ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΥΡΕΣΕΩΣ ΤΗΣ ΙΔΙΑΖΟΥΣΗΣ ΕΝΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ ΠΛΗΣΙΟΝ ΑΝΩΜΑΛΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

2. Γενικαί Παρατηρήσεις.

Πολλάς φοράς πλησίον ἀνωμάλων σημείων τοῦ ὁρίου ἑνός δοκιμίου ἐξ ἰσοτρόπου ἤ ἀνισοτρόπου μέσου εἰς ἐπίπεδον ἐντατικήν κατάστασιν ἤ περαιτέρω πλησίον ἀνωμάλων σημείων τῶν ὁρίων μεταξύ διαφόρων μέσων εἰς ἕν ἀνομοιογενές δοκίμιον παρατηρεῖται συγκέντρωσις τάσεων καί παραμορφώσεων καταλήγουσα εἰς ἀπειρισμόν τούτων ἐπί τοῦ ἀνωμάλου σημείου. Ἐνίοτε βεβαίως, καίτοι ὑπάρχει ἀνώμαλον σημεῖον, δέν παρατηρεῖται τοιαύτη συγκέντρωσις τάσεων καί παραμορφώσεων. Αἱ τάσεις καί παραμορφώσεις εἰς περίπτωσιν ἀπειρισμοῦ των εἰς ἕν ἀνώμαλον σημεῖον O μεταβάλλονται πλησίον τούτου ἀναλόγως πρός τόν ὅρον $\tau^{\lambda-1}$, ἔνθα τ ἡ ἀπόστασις ἀπό τοῦ σημείου O καί λ θετικός ἀριθμός μεταξύ 0 καί 1 ἐξαρτώμενος ἐκ τῆς γεωμετρίας τοῦ δοκιμίου, τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἀποτελοῦντος ἤ τῶν ἀποτελούντων τοῦτο μέσων, τοῦ ἐάν ἔχωμεν δοκίμιον πολύ λεπτόν μέ ἐπίπεδον κατάστασιν τάσεων ἤ δοκίμιον ἀπείρου πάχους μέ ἐπίπεδον κατάστασιν παραμορφώσεων καί τοῦ εἴδους τῆς φορτίσεως εἰς τά ἐλεύθερα ὅρια τοῦ δοκιμίου παρά τό σημεῖον O, δηλαδή ἐάν εἶναι γνωσταί αἱ τάσεις ἤ αἱ μετατοπίσεις παρά τό σημεῖον O.

Ἡ ἁπλουστέρα περίπτωσις συγκεντρώσεως τάσεων εἶναι παρά τό ἄκρον ἀφορτίστου ρωγμῆς εἰς ἰσότροπον δοκίμιον, ὅτε

./.

εἶναι $\lambda=\frac{1}{2}$, ἤτοι αἱ τάσεις καί αἱ παραμορφώσεις παρά τό ἄκρον τῆς ρωγμῆς βαίνουν ὡς ὁ ὅρος $\tau^{\lambda-1}=\tau^{-\frac{1}{2}}$, προκύπτουν δέ τότε οἱ γνωστοί τύποι τοῦ SNEDDON (40,σ.232) διά τήν ἐντατικήν κατάστασιν παρά τό ἄκρον τῆς ρωγμῆς. Οὗτοι ἐπίσης εὑρίσκονται καί εἰς πολλά ἄλλα ἄρθρα ὡς τοῦ IRWIN (25, σ.263), τῶν SIH, PARIS, ERDOGAN (38, σ.306) καί ἀλλαχοῦ προκύπτοντες διά προσεγγίσεως τῆς ἀκριβοῦς λύσεως διά τό ἐντατικόν πεδίον πλησίον τοῦ ἄκρου ἁπλῆς εὐθυγράμμου ἤ κυκλικῆς ρωγμῆς ἄνευ φορτίσεως τῆς ρωγμῆς ἤ μέ δεδομένας τάς τάσεις ἤ τάς μετατοπίσεις ἐπ'ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς, δηλαδή διά τάς περιπτώσεις τοῦ πρώτου καί τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος καί ὄχι τοῦ τρίτου θεμελιώδους προβλήματος μέ δεδομένας τάς τάσεις ἐπί τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς καί τάς μετατοπίσεις ἐπί τῆς ἑτέρας, ὅτε ἡ ἰδιάζουσα ἐντατική κατάστασις παρά τό ἄκρον τῆς ρωγμῆς ἀκολουθεῖ πλέον πολύπλοκον νόμον.

