta)$$

Ἤδη θέτομεν:

$$F_1(z) = \begin{cases} \varphi_1(z) + \psi_1(z) - \overline{\Phi}_2(z) - \overline{\Psi}_2(z) & ,\ \delta\iota\acute{\alpha}:\ y>0 , \\ \varphi_2(z) + \psi_2(z) - \overline{\Phi}_1(z) - \overline{\Psi}_1(z) & ,\ \delta\iota\acute{\alpha}:\ y<0 , \end{cases} \qquad (4\alpha)$$

$$F_2(z) = \begin{cases} s_{11}\varphi_1(z) + s_{21}\psi_1(z) - \bar{s}_{12}\overline{\Phi}_2(z) - \bar{s}_{22}\overline{\Psi}_2(z) , & \delta\iota\acute{\alpha}:\ y>0 , \\ s_{12}\varphi_1(z) + s_{22}\psi_2(z) - \bar{s}_{11}\overline{\Phi}_1(z) - \bar{s}_{21}\overline{\Psi}_1(z) , & \delta\iota\acute{\alpha}:\ y<0 , \end{cases} \qquad (4\beta)$$

$$F_3(z) = \begin{cases} p_{11}\varphi_1(z) + p_{21}\psi_1(z) - \bar{p}_{12}\overline{\Phi}_2(z) - \bar{p}_{22}\overline{\Psi}_2(z) , & \delta\iota\acute{\alpha}:\ y>0 , \\ p_{12}\varphi_1(z) + p_{22}\psi_2(z) - \bar{p}_{11}\overline{\Phi}_1(z) - \bar{p}_{21}\overline{\Psi}_1(z) , & \delta\iota\acute{\alpha}:\ y<0 , \end{cases} \qquad (4\gamma)$$

$$F_4(z) = \begin{cases} q_{11}\varphi_1(z) + q_{21}\psi_1(z) - \bar{q}_{12}\overline{\Phi}_2(z) - \bar{q}_{22}\overline{\Psi}_2(z) & ,\ \delta\iota\acute{\alpha}:\ y>0 , \\ q_{12}\varphi_1(z) + q_{22}\psi_2(z) - \bar{q}_{11}\overline{\Phi}_1(z) - \bar{q}_{21}\overline{\Psi}_1(z) , & \delta\iota\acute{\alpha}\ y<0 . \end{cases} \qquad (4\delta)$$

Αἱ σχέσεις (3) λόγῳ τῶν (4) ἤδη γράφονται ἐπί τῆς L^*:

$$F_i^+ = F_i^- \quad , i = 1,2,3,4 , \qquad (5)$$

δηλαδή αἱ συναρτήσεις $F_i(z)$ πρέπει νά εἶναι ἀναλυτικαί ἐπί τῆς L^* καί συνεπῶς παρουσιάζουν ἀσυνέχειαν τῶν ὁριακῶν τιμῶν των μόνον ἐπί τῆς ρωγμῆς L.

'Υποθέτομεν ἤδη ὅτι τά δύο ἀνισότροπα μέσα (1) καί (2) εἶναι τοιαῦτα, ὥστε νά ἰσχύῃ μία τῶν κάτωθι σχέσεων (5), ὅτε ἰσχύει καί ἡ ἑτέρα, καθ'ὅσον εἶναι συζυγής τῆς πρώτης:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ s_{11} & s_{21} & \bar{s}_{12} & \bar{s}_{22} \\ p_{11} & p_{21} & \bar{p}_{12} & \bar{p}_{22} \\ q_{11} & q_{21} & \bar{q}_{12} & \bar{q}_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ s_{12} & s_{22} & \bar{s}_{11} & \bar{s}_{21} \\ p_{12} & p_{22} & \bar{p}_{11} & \bar{p}_{21} \\ q_{12} & q_{22} & \bar{q}_{11} & \bar{q}_{21} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{6}$$

ὁπότε ἐκ τῶν σχέσεων (4) δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν τάς συναρτήσεις $\Phi_k(z)$, $\Psi_k(z)$, $\bar{\Phi}_k(z)$ καί $\bar{\Psi}_k(z)$ $(k=1,2)$ συναρτήσει τῶν $F_i(z)$ $(i=1,2,3,4)$ διά τά μέσα (1) καί (2), προκύπτουν δέ οὕτως εὐκόλως αἱ ἀντίστοιχοι σχέσεις συναρτήσει τοῦ πίνακος τῶν σταθερῶν d_{ij} $(i,j=1,2,3,4)$ ὄντος ἀντιστρόφου τοῦ πίνακος:

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ s_{11} & s_{21} & -\bar{s}_{12} & -\bar{s}_{22} \\ p_{11} & p_{21} & -\bar{p}_{12} & -\bar{p}_{22} \\ q_{11} & q_{21} & -\bar{q}_{12} & -\bar{q}_{22} \end{bmatrix}, \tag{7α}$$

ἤτοι εἶναι:

$$[c_{ij}][d_{ij}] = I, \tag{7β}$$

ἔνθα διά τοῦ συμβόλου I συμβολίζομεν τόν μοναδιαῖον πίνακα. Ὑπάρχει δέ ὁ πίναξ $[d_{ij}]$ καί εἶναι ἀπολύτως καθωρισμένος λόγῳ τῆς ὑποθέσεως (6).

Συνεπῶς λόγω τῶν σχέσεων (4) λαμβάνομεν τάς ἑξῆς σχέσεις διά $y>0$:

$$\Phi_1(z) = \sum_{i=1}^{4} d_{1i} F_i(z), \tag{8α}$$

$$\Psi_1(z) = \sum_{i=1}^{4} d_{2i} F_i(z), \tag{8β}$$

$$\bar{\Phi}_2(z) = \sum_{i=1}^{4} d_{3i} F_i(z), \tag{8γ}$$

$$\bar{\Psi}_2(z) = \sum_{i=1}^{4} d_{4i} F_i(z) \tag{8δ}$$

καί διά $y<0$:

$$\bar{\Phi}_1(z) = -\sum_{i=1}^{4} \bar{d}_{1i} F_i(z), \tag{9α}$$

$$\bar{\Psi}_1(z) = -\sum_{i=1}^{4} \bar{d}_{2i} F_i(z), \tag{9β}$$

$$\Phi_2(z) = -\sum_{i=1}^{4} \bar{d}_{3i} F_i(z), \tag{9γ}$$

$$\Psi_2(z) = -\sum_{i=1}^{4} \bar{d}_{4i} F_i(z). \tag{9δ}$$

Αἱ σχέσεις (8) καί (9) εἶναι συμβιβασταί μεταξύ των,ἐάν ληφθῇ ὑπ'ὄψιν ὅτι λόγῳ τῶν ὁρισμῶν (4) τῶν συναρτήσεων $F_i(z)$ $(i=1,2,3,4)$ ἔχομεν:

$$F_i(z,y<0)=-\overline{F}_i(z,y>0). \qquad (10)$$

Πρός λύσιν κατωτέρω τῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων διά τήν ἐξεταζομένην περίπτωσιν θά εὑρίσκωμεν πρῶτον τάς συναρτήσεις $F_i(z)$,αἵτινες εἶναι,ὡς προελέχθη, ἀναλυτικαί ἐφ'ὅλου τοῦ ἐπιπέδου πλήν τῶν σημείων τῆς ρωγμῆς L, ἔνθα ἐπαληθεύουν ὡρισμένας ὁριακάς συνθήκας, ἐν συνεχείᾳ δέ, βάσει τῶν σχέσεων(8) ἤ (9), θά δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν τάς συναρτήσεις $\Phi_k(z)$ καί $\Psi_k(z)$ $(k=1,2)$, αἵτινες καθορίζουν πλήρως τήν ἐντατικήν κατάστασιν εἰς τά μέσα (1) καί (2).

Κατά τήν λύσιν τῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων κατωτέρω θεωροῦμεν ὅτι ὑφίσταται φόρτισις εἰς τό ἄπειρον, ὁπότε αἱ συναρτήσεις $\Phi_k(z)$, $\Psi_k(z)$ $(k=1,2)$ καί κατά συνέπειαν καί αἱ συναρτήσεις $F_i(z)$ $(i=1,2,3,4)$ τείνουν πρός σταθεράς τιμάς δι'$|z|\to\infty$.