Ὁ WILLIAMS (46) ἠσχολήθη πρῶτος μέ τήν ἰδιάζουσαν ἐντατικήν κατάστασιν παρά τήν κορυφήν σφηνός καί διά τά τρία θεμελιώδη προβλήματα διά μεθόδου παραπλησίας τῆς ἐνταῦθα χρησιμοποιουμένης, δηλαδή δι'ἀπ'εὐθείας εὑρέσεως τῆς σταθερᾶς λ ὡς ἰδιοτιμῆς ἑκάστου προβλήματος προκυπτούσης ἐκ τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν τούτου παρά τήν κορυφήν τοῦ σφηνός καί ἄνευ γνώσεως τῆς ἀκριβοῦς λύσεως τοῦ ἐλαστικοῦ προβλήματος.Ὁ WILLIAMS ἐχρησιμοποίησεν ἀσυμπτωτικάς ἐκφράσεις πραγματικῶν συναρτήσεων παρά τό σημεῖον O, αἱ ὁποῖαι ἐκφράσεις δέν δύνανται νά θεωρηθοῦν ὀρθαί, ὅταν ἡ ἰδιοτιμή λ προκύψῃ μιγαδική, διότι τότε καί αἱ πραγματικαί συναρτήσεις προκύπτουν μιγαδικαί ἐν γένει ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τοῦ σφηνός.Καίτοι ἡ μέθοδος ἰσχύει διά λ πραγματικόν, ἐν τούτοις τά ἀποτελέσματα ἀποδει-

./.

κνύονται ὀρθά καί διά μιγαδικόν λ βάσει σκέψεων ἀναλόγων πρός τάς ἐκτιθεμένας εἰς τήν § 4 κατωτέρω. Περαιτέρω ἡ αὐτή μέθοδος ἐφηρμόσθη ὑπό τοῦ WILLIAMS διά τήν περίπτωσιν ρωγμῆς (47) ἐντός ἰσοτρόπου δοκιμίου καί ἐπίσης διά ρωγμήν ἐπί τοῦ ὁρίου δύο ἰσοτρόπων μέσων ὑπό τοῦ WILLIAMS (48) καί διά ρωγμήν κάθετον ἐπί τοῦ ὁρίου δύο ἰσοτρόπων μέσων ὑπό τῶν ZAK καί WILLIAMS (50).

Μία ἑτέρα μέθοδος εὑρέσεως τῆς ἰδιαζούσης ἐντατικῆς καταστάσεως πλησίον ἀνωμάλων σημείων ἔχουσα καί τό πλεονέκτημα τῆς ἀκριβοῦς λύσεως τοῦ ἐλαστικοῦ προβλήματος καί μακράν τοῦ ἀνωμάλου σημείου εἶναι ἡ μέθοδος τοῦ μετασχηματισμοῦ MELLIN. Ἡ μέθοδος αὕτη ὅμως ἔχει τό μειονέκτημα ὅτι καταλήγει εἰς λίαν πολυπλόκους τύπους καί διά τοῦτο εἶναι ἀρκετά δύσχρηστος. Ἡ μέθοδος αὕτη ἀνεπτύχθη κατά κύριον λόγον ὑπό τοῦ BOGY, ὅστις ἔλυσε δι'αὐτῆς διάφορα προβλήματα σφηνῶν καί ρωγμῶν μέ ἰσότροπα μέσα (1, 2, 3, 4) ὡς καί τό πρόβλημα τῆς ἁπλῆς σφηνός ἐξ ἀνισοτρόπου μέσου (5), ἥτις εἶναι καί ἡ μόνη εὑρεθεῖσα σχετική ἐργασία δι'ἀνισότροπα μέσα. Ἄλλαι ἐργασίαι διά τῆς μεθόδου τοῦ μετασχηματισμοῦ MELLIN εἶναι αἱ τῶν BOGY καί WANG (6) δι'ἀνώμαλον σημεῖον ἐπί τῆς διαχωριστικῆς ἐπιφανείας δύο ἰσοτρόπων μέσων, τῶν HEIN καί ERDOGAN (24) διά σφῆνα ἐκ δύο μέσων, τῶν SCHMERR καί THAU (35) δι'ἁπλοῦν σφῆνα, ἀλλά διά τήν περίπτωσιν τοῦ τρίτου θεμελιώδους προβλήματος, καί τῶν COOK καί ERDOGAN (9) διά ρωγμήν κάθετον ἐπί τήν διαχωριστικήν εὐθεῖαν δύο μέσων.