I3γ. Αἱ Συνθῆκαι 'Απείρως Μακράν τῆς Ρωγμῆς.

'Ως καί διά τήν περίπτωσιν τῆς ρωγμῆς μεταξύ δύο ἰσοτρόπων μέσων τήν ἐξετασθεῖσαν εἰς τήν § I2, εἰς τάς συνθήκας ἀπείρως μακράν τῆς ρωγμῆς ὑπεισέρχονται τά μεγέθη X,Y, $\sigma_{x1\infty}$, $\sigma_{x2\infty}$, $\sigma_{y\infty}$, $\tau_{xy\infty}$, $\varepsilon_{1\infty}$ καί $\varepsilon_{2\infty}$.

Συμφώνως πρός τά ἀναφερθέντα εἰς τό προηγούμενον ἐδάφιον αἱ βασικαί συναρτήσεις διά τό ἐξεταζόμενον πρόβλημα τῆς ρωγμῆς μεταξύ δύο ἀνισοτρόπων μέσων εἶναι αἱ $F_i(z)$ $(i=1,2,3,4)$ ὁριζόμεναι ἐκ τῶν σχέσεων (4), καθ'ὅσον αὗται εἶναι ἀναλυτικαί ἐφ'ὅλου τοῦ ἐπιπέδου ἐκτός τῆς ρωγμῆς.Δι'$|z|\to\infty$ θά ἔχουν

./.

τάς ἑξῆς ὁριακάς ἐκφράσεις ἀναλόγους τῶν (II.6) δι'ἕν ἀνισότροπον μέσον:

$$F_i(z)=F_{i\infty}+\frac{f_i}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\quad,\ i=1,2,3,4. \tag{11}$$

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τάς ἐκ τῶν βασικῶν σχέσεων (II.I) προκυπτούσας συνθήκας (II.9β-δ) διά τάς τάσεις εἰς τό ἄπειρον,ὡς καί τήν ἐκ τῆς σχέσεως ὁρισμοῦ τῆς περιστροφῆς:

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{12α}$$

καί τῶν βασικῶν σχέσεων (II.2) προκύπτουσαν σχέσιν:

$$\varepsilon_\infty=\frac{1}{2}\left[(q_1-s_1p_1)\Phi_\infty+(\bar q_1-\bar s_1\bar p_1)\bar\Phi_\infty+(q_2-s_2p_2)\Psi_\infty+(\bar q_2-\bar s_2\bar p_2)\bar\Psi_\infty\right] \tag{12β}$$

τήν παρέχουσαν τήν περιστροφήν εἰς τό ἄπειρον θά ἔχωμεν τελικῶς διά τά δύο ἀνισότροπα μέσα: 1 διά $y>0$ καί 2 διά $y<0$ τάς ἑξῆς συνθήκας εἰς τό ἄπειρον μέ $j=1,2$:

$$s_{1j}^2\Phi_{j\infty}+\bar s_{1j}^2\bar\Phi_{j\infty}+s_{2j}^2\Psi_{j\infty}+\bar s_{2j}^2\bar\Psi_{j\infty}=\sigma_{xj\infty}\,, \tag{13α}$$

$$\Phi_{j\infty}+\bar\Phi_{j\infty}+\Psi_{j\infty}+\bar\Psi_{j\infty}=\sigma_{y\infty}\,, \tag{13β}$$

$$s_{1j}\Phi_{j\infty}+\bar s_{1j}\bar\Phi_{j\infty}+s_{2j}\Psi_{j\infty}+\bar s_{2j}\bar\Psi_{j\infty}=-\tau_{xy\infty}\,, \tag{13γ}$$

$$(s_{1j}p_{1j}-q_{1j})\Phi_{j\infty}+(\bar s_{1j}\bar p_{1j}-\bar q_{1j})\bar\Phi_{j\infty}+(s_{2j}p_{2j}-q_{2j})\Psi_{j\infty}+(\bar s_{2j}\bar p_{2j}-\bar q_{2j})\bar\Psi_{j\infty}=-2\varepsilon_{j\infty}. \tag{13δ}$$

Ἐκ τούτων αἱ (13β-γ) πληροῦνται πάντοτε, ἐάν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ τάσεις $\sigma_{y\infty}$ καί $\tau_{xy\infty}$ εἶναι αἱ αὐταί καί διά τά δύο ἀνισότροπα μέσα, αἱ δέ συναρτήσεις $F_1(z)$ καί $F_2(z)$ ὁριζόμεναι βάσει τῶν σχέσεων (4α-β) εἶναι ἀναλυτικαί εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου ἤ,κατά ἁπλουστέραν διατύπωσιν, ὅτι αἱ συνθῆκαι (13β-γ) ἐθεωρήθησαν ἰσχύουσαι ἐξ ἀρχῆς κατά τήν ἀνάπτυξιν τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου, ἥτις ὡδήγησεν εἰς τάς σχέσεις (4).

Πάντως, διά νά ἴδωμεν πλήρως εἰς ἕν ὡρισμένον πρόβλημα ἐάν πληρῶνται αἱ σχέσεις (13),ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμεν τά μεγέθη $\sigma_{xj\infty}$, $\sigma_{y\infty}$, $\tau_{xy\infty}$ καί $\varepsilon_{j\infty}$ διά τά μέσα $j=1,2$ εἰς τάς σχέσεις (13) καί προσδιορίζομεν λύοντες τό συστήμα-

./.

τα τῶν τεσσάρων τούτων ἐξισώσεων τάς τιμάς τῶν $\Phi_{j\infty}, \overline{\Phi}_{j\infty}, \Psi_{j\infty}$ καί $\overline{\Psi}_{j\infty}$,αἱ ὁποῖαι εἰσαγόμεναι περαιτέρω εἰς τάς σχέσεις(4) μᾶς δίδουν τάς τιμάς τῶν $F_{i\infty}$ ($i=1,2,3,4$) προσδιοριζομένων τόσον συναρτήσει τῶν μεγεθῶν $\Phi_{1\infty}, \Psi_{1\infty}, \overline{\Phi}_{2\infty}$ καί $\overline{\Psi}_{2\infty}$ ὅσον καί συναρτήσει τῶν μεγεθῶν $\Phi_{2\infty}, \Psi_{2\infty}, \overline{\Phi}_{1\infty}$ καί $\overline{\Psi}_{1\infty}$. Ἐκ τούτων αἱ μέν τιμαί τῆς $F_{1\infty}$ ὡς καί τῆς $F_{2\infty}$ συμπίπτουν, συμφώνως πρός ὅσα ἀνεφέρθησαν προηγουμένως, ἐνῷ αἱ τιμαί τῆς $F_{3\infty}$, ὡς καί τῆς $F_{4\infty}$,ἐξισούμεναι μᾶς δίδουν δύο συνθήκας, αἵτινες πρέπει νά πληρῶνται μεταξύ τῶν τάσεων καί περιστροφῶν εἰς τό ἄπειρον διά τά δύο μέσα .

Σημειοῦμεν τέλος ὅτι, ὡς καί διά τήν περίπτωσιν τῶν δύο ἰσοτρόπων μέσων, ἡ φυσική σημασία τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δύο προκυπτουσῶν κατά τά ἀνωτέρω συνθηκῶν εἶναι ὅτι ἡ παραμόρφωσις ε_x πρέπει νά εἶναι συνεχής κατά μῆκος τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος εἰς τό ἄπειρον διά τά δύο ἰσότροπα μέσα, τοῦτο δέ ὁδηγεῖ εἰς ἁπλουστάτην ἔκφρασιν τῆς συνθήκης ταύτης συναρτήσει τῶν ἐλαστικῶν συντελεστῶν τῶν δύο ἀνισοτρόπων μέσων, ἀναλόγου πρός τήν συνθήκην (I2.I6α) διά τά δύο ἰσότροπα μέσα.