Διά σύνθετα δοκίμια ἐκ δύο ἤ καί περισσοτέρων ἰσοτρόπων μέσων ἡ μελέτη τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν ἐπί τῶν ὁρίων μεταξύ τῶν διαφόρων μέσων ὡς καί τῆς ἐπιδράσεως τῶν ἐλαστικῶν

./.

σταθερῶν τῶν διαφόρων μέσων ἐπί τῆς ἐντατικῆς καταστάσεως, ἰδίως διά τήν περίπτωσιν δοκιμίου ἐκ δύο μέσων, ἐγένετο ὑπό τοῦ DUNDURS εἰς μίαν σειράν ἄρθρων του (10, 11, 12). Διά τήν περίπτωσιν ἀνισοτρόπων ὑλικῶν αἱ ὁριακαί συνθῆκαι δίδονται εἰς τά συγγράμματα τοῦ Καθηγητοῦ τοῦ Ε.Μ.Π.κ.Γαλιδάκη(21) ἤ τοῦ SAVIN (34).

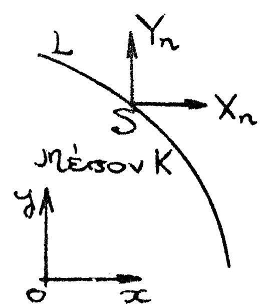
'Ενταῦθα χρησιμοποιοῦμεν τήν μέθοδον τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν διά τήν εὕρεσιν τῆς ἐντατικῆς καταστάσεως πλησίον ἀνωμάλων σημείων στηριζομένην ἐπί τῆς ἀνάγκης πληρώσεως τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν ἐπί τῶν ὁρίων μεταξύ τῶν διαφόρων μέσων ἑνός δοκιμίου ὡς καί τοῦ ἐξωτερικοῦ ὁρίου τοῦ δοκιμίου. 'Η μέθοδος αὕτη ἐχρησιμοποιήθη μέχρι τοῦδε ὑπό τοῦ KALANDIIA (26), τοῦ ENGLAND (14) δι'ἁπλᾶς σφῆνας ἐξ ἰσοτρόπου ὑλικοῦ καί διαφόρους ὁριακάς συνθήκας καί μέ τόν περαιτέρω περιορισμόν ὅτι ἡ σταθερά λ τῆς ἰδιαζούσης συμπεριφορᾶς εἶναι πραγματική καί ἐπίσης προσφάτως ὑπό τοῦ καθηγητοῦ τοῦ Ε.Μ.Π.κ. Θεοχάρη (44) εἰς πολύ γενικευμένην μορφήν, ὥστε νά καλύπτεται κάθε περίπτωσις συγκεντρώσεως τάσεων εἰς ἰσότροπον δοκίμιον τυχούσης μορφῆς καί μέ σταθεράν λ μιγαδικήν ἐν γένει. Τήν μέθοδον ταύτην θά δώσωμεν καί ἐνταῦθα γενικευμένην ἔτι περαιτέρω, ὥστε νά καλύπτωμεν κάθε πιθανήν περίπτωσιν συγκεντρώσεως τάσεων ἐντός συνθέτου μέσου ἐξ ἰσοτρόπων καί ἀνισοτρόπων μέσων μέ ἐφαρμογάς εἰς ἁπλᾶς περιπτώσεις. Εἰς ὅσας ἐκ τῶν ἁπλῶν αὐτῶν περιπτώσεων ὑπάρχουν προηγούμεναι λύσεις τά ἀποτελέσματα διά τῆς παρούσης μεθόδου συμφωνοῦν μέ τάς προηγουμένας λύσεις ἐπαληθευομένης οὕτω τῆς ὀρθότητος ταύτης. Πειραματική ἐπαλήθευσις τῆς ὀρθότητος τῶν θεωρητικῶν ἀποτελεσμάτων δύναται νά γίνῃ διά τῆς μεθόδου τῶν καυστικῶν

./.

ἀναπτυχθείσης ἐπίσης ὑπό τοῦ Καθηγητοῦ κ.Π.Θεοχάρη εἰς σειράν ἄρθρων του, ἐκ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν ἐνδεικτικῶς τό σχετικόν μέ τήν μελέτην ἀνίσων συγγραμμικῶν ρωγμῶν (43), ὅπου ἐκτίθεται καί ἡ ἀντίστοιχος θεωρία.

3. Αἱ Βασικαί Σχέσεις.

Θεωροῦμεν ἕν ἰσότροπον ἤ ἀνισότροπον μέσον K εἰς ἐπίπεδον ἐντατικήν κατάστασιν χαρακτηριζομένην ὑπό τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων $\varphi_K(z)$ καί $\psi_K(z)$. Θεωροῦμεν τό ὅριον L τοῦ μέσου τούτου καί τάς προβολάς $X_n(s)$ καί $Y_n(s)$ ἐπί τῶν ἀξόνων Ox καί Oy ἀντιστοίχως τῶν ἐξωτερικῶν τάσεων τῶν ἐξασκουμένων ἐπί τοῦ ὁρίου L εἰς ἕκαστον σημεῖον S τούτου, αἵτινες δύνανται νά θεωρηθοῦν συναρτήσεις τοῦ μήκους S τοῦ ὁρίου L.



Σχῆμα 3

Εἰς ἥν περίπτωσιν τό μέσον k εἶναι ἰσότροπον, ἐάν t τά σημεῖα τοῦ ὁρίου L, ἰσχύει ἡ σχέσις (IO,σ.3II):

$$\varphi_k(t)+t\overline{\varphi_k'(t)}+\overline{\psi_k(t)}=i\int_0^s[X_n(s)+Y_n(s)]ds+C_1 . \qquad (1)$$

Δι'ἀνισότροπον μέσον ἡ σχέσις (1) ἔχει ἀντιστοίχους τάς ἑξῆς (2I, σ.28), (34, σ.26):

$$s_1\varphi_k(t_1)+\bar{s}_1\overline{\varphi_k(t_1)}+s_2\psi_k(t_2)+\bar{s}_2\overline{\psi_k(t_2)}=\int_0^s X_n(s)ds+C_2, \qquad (2a)$$

$$\varphi_k(t_1)+\overline{\varphi_k(t_1)}+\psi_k(t_2)+\overline{\psi_k(t_2)}=-\int_0^s Y_n(s)ds+C_3 . \qquad (2b)$$

Ἐάν $f_{1k}(s)$ καί $f_{2k}(s)$ εἶναι αἱ μετατοπίσεις τοῦ μέσου K κατά μῆκος τοῦ ὁρίου L, δι'ἰσότροπον μέσον ἰσχύει ἡ σχέσις (IO, σ.3II):

./.

$$\kappa_k \varphi_k(t) - t_k \overline{\varphi_k'(t)} - \overline{\psi_k(t)} = 2\mu_k[f_{1k}(s) + i f_{2k}(s)], \tag{3}$$

ἐνῷ δι'ἀνισότροπον μέσον αἱ ἑξῆς δύο σχέσεις (34,σ.26):

$$p_{1k}\varphi_k(t_1) + \overline{p_{1k}}\,\overline{\varphi_k(t_1)} + p_{2k}\psi_k(t_2) + \overline{p_{2k}}\,\overline{\psi_k(t_2)} = f_{1k}(s), \tag{4α}$$

$$q_{1k}\varphi_k(t_1) + \overline{q_{1k}}\,\overline{\varphi_k(t_1)} + q_{2k}\psi_k(t_2) + \overline{q_{2k}}\,\overline{\psi_k(t_2)} = f_{2k}(s). \tag{4β}$$