Περαιτέρω, ὅσον ἀφορᾷ εἰς τόν προσδιορισμόν τῶν σταθερῶν f_i τῶν ἀναπτυγμάτων (II) τῶν συναρτήσεων $F_i(z)$ εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐπί τῆς ρωγμῆς L, λόγῳ τῶν βασικῶν τύπων (II.I) καί (II.2) ὡς καί τῶν σχέσεων(4) ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων $F_i(z)$, θά ἔχωμεν τάς ἑξῆς σχέσεις:

$$F_1^+ - F_1^- = \sigma_y^+ - \sigma_y^- , \tag{14α}$$

$$F_2^+ - F_2^- = -\tau_{xy}^+ + \tau_{xy}^- , \tag{14β}$$

$$F_3^+ - F_3^- = u^{+\prime} - u^{-\prime} , \tag{14γ}$$

$$F_4^+ - F_4^- = v^{+\prime} - v^{-\prime} . \tag{14δ}$$

Ἐκ τούτων διά τήν συνισταμένην δύναμιν (X,Y) τήν ἐξασκουμένην ἐπί τῆς ρωγμῆς θά ἔχωμεν:

./.

$$Y=\int_L(\sigma_y^+-\sigma_y^-)\,dt=\int_L(F_1^+-F_1^-)\,dt\,, \qquad (15\alpha)$$
$$-X=\int_L(-\tau_{xy}^++\tau_{xy}^-)\,dt=\int_L(F_2^+-F_2^-)\,dt\,, \qquad (15\beta)$$

διά νά ἐξασφαλίσωμεν δέ τό μονοσήμαντον τῶν μετατοπίσεων ἤ, ὑπό πλέον φυσικήν ἔκφρασιν, ἐπειδή αἱ μεταβολαί τῶν μετατοπίσεων ἀπό τοῦ ἑνός εἰς τό ἕτερον ἄκρον τῆς ρωγμῆς θά πρέπη νά εἶναι αἱ αὐταί μετρούμεναι εἴτε ἐπί τῆς ἄνω εἴτε ἐπί τῆς κάτω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς, θά ἔχωμεν:

$$\int_L(u^{+\prime}-u^{-\prime})\,dt=\int_L(F_3^+-F_3^-)\,dt=0\,, \qquad (16\alpha)$$
$$\int_L(v^{+\prime}-v^{-\prime})\,dt=\int_L(F_4^+-F_4^-)\,dt=0. \qquad (16\beta)$$

Δεδομένου δέ ὅτι αἱ συναρτήσεις $F_i(z)$ εἶναι ἀναλυτικαί ἐφ' ὅλου τοῦ ἐπιπέδου πλήν τῆς ρωγμῆς θεωροῦντες τόν ἄπειρον κύκλον L_0 τόν περιβάλλοντα τήν ρωγμήν θά ἔχωμεν συμφώνως πρός τό θεώρημα τοῦ CAUCHY:

$$\int_{L_0}F_i(t)\,dt=-\int_L(F_i^+-F_i^-)\,dt\,,\; i=1,2,3,4\,, \qquad (17)$$

καί λόγῳ τῶν ἀναπτυγμάτων κατά LAURENT (II) τῶν συναρτήσεων $F_i(z)$ εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου, λαμβάνοντες δέ ὑπ' ὄψιν καί τάς σχέσεις (I5) καί (I6) θά ἔχωμεν τελικῶς:

$$f_1=-\frac{Y}{2\pi i}\,,\; f_2=\frac{X}{2\pi i}\,,\; f_3=f_4=0\,, \qquad (18)$$

ὁπότε, ἔχοντες καθορίσει πλήρως τήν συμπεριφοράν τῶν συναρτήσεων $F_i(z)$ εἰς τό ἄπειρον κατά τούς τύπους (II) διά τῆς κατά τά ἀνωτέρω εὑρέσεως τῶν μεγεθῶν $F_{i\infty}$ καί f_i, δυνάμεθα νά προχωρήσωμεν περαιτέρω εἰς τήν λύσιν τῶν τριῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων.

I3δ. Τά Τρία Θεμελιώδη Προβλήματα.

Εἰς τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα δίδονται αἱ τάσεις σ_y^+, σ_y^-, τ_{xy}^+ καί τ_{xy}^- ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς L, εἰς τό δεύτερον θεμελιῶδες πρόβλημα δίδονται αἱ μετατοπίσεις u^+,

u^-, v^+ καί v^- ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς ὡς καί ἡ συνισταμένη δύναμις (X,Y) τῶν τάσεων τῶν ἐφηρμοσμένων ἐπ'ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς, εἰς δέ τό τρίτον θεμελιῶδες πρόβλημα δίδονται αἱ τάσεις σ_y^+ καί τ_{xy}^+ ἐπί τῆς ἄνω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς καί αἱ μετατοπίσεις u^- καί v^- ἐπί τῆς κάτω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς ὡς καί ἡ συνισταμένη δύναμις (X,Y) τῶν ἐπ'ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς ἐφηρμοσμένων τάσεων ὡς καί εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος.

'Εφαρμόζοντες τάς σχέσεις (2.1β), (2.1γ),(2.2α) καί(2.2β) ἐπί τῆς ἄνω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς γράφομεν:

$$\Phi_1^+ + \Psi_1^+ + \overline{\Phi}_1^- + \overline{\Psi}_1^- = \sigma_y^+ , \tag{19α}$$

$$s_{11}\Phi_1^+ + s_{21}\Psi_1^+ + \bar{s}_{11}\overline{\Phi}_1^- + \bar{s}_{21}\overline{\Psi}_1^- = -\tau_{xy}^+ , \tag{19β}$$

$$p_{11}\Phi_1^+ + p_{21}\Psi_1^+ + \bar{p}_{11}\overline{\Phi}_1^- + \bar{p}_{21}\overline{\Psi}_1^- = u^{+\prime} , \tag{19γ}$$

$$q_{11}\Phi_1^+ + q_{21}\Psi_1^+ + \bar{q}_{11}\overline{\Phi}_1^- + \bar{q}_{21}\overline{\Psi}_1^- = v^{+\prime} , \tag{19δ}$$

ἐπί δέ τῆς κάτω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς:

$$\Phi_2^- + \Psi_2^- + \overline{\Phi}_2^+ + \overline{\Psi}_2^+ = \sigma_y^- , \tag{20α}$$

$$s_{12}\Phi_2^- + s_{22}\Psi_2^- + \bar{s}_{12}\overline{\Phi}_2^+ + \bar{s}_{22}\overline{\Psi}_2^+ = -\tau_{xy}^- , \tag{20β}$$

$$p_{12}\Phi_2^- + p_{22}\Psi_2^- + \bar{p}_{12}\overline{\Phi}_2^+ + \bar{p}_{22}\overline{\Psi}_2^+ = u^{-\prime} , \tag{20γ}$$

$$q_{12}\Phi_2^- + q_{22}\Psi_2^- + \bar{q}_{12}\overline{\Phi}_2^+ + \bar{q}_{22}\overline{\Psi}_2^+ = v^{-\prime} . \tag{20δ}$$

Εἰς τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα ἔχομεν τάς ὁριακάς συνθήκας (Ι9α), (Ι9β), (20α) καί (20β), εἰς τό δεύτερον θεμελιῶδες πρόβλημα τάς (Ι9γ), (Ι9δ),(20γ) καί (20δ) καί εἰς τό τρίτον θεμελιῶδες πρόβλημα τάς (Ι9α),(Ι9β),(20γ) καί (20δ),λαμβάνοντες δέ ὑπ'ὄψιν καί τάς σχέσεις (8) καί (9) βλέπομεν ὅτι καί τά τρία θεμελιώδη προβλήματα ἀνάγονται εἰς τόν προσδιορισμόν τῶν τεσσάρων συναρτήσεων $F_i(z)$ $(i=1,2,3,4)$ ἐξ ἑνός συστήματος τεσσάρων προβλημάτων RIEMANN ἐπί τῆς ρωγμῆς L τῆς κά-

./.