'Εάν θεωρήσωμεν ἤδη τό ὅριον L διαχωρίζον δύο μέσα (K-1) καί K, θά πρέπῃ αἱ μέν τάσεις μεταξύ αὐτῶν νά εἶναι ἀντίθετοι, αἱ δέ μετατοπίσεις ἴσαι. Λόγῳ τῶν σχέσεων (1), (2), (3) καί (4), ἐάν ἀμφότερα τά μέσα εἶναι ἰσότροπα, θά ἔχωμεν (10, σ.312):

$$\varphi_{k-1}(t) + t\overline{\varphi_{k-1}'(t)} + \overline{\psi_{k-1}(t)} = \varphi_k(t) + t\overline{\varphi_k'(t)} + \overline{\psi_k(t)} + C_4, \tag{5α}$$

$$\mu_k[\kappa_{k-1}\varphi_{k-1}(t) - t\overline{\varphi_k'(t)} - \overline{\psi_{k-1}(t)}] = \mu_{k-1}[\kappa_k\varphi_k(t) - t\overline{\varphi_k'(t)} - \overline{\psi_k(t)}]. \tag{5β}$$

'Εάν ἀμφότερα τά μέσα εἶναι ἀνισότροπα, θά ἔχωμεν:

$$\begin{aligned}\varphi_{k-1}(t_1) + \overline{\varphi_{k-1}(t_1)} + \psi_{k-1}(t_2) + \overline{\psi_{k-1}(t_2)} &= \\ = \varphi_k(t_1) + \overline{\varphi_k(t_1)} + \psi_k(t_2) + \overline{\psi_k(t_2)} + C_5&,\end{aligned} \tag{6α}$$

$$\begin{aligned}s_{1(k-1)}\varphi_{k-1}(t_1) + \overline{s_{1(k-1)}}\,\overline{\varphi_{k-1}(t_1)} + s_{2(k-1)}\psi_{k-1}(t_2) + \overline{s_{2(k-1)}}\,\overline{\psi_{k-1}(t_2)} &= \\ = s_{1k}\varphi_k(t_1) + \overline{s_{1k}}\,\overline{\varphi_k(t_1)} + s_{2k}\psi_k(t_2) + \overline{s_{2k}}\,\overline{\psi_k(t_2)} + C_6&,\end{aligned} \tag{6β}$$

$$\begin{aligned}p_{1(k-1)}\varphi_{k-1}(t_1) + \overline{p_{1(k-1)}}\,\overline{\varphi_{k-1}(t_1)} + p_{2(k-1)}\psi_{k-1}(t_2) + \overline{p_{2(k-1)}}\,\overline{\psi_{k-1}(t_2)} &= \\ = p_{1k}\varphi_k(t_1) + \overline{p_{1k}}\,\overline{\varphi_k(t_1)} + p_{2k}\psi_k(t_2) + \overline{p_{2k}}\,\overline{\psi_k(t_2)}&,\end{aligned} \tag{6γ}$$

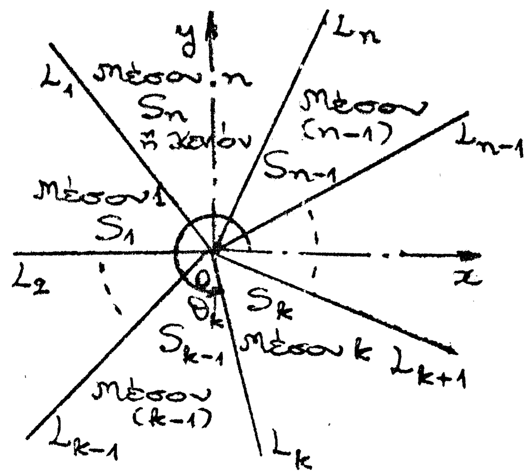
$$\begin{aligned}q_{1(k-1)}\varphi_{k-1}(t_1) + \overline{q_{1(k-1)}}\,\overline{\varphi_{k-1}(t_1)} + q_{2(k-1)}\psi_{k-1}(t_2) + \overline{q_{2(k-1)}}\,\overline{\psi_{k-1}(t_2)} &= \\ = q_{1k}\varphi_k(t_1) + \overline{q_{1k}}\,\overline{\varphi_k(t_1)} + q_{2k}\psi_k(t_2) + \overline{q_{2k}}\,\overline{\psi_k(t_2)}&.\end{aligned} \tag{6δ}$$