τωθι μορφῆς:

$$\sum_{j=1}^{4}(a_{ij}F_j^{+}+b_{ij}F_j^{-})=g_i(t),\quad i=1,2,3,4, \qquad (21)$$

ἔνθα $g_i(t)$ εἶναι αἱ ὁριακαί τιμαί τῶν τάσεων ἤ παραμορφώσεων αἱ δεδομέναι ἐπί τῆς ἄνω ἤ ἐπί τῆς κάτω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς ἀναλόγως τοῦ θεμελιώδους προβλήματος καί a_{ij} καί b_{ij} σταθεραί εὐκόλως προσδιοριζόμεναι, ἐάν λάβωμεν ὑπ'ὄψιν τάς σχέσεις (8), (9), (I9) καί (20).

Τό σύστημα τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (I3) συμπίπτει ἀπολύτως μέ τό μελετηθέν εἰς τήν § IO σύστημα ὁριακῶν συνθηκῶν (23), ὅπου καί παραπέμπομεν. Σημειοῦμεν μόνον ὅτι, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν σχέσεων (21), διά μέν τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος θά προκύψουν αἱ σχέσεις:

$$F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\sigma_y^{+}-\sigma_y^{-}}{t-z}\,dt+C_1, \qquad (22\alpha)$$

$$F_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{-\tau_{xy}^{+}+\tau_{xy}^{-}}{t-z}\,dt+C_2, \qquad (22\beta)$$

διά δέ τήν περίπτωσιν τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος αἱ σχέσεις:

$$F_3(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{u^{+\prime}-u^{-\prime}}{t-z}\,dt+C_3, \qquad (23\alpha)$$

$$F_4(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{v^{+\prime}-v^{-\prime}}{t-z}\,dt+C_4, \qquad (23\beta)$$

αἵτινες ἀποτελοῦν τάς λύσεις τῶν δύο ἐκ τῶν τεσσάρων δι'ἑκάστην περίπτωσιν προβλημάτων ὁριακῶν συνθηκῶν, εἰς τά ὁποῖα διά τῆς μεθόδου τῆς § IO καταλήγομεν.

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι οἱ τύποι (22) ἱκανοποιοῦν τάς προηγουμένως εὑρεθείσας συνθήκας (18). Αἱ σταθεραί C_1 καί C_2 ἤ αἱ C_3 καί C_4 θά προσδιορισθοῦν κατά τά ἐκτεθέντα εἰς τό προηγούμενον ἐδάφιον.

I4. Ρωγμή Μεταξύ ἑνός Ἰσοτρόπου καί ἑνός Ἀνισοτρόπου Μέσου.

I4α. Γενικαί Παρατηρήσεις.

Θεωροῦμεν ἤδη, ὡς εἰς τό Σχῆμα 8, τήν ρωγμήν κατά μῆκος τῆς εὐθείας συγκολλήσεως ἑνός ἰσοτρόπου μέσου (1) καταλαμβάνοντος τό ἡμιεπίπεδον μέ $y > 0$ καί ἑνός ἀνισοτρόπου μέσου καταλαμβάνοντος τό ἡμιεπίπεδον μέ $y < 0$.

Περί τοῦ προβλήματος τούτου εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος ἄνευ φορτίσεως εἰς τό ἄπειρον καί μέ συμμετρικήν φόρτισιν ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς ἠσχολήθη ὁ CLEMENTS (8) δώσας ἐπιτυχῆ λύσιν, φαίνεται δέ ὅτι ἄλλαι σχετικαί ἐργασίαι δέν ἔχουν δημοσιευθῆ.

Κατωτέρω θά πραγματευθῶμεν τήν λύσιν καί τῶν τριῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων λαμβάνοντες προσέτι ὑπ'ὄψιν καί φόρτισιν εἰς τό ἄπειρον καί μή θεωροῦντες συμμετρικήν τήν φόρτισιν εἰς τάς δύο πλευράς τῆς ρωγμῆς, ὅτε ἡ λύσις θά ἡπλουστεύετο σημαντικῶς. Ἡ ἀκολουθουμένη μέθοδος ἐργασίας εἶναι κατά τινα τρόπον ἀνάλογος ἐκείνης, τήν ὁποίαν ἐχρησιμοποιήσαμεν διά τήν περίπτωσιν τῶν δύο ἀνισοτρόπων ἡμιεπιπέδων, τά δέ ἀποτελέσματα δίδονται πάλιν ὑπό κλειστήν, καίτοι ἀρκετά πολύπλοκον,μορφήν.

I4β. Αἱ Βασικαί Σχέσεις.

Ὡς καί διά τάς προηγουμένως ἐξετασθείσας περιπτώσεις τῶν δύο ἰσοτρόπων μέσων καί τῶν δύο ἀνισοτρόπων μέσων θεωροῦμεν τήν ρωγμήν: $-a < x < a$ καταλαμβάνουσαν τό τμῆμα L τῆς διαχωριστικῆς εὐθείας $y = 0$ τῶν δύο ἡμιεπιπέδων (1) καί (2), τά ὁποῖα δι' $|x| \geqslant a$ εἶναι συνηνωμένα πλήρως μεταξύ των (Σχῆμα 8). Διά τό τελευταῖον τοῦτο τμῆμα L^{+} τοῦ ἄξονος Ox αἱ μεταβιβαζόμεναι τάσεις ἀπό τοῦ ἑνός ἡμιεπιπέδου εἰς τό ἄλλο, δηλαδή αἱ

./.

κάθετοι καί αἱ διατμητικαί τάσεις, εἶναι αἱ αὐταί. Ἐπίσης αἱ μετατοπίσεις ἐπί τῆς L^* εἶναι αἱ αὐταί θεωρούμεναι τόσον εἰς τό ἕν ἡμιεπίπεδον ὅσον καί εἰς τό ἕτερον.

Ἔστωσαν μ καί κ αἱ σταθεραί τοῦ ἰσοτρόπου μέσου (1) καί s_1, s_2, p_1, p_2, q_1 καί q_2 αἱ σταθεραί τοῦ ἀνισοτρόπου μέσου (2) αἱ ὑπεισερχόμεναι εἰς τούς τύπους (9.1) ἐν γένει ἰσχύοντας διά τά ἰσότροπα μέσα **καί** (11.1) καί (11.2) ἐν γένει ἰσχύοντας διά τά ἀνισότροπα μέσα ἀντιστοίχως.

Ἐπί τῆς L^* θά ἰσχύουν κατά τά ἀνωτέρω αἱ ἑξῆς σχέσεις:

$$\sigma_y^+ - i\tau_{xy}^+ = \sigma_y^- - i\tau_{xy}^-, \quad u^{+\prime} + iv^{+\prime} = u^{-\prime} + iv^{-\prime}, \tag{1}$$

αἵτινες λόγῳ τῶν τύπων (9.1), (11.1) καί (11.2) γράφονται καί ὡς ἑξῆς:

$$\Phi_1^+ + \Omega_1^- = (1+is_1)\Phi_2^- + (1+i\bar{s}_1)\overline{\Phi}_2^+ + (1+is_2)\Psi_2^- + (1+i\bar{s}_2)\overline{\Psi}_2^+, \tag{2α}$$

$$\frac{1}{\mu}(\kappa\Phi_1^+ - \Omega_1^-) = (p_1+iq_1)\Phi_2^- + (\bar{p}_1+i\bar{q}_1)\overline{\Phi}_2^+ + (p_2+iq_2)\overline{\Psi}_2 + (\bar{p}_2+i\bar{q}_2)\overline{\Psi}_2^+. \tag{2β}$$

Αἱ σχέσεις (2) γράφονται καί ὡς ἑξῆς:

$$\left[\Phi_1 - (1+i\bar{s}_1)\overline{\Phi}_2 - (1+i\bar{s}_2)\overline{\Psi}_2\right]^+ = \left[-\Omega_1 + (1+is_1)\Phi_2 + (1+is_2)\Psi_2\right]^-, \tag{3α}$$

$$\left[\frac{\kappa}{\mu}\Phi_1 - (\bar{p}_1+i\bar{q}_1)\overline{\Phi}_2 - (\bar{p}_2+i\bar{q}_2)\overline{\Psi}_2\right]^+ = \left[\frac{1}{\mu}\Omega_1 + (p_1+iq_1)\Phi_2 + (p_2+iq_2)\Psi_2\right]^-. \tag{3β}$$

Ἤδη θέτομεν:

$$F_1(z) = \begin{cases} \Phi_1(z) - (1+i\bar{s}_1)\overline{\Phi}_2(z) - (1+i\bar{s}_2)\overline{\Psi}_2(z), & \text{διά: } y>0, \\ -\Omega_1(z) + (1+is_1)\Phi_2(z) + (1+is_2)\Psi_2(z), & \text{διά: } y<0, \end{cases} \tag{4α}$$

$$F_2(z) = \begin{cases} \frac{\kappa}{\mu}\Phi_1(z) - (\bar{p}_1+i\bar{q}_1)\overline{\Phi}_2(z) - (\bar{p}_2+i\bar{q}_2)\overline{\Psi}_2(z), & \text{διά: } y>0, \\ \frac{1}{\mu}\Omega_1(z) + (p_1+iq_1)\Phi_2(z) + (p_2+iq_2)\Psi_2(z), & \text{διά: } y<0. \end{cases} \tag{4β}$$

Αἱ σχέσεις (3) λόγῳ τῶν (4) ἤδη γράφονται ἐπί τῆς L^*:

$$F_i^+ = F_i^-, \quad i=1,2, \tag{5}$$

δηλαδή αἱ συναρτήσεις $F_i(Z)$ πρέπει νά εἶναι ἀναλυτικαί ἐπί τῆς L^* καί συνεπῶς παρουσιάζουν ἀσυνεχείας τῶν ὁριακῶν τιμῶν των μόνον ἐπί τῆς ρωγμῆς L.

Ὑποθέτομεν ἤδη ὅτι τά δύο μέσα, τό ἰσότροπον (1) καί τό ἀνισότροπον (2) εἶναι τοιαῦτα, ὥστε νά ἰσχύῃ ἡ κάτωθι σχέσις (6α):

./.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -(1-is_1) & -(1-is_2) \\ 0 & -1 & 1+is_1 & 1+is_2 \\ \frac{\kappa}{\mu} & 0 & -(p_1-iq_1) & -(p_2-iq_2) \\ 0 & \frac{1}{\mu} & p_1+iq_1 & p_2+iq_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{6α}$$

ἥτις γράφεται καί ὑπό τήν μορφήν:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & is_1 & is_2 \\ -\frac{\kappa}{\mu} & \frac{1}{\mu} & p_1 & p_2 \\ \frac{\kappa}{\mu} & \frac{1}{\mu} & iq_1 & iq_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{6β}$$

ὁπότε ἐκ τῶν σχέσεων (4) δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν τάς συναρτήσεις $\Phi_1(z)$, $\Omega_1(z)$, $\Phi_2(z)$ καί $\Psi_2(z)$ συναρτήσει τῶν $F_i(z)$ καί $\overline{F}_i(z)$, καθ'ὅσον προκύπτει εὐθύς ἐκ τῶν σχέσεων (4) τό ἑξῆς σύστημα ἐξισώσεων:

$$\overline{\Phi}_1(z)-(1-is_1)\Phi_2(z)-(1-is_2)\Psi_2(z)=\overline{F}_1(z), \tag{7α}$$

$$-\Omega_1(z)+(1+is_1)\Phi_2(z)+(1+is_2)\Psi_2(z)=F_1(z), \tag{7β}$$

$$\frac{\kappa}{\mu}\overline{\Phi}_1(z)-(p_1-iq_1)\Phi_2(z)-(p_2-iq_2)\Psi_2(z)=\overline{F}_2(z), \tag{7γ}$$

$$\frac{1}{\mu}\Omega_1(z)+(p_1+iq_1)\Phi_2(z)+(p_2+iq_2)\Psi_2(z)=F_2(z), \tag{7δ}$$

ἤ τό σύστημα τῶν συζυγῶν ἐξισώσεων, ὁπότε, λόγῳ καί τοῦ περιορισμοῦ (6), ἐάν εὕρωμεν τάς συναρτήσεις $F_i(z)$, δυνάμεθα περαιτέρω ἐκ τῶν σχέσεων (7) νά εὕρωμεν καί τάς $\Phi_1(z)$, $\Omega_1(z)$, $\Phi_2(z)$ καί $\Psi_2(z)$, τῶν μέν $\Phi_1(z)$ καί $\Omega_1(z)$ ἀναφερομένων εἰς τό ἰσότροπον ἡμιεπίπεδον, τῶν δέ $\Phi_2(z)$ καί $\Psi_2(z)$ εἰς τό ἀνισότροπον ἡμιεπίπεδον. Ἐπίσης δέ αἱ μέν συναρτήσεις $\Phi_1(z)$, $\overline{\Phi}_2(z)$ καί $\overline{\Psi}_2(z)$ νοοῦνται κυρίως διά $y>0$, αἱ δέ συναρτήσεις $\Omega_1(z)$, $\Phi_2(z)$ καί $\Psi_2(z)$ νοοῦνται κυρίως διά $y<0$, λόγῳ τῶν βασικῶν τύπων (9.1), (11.1) καί (11.2).

Οὕτω κατά τήν λύσιν κατωτέρω τῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων διά τήν ἐξεταζομένην περίπτωσιν θά εὑρίσκωμεν πρῶτον τάς συναρ-

./.

τήσεις $F_i(z)$, αἵτινες εἶναι, ὡς προελέχθη, ἀναλυτικαί ἐφ' ὅλου τοῦ ἐπιπέδου πλήν τῶν σημείων τῆς ρωγμῆς L, ἔνθα ἐπαληθεύουν ὡρισμένας ὁριακάς συνθήκας, ἐν συνεχείᾳ δέ, βάσει τῶν σχέσεων (7) ἤ τῶν συζυγῶν αὐτῶν, θά δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν τάς συναρτήσεις $\Phi_1(z)$, $\Omega_1(z)$, $\Phi_2(z)$ καί $\Psi_2(z)$, αἵτινες καθορίζουν πλήρως τήν ἐντατικήν κατάστασιν εἰς τά μέσα (1) καί (2).

Κατά τήν λύσιν τῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων κατωτέρω θεωροῦμεν ὅτι ὑφίσταται φόρτισις εἰς τό ἄπειρον, ὁπότε αἱ συναρτήσεις $\Phi_1(z)$, $\Omega_1(z)$, $\Phi_2(z)$ καί $\Omega_2(z)$ καί κατά συνέπειαν καί αἱ συναρτήσεις $F_i(z)$ $(i=1,2)$ τείνουν πρός σταθεράς τιμάς δι' $/z/\to\infty$.

14γ. Αἱ Συνθῆκαι 'Απείρως Μακράν τῆς Ρωγμῆς.

'Ως καί διά τάς περιπτώσεις τῆς ρωγμῆς μεταξύ δύο ἰσοτρόπων μέσων καί μεταξύ δύο ἀνισοτρόπων μέσων τάς ἐξετασθείσας εἰς τήν § 12 καί τήν § 13 ἀντιστοίχως, εἰς τάς συνθήκας ἀπείρως μακράν τῆς ρωγμῆς ὑπεισέρχονται τά μεγέθη X, Y, $\sigma_{x1\infty}$, $\sigma_{x2\infty}$, $\tau_{xy\infty}$, $\varepsilon_{1\infty}$ καί $\varepsilon_{2\infty}$.

Συμφώνως πρός τά ἀναφερθέντα εἰς τό προηγούμενον ἐδάφιον αἱ βασικαί συναρτήσεις διά τό ἐξεταζόμενον πρόβλημα τῆς ρωγμῆς μεταξύ δύο ἀνισοτρόπων μέσων εἶναι αἱ $F_i(z)$ $(i=1,2)$ ὁριζόμεναι ἐκ τῶν σχέσεων (4), καθ'ὅσον αὗται εἶναι ἀναλυτικαί ἐφ'ὅλου τοῦ ἐπιπέδου ἐκτός τῆς ρωγμῆς. Δι'$/z/\to\infty$ θά ἔχουν τάς ἑξῆς ὁριακάς ἐκφράσεις ἀναλόγους τῶν (9.3) δι'ἕν ἰσότροπον μέσον ἤ τῶν (11.6) δι'ἕν ἀνισότροπον μέσον:

$$F_i(z) = F_{i\infty} + \frac{k_i}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad , i=1,2 . \qquad (8)$$

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τάς ἐκ τῶν βασικῶν σχέσεων (9.1) προκυπτούσας συνθήκας (12.13) διά τάς τάσεις καί τήν περιστροφήν

./.

εἰς τό ἄπειρον τοῦ ἰσοτρόπου μέσου $j=1$ καί τάς ἐκ τῶν βασικῶν σχέσεων (11.1) καί (13.12) προκυπτούσας συνθήκας (13.13) διά τάς τάσεις καί τήν περιστροφήν εἰς τό ἄπειρον τοῦ ἀνισοτρόπου μέσου $j=2$, συνάγομεν τάς ἑξῆς συνθήκας εἰς τό ἄπειρον:

$$4\Phi_{1\infty}=\sigma_{x1\infty}+\sigma_{y\infty}+i\,\frac{8\mu\varepsilon_{1\infty}}{1+\kappa_1}, \tag{9α}$$

$$s_1^2\Phi_{2\infty}+\bar{s}_1^2\bar{\Phi}_{2\infty}+s_2^2\Psi_{2\infty}+\bar{s}_2^2\bar{\Psi}_{2\infty}=\sigma_{x2\infty}, \tag{9β}$$

$$\Phi_{1\infty}+\Omega_{1\infty}=(1+is_1)\Phi_{2\infty}+(1+i\bar{s}_1)\bar{\Phi}_{2\infty}+(1+is_2)\Psi_{2\infty}+(1+i\bar{s}_2)\bar{\Psi}_{2\infty}=\sigma_{y\infty}-i\tau_{xy\infty}, \tag{9γ}$$

$$(s_1p_1-q_1)\Phi_{2\infty}+(\bar{s}_1\bar{p}_1-\bar{q}_1)\bar{\Phi}_{2\infty}+(s_2p_2-q_2)\Psi_{2\infty}+(\bar{s}_2\bar{p}_2-\bar{q}_2)\bar{\Psi}_{2\infty}=-2\varepsilon_{2\infty}. \tag{9δ}$$

Ἐκ τούτων ἡ (9γ) πληροῦται πάντοτε, ἐάν ληφθῇ ὑπ'ὄψιν ὅτι αἱ τάσεις $\sigma_{y\infty}$ καί $\tau_{xy\infty}$ εἶναι αἱ αὐταί καί διά τά δύο ἀνισότροπα μέσα, ἡ δέ συνάρτησις $F_1(z)$ ὁριζομένη βάσει τῆς σχέσεως (4α) εἶναι ἀναλυτική εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου ἤ, κατά ἁπλουστέραν διατύπωσιν, ὅτι ἡ συνθήκη (9γ) ἐθεωρήθη ἰσχύουσα ἐξ ἀρχῆς κατά τήν ἀνάπτυξιν τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου, ἥτις ὡδήγησεν εἰς τάς σχέσεις (4).

Πάντως, διά νά ἴδωμεν πλήρως εἰς ἕν ὡρισμένον πρόβλημα ἐάν πληρῶνται αἱ σχέσεις (9), ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμεν τά μεγέθη $\sigma_{xj\infty}$, $\sigma_{y\infty}$, $\tau_{xy\infty}$ καί $\varepsilon_{j\infty}$ διά τά μέσα $j=1,2$ εἰς τάς σχέσεις (9) καί προσδιορίζομεν ἐκ μέν τῶν σχέσεων (9α,γ) τάς τιμάς τῶν $\Phi_{1\infty}$ καί $\Omega_{1\infty}$, ἐκ δέ τῶν σχέσεων (9β–δ) τάς τιμάς τῶν $\Phi_{2\infty}$ καί $\Psi_{2\infty}$ λύοντες τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων τούτων ὡς καί τῆς συζυγοῦς τῆς (9γ) μέ ἀγνώστους τά $\Phi_{2\infty}$, $\bar{\Phi}_{2\infty}$, $\Psi_{2\infty}$ καί $\bar{\Psi}_{2\infty}$. Περαιτέρω εἰσάγοντες τάς οὕτω εὑρεθείσας τιμάς τῶν $\Phi_{1\infty}$, $\Omega_{1\infty}$, $\Phi_{2\infty}$ καί $\Psi_{2\infty}$ εἰς τάς σχέσεις (4) λαμβάνομεν τάς τιμάς τῶν $F_{i\infty}$ $(i=1,2)$ προσδιοριζομένων τόσον συναρτήσει τῶν μεγεθῶν $\Phi_{1\infty}$, $\bar{\Phi}_{2\infty}$ καί $\bar{\Psi}_{2\infty}$ ὅσον καί συναρτήσει τῶν μεγεθῶν $\Omega_{1\infty}$, $\bar{\Phi}_{2\infty}$ καί $\bar{\Psi}_{2\infty}$. Ἐκ τούτων αἱ μέν τιμαί τῆς $F_{1\infty}$ συμπίπτουν, συμφώνως πρός ὅσοι ἀνεφέρθησαν προηγουμένως, ἐνῷ αἱ τιμαί τῆς

./.

$F_{2\infty}$ ἐξισούμεναι, θεωρουμένων δέ περαιτέρω τῶν ἰσοτήτων τῶν πραγματικῶν ὡς καί τῶν φανταστικῶν μερῶν αὐτῶν, μᾶς δίδουν δύο συνθήκας, αἵτινες πρέπει νά πληρῶνται μεταξύ τῶν τάσεων καί τῶν περιστροφῶν εἰς τό ἄπειρον διά τά δύο μέσα.

Σημειοῦμεν τέλος ὅτι, ὡς καί διά τάς περιπτώσεις τῶν δύο ἰσοτρόπων καί τῶν δύο ἀνισοτρόπων μέσων, ἡ φυσική σημασία τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δύο προκυπτουσῶν κατά τά ἀνωτέρω συνθηκῶν εἶναι ὅτι ἡ παραμόρφωσις ε_x πρέπει νά εἶναι συνεχής κατά μῆκος τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος εἰς τό ἄπειρον διά τό ἰσότροπον καί τό ἀνισότροπον μέσον, τοῦτο δέ ὁδηγεῖ εἰς ἁπλουστάτην ἔκφρασιν τῆς συνθήκης ταύτης συναρτήσει τῶν ἐλαστικῶν συντελεστῶν τῶν δύο μέσων ἀναλόγως πρός τήν συνθήκην (12.16α) διά τά δύο ἰσότροπα μέσα.

Περαιτέρω, ὅσον ἀφορᾷ εἰς τόν προσδιορισμόν τῶν σταθερῶν f_i τῶν ἀναπτυγμάτων (8) τῶν συναρτήσεων $F_i(z)$ εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐπί τῆς ρωγμῆς L, λόγω τῶν βασικῶν τύπων (9.1), (11.1) καί (11.2) ὡς καί τῶν σχέσεων (4) ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων $F_i(z)$, θά ἔχωμεν τάς ἑξῆς σχέσεις:

$$F_1^+ - F_1^- = (\sigma_y^+ - \sigma_y^-) - i(\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-), \tag{10α}$$

$$F_2^+ - F_2^- = (u'^+ - u'^-) + i(v'^+ - v'^-). \tag{10β}$$

Ἐκ τούτων διά τήν συνισταμένην δύναμιν (X,Y) τήν ἐξασκουμένην ἐπί τῆς ρωγμῆς θά ἔχωμεν:

$$X+iY=\int_L [i(\sigma_y^+ - \sigma_y^-) + (\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-)]dt = i\int_L (F_1^+ - F_1^-)dt, \tag{11}$$

διά νά ἐξασφαλίσωμεν δέ τό μονοσήμαντον τῶν μετατοπίσεων ἤ, ὑπό πλέον φυσικήν ἔκφρασιν, ἐπειδή αἱ μεταβολαί τῶν μετατοπίσεων ἀπό τοῦ ἑνός εἰς τό ἕτερον ἄκρον τῆς ρωγμῆς θά πρέπῃ νά εἶναι αἱ αὐταί μετρούμεναι εἴτε ἐπί τῆς ἄνω εἴτε ἐπί

./.

τῆς κάτω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς, θά ἔχωμεν:

$$\int_L [(u^{+\prime}-u^{-\prime})+i(v^{+\prime}-v^{-\prime})]dt=\int_L (F_2^+-F_2^-)dt=0. \qquad (12)$$

Δεδομένου δέ ὅτι αἱ συναρτήσεις $F_i(Z)$ εἶναι ἀναλυτικαί ἐφ' ὅλου τοῦ ἐπιπέδου πλήν τῆς ρωγμῆς θεωροῦντες τόν ἄπειρον κύκλον L_0 τόν περιβάλλοντα τήν ρωγμήν θά ἔχωμεν συμφώνως πρός τό θεώρημα τοῦ CAUCHY:

$$\int_{L_0} F_i(t)dt=-\int_L (F_i^+-F_i^-)dt \quad , i=1,2, \qquad (13)$$

καί λόγῳ τῶν ἀναπτυγμάτων κατά LAURENT (11) τῶν συναρτήσεων $F_i(Z)$ εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου, λαμβάνοντες δέ ὑπ' ὄψιν καί τάς σχέσεις (11) καί (12) θά ἔχωμεν τελικῶς:

$$f_1=\frac{X+iY}{2\pi} \quad , f_2=0, \qquad (14)$$

ὁπότε, ἔχοντες καθορίσει πλήρως τήν συμπεριφοράν τῶν συναρτήσεων $F_i(Z)$ εἰς τό ἄπειρον κατά τούς τύπους (8) διά τῆς κατά τά ἀνωτέρω εὑρέσεως τῶν μεγεθῶν $F_{i\infty}$ καί f_i, δυνάμεθα νά προχωρήσωμεν περαιτέρω εἰς τήν λύσιν τῶν τριῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων.

I4δ. Τά Τρία Θεμελιώδη Προβλήματα.

Εἰς τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα δίδονται αἱ τάσεις σ_y^+, σ_y^-, τ_{xy}^+ καί τ_{xy}^- ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς L, εἰς τό δεύτερον θεμελιῶδες πρόβλημα δίδονται αἱ μετατοπίσεις u^+, u^-, v^+ καί v^- ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς ὡς καί ἡ συνισταμένη δύναμις (X,Y) τῶν τάσεων τῶν ἐφηρμοσμένων ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς, εἰς δέ τό τρίτον θεμελιῶδες πρόβλημα δίδονται αἱ τάσεις σ_y^+ καί τ_{xy}^+ ἐπί τῆς ἄνω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς καί αἱ μετατοπίσεις u^- καί v^- ἐπί τῆς κάτω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς ὡς καί ἡ συνισταμένη δύναμις (X,Y) τῶν ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς ἐφηρμοσμένων τάσεων ὡς καί εἰς τήν περίπτω-

./.

σιν τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος.

'Εφαρμόζοντες τάς σχέσεις (9.1β-γ) ἐπί τῆς ἄνω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς γράφομεν:

$$\Phi_1^+ + \Omega_1^- = \sigma_y^+ - i\tau_{xy}^+ , \tag{15α}$$

$$\kappa\Phi_1^+ - \Omega_1^- = 2\mu\,(u^{+\prime} + i v^{+\prime}) . \tag{15β}$$

'Επίσης ἐφαρμόζοντες τάς σχέσεις (11.1β-γ) καί (11.2) ἐπί τῆς κάτω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς γράφομεν:

$$\Phi_2^- + \Psi_2^- + \overline{\Phi}_2^+ + \overline{\Psi}_2^+ = \sigma_y^- , \tag{16α}$$

$$s_1\Phi_2^- + s_2\Psi_2^- + \bar{s}_1\overline{\Phi}_2^+ + \bar{s}_2\overline{\Psi}_2^+ = -\tau_{xy}^- , \tag{16β}$$

$$p_1\Phi_2^- + p_2\Psi_2^- + \bar{p}_1\overline{\Phi}_2^+ + \bar{p}_2\overline{\Psi}_2^+ = u^{-\prime} , \tag{16γ}$$

$$q_1\Phi_2^- + q_2\Psi_2^- + \bar{q}_1\overline{\Phi}_2^+ + \bar{q}_2\overline{\Psi}_2^+ = v^{-\prime} . \tag{16δ}$$

Εἰς τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα ἔχομεν τάς ὁριακάς συνθήκας (Ι5α) καί (Ι6α-β), εἰς τό δεύτερον θεμελιῶδες πρόβλημα τάς (Ι5β) καί (Ι6γ-δ) καί εἰς τό τρίτον θεμελιῶδες πρόβλημα τάς (Ι5α) καί (Ι6γ-δ), λαμβάνοντες δέ ὑπ'ὄψιν ὅτι βάσει τῶν σχέσεων (7) δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν τάς ὁριακάς συνθήκας(Ι5) καί (Ι6) συναρτήσει τῶν ὁριακῶν τιμῶν τῶν συναρτήσεων $F_i\,(z)$ καί $\overline{F}_i\,(z)$ $(i=1,2)$, ὡς ἐπίσης καί τό γεγονός ὅτι ἑκάστη τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (Ι5) ἰσοδυναμεῖ εἰς τήν πραγματικότητα μέ δύο ὁριακάς συνθήκας, καθ'ὅσον δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν καί τήν συζυγῆ ταύτης, πρᾶγμα τό ὁποῖον δέν συμβαίνει βεβαίως μέ τάς ὁριακάς συνθήκας (Ι6), τῶν ὁποίων ἀμφότερα τά μέλη εἶναι πραγματικά, βλέπομεν ὅτι καί τά τρία θεμελιώδη προβλήματα ἀνάγονται εἰς τόν προσδιορισμόν τῶν τεσσάρων συναρτήσεων $F_i\,(z)$ καί $\overline{F}_i(z)$ $(i=1,2)$ ἐξ ἑνός συστήματος τεσσάρων προβλημάτων RIEMANN ἐπί τῆς ρωγμῆς L τῆς κάτωθι μορφῆς:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(a_{ij}F_j^+ + a_{ij}^*\overline{F}_j^+ + b_{ij}F_j^- + b_{ij}^*\overline{F}_j^-\right) = g_i(t),\quad i=1,2, \tag{17}$$

ἔνθα $g_i\,(t)$ εἶναι αἱ ὁριακαί τιμαί τῶν τάσεων ἤ παραμορφώσεων αἱ δεδομέναι ἐπί τῆς ἄνω ἤ ἐπί τῆς κάτω πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς ἀναλόγως τοῦ θεμελιώδους προβλήματος καί a_{ij}, a_{ij}^*, b_{ij} καί

./.

b_{ij}^{*} σταθεραί εὐκόλως προσδιοριζόμεναι, ἐάν λάβωμεν ὑπ'ὄψιν τάς σχέσεις (7), (Ι5) καί (Ι6).

Τό σύστημα τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (Ι7) συμπίπτει ἀπολύτως μέ τό μελετηθέν εἰς τήν § ΙΟ σύστημα ὁριακῶν συνθηκῶν (23), ὅπου καί παραπέμπομεν. Σημειοῦμεν μόνον ὅτι, λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν σχέσεων (4), διά μέν τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος θά προκύψῃ ἡ σχέσις:

$$F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{(\sigma_y^+-\sigma_y^-)-i(\tau_{xy}^+-\tau_{xy}^-)}{t-z}dt+C_1, \qquad (18)$$

διά δέ τήν περίπτωσιν τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος ἡ σχέσις:

$$F_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{(u^{+\prime}-u^{-\prime})+i(v^{+\prime}-v^{-\prime})}{t-z}dt+C_2, \qquad (19)$$

αἱ ὁποῖαι σχέσεις ἀποτελοῦν τήν λύσιν τοῦ ἑνός ἐκ τῶν δύο δι' ἑκάστην περίπτωσιν προβλημάτων ὁριακῶν συνθηκῶν, εἰς τά ὁποῖα διά τῆς μεθόδου τῆς § ΙΟ καταλήγομεν.

Ι4ε. Παρατήρησις.

Συγκρίνοντες τάς δοθείσας λύσεις τῶν τριῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων καί διά τάς τρεῖς προηγουμένως ἐξετασθείσας περιπτώσεις ρωγμῆς μεταξύ δύο διαφόρων μέσων ἰσοτρόπων, ἀνισοτρόπων ἤ ἑνός ἰσοτρόπου καί ἑνός ἀνισοτρόπου μέσου παρατηροῦμεν ὅτι πάντοτε ἀναγόμεθα τελικῶς εἰς τόν ὑπολογισμόν δύο ὁλοκληρωμάτων μιᾶς τῶν κάτωθι μορφῶν:

$$\int_L \frac{f(t)}{t-z}dt \quad \text{ἤ} \quad \int_L \frac{X(t)f(t)}{t-z}dt, \qquad (20)$$

πρᾶγμα τό ὁποῖον ἴσχυεν, ὡς εἴδομεν, καί διά ρωγμήν ἐντός ὁμογενοῦς ἰσοτρόπου ἤ ἀνισοτρόπου μέσου.

Τοῦτο καθίσταται σαφές δεδομένου ὅτι, καί ὅταν ἀκόμη καταλήγωμεν εἰς σύστημα τεσσάρων προβλημάτων ὁριακῶν συνθηκῶν τύπου RIEMANN ἐπί τῆς ρωγμῆς L μέ τέσσαρας ἀγνώστους συναρτήσεις, ἀρκεῖ νά εὕρωμεν μόνον τάς δύο τούτων, καθ'ὅσον αἱ ἕτεραι δύο

./.

συνδέονται μετ'αὐτῶν δι'ἁπλουστάτων σχέσεων οὖσαι εἴτε συζυγεῖς τούτων, ὡς π.χ.συμβαίνει καί διά τά τρία θεμελιώδη προβλήματα διά ρωγμήν μεταξύ ἑνός ἰσοτρόπου καί ἑνός ἀνισοτρόπου μέσου, εἴτε ἀντίθετοι τῶν συζυγῶν τούτων, ὡς συμβαίνει καί διά τά τρία θεμελιώδη προβλήματα διά ρωγμήν μεταξύ δύο ἀνισοτρόπων μέσων, ὡς τοῦτο δηλοῦται διά τῶν σχέσεων (Ι3.Ι0).

'Επί τῇ εὐκαιρίᾳ θέλομεν ἐπί πλέον νά σημειώσωμεν ὅτι δυνάμεθα καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς ρωγμῆς μεταξύ δύο ἀνισοτρόπων μέσων νά ἐμφανίζωμεν τούς τύπους μας μέ δύο μόνον ἀγνώστους συναρτήσεις $F_i^*(z)$ $(i=1,2)$, ἐάν ἀθροίσωμεν τάς σχέσεις (2α) καί (2β), ὡς καί τάς (2γ) καί (2δ), τῶν δευτέρων τούτων ἐχουσῶν πρότερον πολλαπλασιασθῆ ἐπί τήν φανταστικήν μονάδα, ὅτε αἱ συναρτήσεις $F_i^*(z)$ $(i=1,2)$ θά δίδωνται συναρτήσει τῶν $F_i(z)$ $(i=1,2,3,4)$, ὁρισθεισῶν διά τῶν τύπων (4),διά τῶν σχέσεων:

$$F_1^*(z)=F_1(z)+iF_2(z)\ ,\quad F_2^*(z)=F_3(z)+iF_4(z)\ , \tag{21}$$

χωρίς βεβαίως, ὡς προανεφέρθη, τοῦτο νά σημαίνῃ οἰκονομίαν τινα εἰς τούς ὑπολογισμούς μας, ἀλλά μόνον τεχνητήν δημιουργίαν πολυπλόκων τύπων, τοῦτο δέ δέν ἀποτελεῖ ἐπιθυμίαν μας, ἀλλ' οὔτε καί συμβιβάζεται μέ τό πνεῦμα τῆς παρούσης ἐργασίας.

15. Συμπεράσματα.

'Εφθάσαμεν ἤδη εἰς τό πέρας τῆς παρούσης ἐργασίας μέ τήν ἐλπίδα ὅτι ἀφ'ἑνός μέν ἀντεμετωπίσαμεν κατά τρόπον ὀρθόν, καίτοι πολλάκις μή αὐστηρῶς μαθηματικόν, τά προβλήματα, μέ τά ὁποῖα ἠσχολήθημεν, ἀφ'ἑτέρου δέ ὅτι ἐδώσαμεν εἰς τόν ἀναγνώστην μίαν εἰκόνα ἀπό τήν θεωρίαν τῆς 'Ελαστικότητος καί τῶν ἐφαρμογῶν εἰς αὐτήν τῶν προβλημάτων ὁριακῶν συνθηκῶν RIEMANN.

Τά μελετηθέντα προβλήματα ρωγμῶν ἀνεπτύχθησαν ὅλα διά τῆς αὐτῆς μεθόδου καί δυνάμεθα ἤδη νά εἴπωμεν ὅτι ἡ ἐπίλυσις τῶν ἐξετασθέντων προβλημάτων ρωγμῶν μεταξύ διαφόρων μέσων ἐλάχιστα εἶναι δυσχερεστέρα τῆς τῶν προβλημάτων ρωγμῶν ἐντός τοῦ αὐτοῦ μέσου, ἀρκεῖ νά γίνῃ κατάλληλος ἐκλογή τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν δι'ἑκάστην περίπτωσιν.'Ομοίως τόσον διά τά προβλήματα ρωγμῶν ὅσον καί διά τά προβλήματα σφηνῶν παρατηροῦμεν ὅτι εἴτε ἔχομεν δοκίμια ἐξ ἰσοτρόπων, εἴτε ἐξ ἀνισοτρόπων, εἴτε καί ἐξ ἰσοτρόπων καί ἐξ ἀνισοτρόπων μέσων δυνάμεθα νά μελετῶμεν αὐτά διά τῶν αὐτῶν μεθόδων, μόνον δέ εἰς τήν ἐμφάνισιν τῶν τύπων αἱ περιπτώσεις τῶν ἰσοτρόπων δοκιμίων φαίνονται ἁπλούστεραι, ἐνῷ, τολμῶμεν νά εἴπωμεν, ἡ κατανόησις τῶν τύπων διά τά ἀνισότροπα δοκίμια εἶναι πολύ εὐκολωτέρα ἤ διά τά ἰσότροπα.

'Επίσης ἡ μελέτη τῶν προβλημάτων σφηνῶν καί ἡ περαιτέρω εἰδίκευσίς των διά τάς περιπτώσεις ρωγμῶν δίδει ἀποτελέσματα παρά τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν συμφωνοῦντα εἰς τάς ἐξετασθείσας περιπτώσεις μέ τάς ἀκριβεῖς λύσεις τῶν προβλημάτων ρωγμῶν, αἵτινες ἰσχύουν ὄχι μόνον διά τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς, ἀλλά δι'ὅλον τό ἄπειρον δοκίμιον. Βλέπομεν οὕτω καταληγούσας εἰς

./.

τά αὐτά συμπεράσματα διά τήν ἰδιάζουσαν ἐντατικήν κατάστασιν παρά τά ἄκρα ρωγμῆς δύο ἐκ πρώτης ὄψεως ἐντελῶς διαφόρους μεθόδους ἀντιμετωπίσεως τῶν προβλημάτων τούτων.

Περαίνοντες θά ἠθέλαμεν νά παρατηρήσωμεν ὅτι σκοπόν μας ἀπετέλεσεν ἡ ἐφαρμογή τῆς θεωρίας τῆς 'Ελαστικότητος εἰς ὡρισμένα συγκεκριμένα προβλήματα θεωρητικοῦ ὡς ἐπί τό πλεῖστον ἐνδιαφέροντος ἐπί ἰδανικῶς συμπεριφερομένων δοκιμίων, χωρίς νά μᾶς ἀπασχολήσῃ ἐάν ὄντως ἰσχύουν εἰς τήν πραγματικότητα οἱ νόμοι τῆς θεωρίας τῆς 'Ελαστικότητος, τούς ὁποίους ἐχρησιμοποιήσαμεν ἤ ἐάν τά ἐπιλυθέντα προβλήματα δύνανται νά τύχουν πρακτικῆς τινος ἐφαρμογῆς.