'Εάν δέ τό μέσον (K-1) εἶναι ἰσότροπον, τό δέ μέσον K εἶναι ἀνισότροπον, εὐκόλως συνάγομεν τάς κάτωθι σχέσεις:

$$\begin{aligned}\varphi_{k-1}(t) + t\overline{\varphi_{k-1}'(t)} + \overline{\psi_{k-1}(t)} &= (1+is_{1k})\varphi_k(t_1) + (1+i\overline{s_{1k}})\overline{\varphi_k(t_1)} + \\ &+ (1+is_{2k})\psi_k(t_2) + (1+i\overline{s_{2k}})\overline{\psi_k(t_2)} + C_7,\end{aligned} \tag{7α}$$

$$\frac{1}{\mu_{k-1}}\left[\kappa_{k-1}\varphi_{k-1}(t)-t\overline{\varphi'_{k-1}(t)}-\overline{\psi_{k-1}(t)}\right]=(p_{1k}+iq_{1k})\varphi_k(t_1)+(\bar{p}_{1k}+i\bar{q}_{1k})\overline{\varphi_k(t_1)}+$$
$$+(p_{2k}+iq_{2k})\psi_k(t_2)+(\bar{p}_{2k}+i\bar{q}_{2k})\overline{\psi_k(t_2)}. \qquad (7β)$$

Θεωροῦμεν σύνθετον δοκίμιον εἰς ἐπίπεδον ἐντατικήν κατάστασιν συντιθέμενον ἐξ η ἰσοτρόπων ἤ καί ἀνισοτρόπων μέσων, ἐκ τῶν ὁποίων ἕν δύναται νά εἶναι τό κενόν, ἐξετάζομεν δέ τήν περιοχήν περί ἕν ἀνώμαλον σημεῖον O τῆς καμπύλης L τῆς ἀπαρτιζομένης ἐκ τῶν ὁρίων L_K μεταξύ τῶν διαφόρων μέσων καί τοῦ ἐξωτερικοῦ ὁρίου L_0 τοῦδοκιμίου, τό ὁποῖον θεωροῦμεν καί ἀρχήν τοῦ συστήματος συντεταγμένων, ὡς εἰς τό Σχῆμα 4 φαίνεται. Παρά τό σημεῖον O τά ὅρια L_K μεταξύ τῶν διαφόρων μέσων ἐθεωρήθησαν εὐθύγραμμα, ἐν γένει ὅμως θεωροῦμεν τάς ἐφαπτομένας τῶν πραγματικῶν ὁρίων εἰς τό σημεῖον O, καθ'ὅσον ἐνδιαφερόμεθα μόνον διά τήν περιοχήν τοῦ ἀνωμάλου τούτου σημείου. Ἐπίσης εἰς τό Σχῆμα 4 θεωροῦμεν καί τάς πολικάς γωνίας θ_k ἀπό τοῦ ἄξονος O μέχρι τῶν εὐθειῶν L_K ἀντιστοίχως.



Σχῆμα 4

Διά τά διάφορα μέσα K ὑποθέτομεν ἤδη τήν ἑξῆς ὁριακήν ἀσυμπτωτικήν ἔκφρασιν τῶν συναρτήσεων $\varphi_k(z)$ καί $\psi_k(z)$ μέ $z \in S_k$:

$$\varphi_k(z)=\varphi_{1k}z^{\lambda}+\varphi_{2k}z^{\bar{\lambda}}, \qquad (8α)$$
$$\psi_k(z)=\psi_{1k}z^{\lambda}+\psi_{2k}z^{\bar{\lambda}}, \qquad (8β)$$

ἔνθα φ_{1k}, φ_{2k}, ψ_{1k} καί ψ_{2k} εἶναι σταθεραί καί λ σταθερά ἐν γένει θεωρουμένη μιγαδική καίπληροῦσα τήν συνθήκην(46,σ.527):

$$0<\mathrm{Re}\,\lambda<1, \qquad (9)$$

ὁπότε ἔχομεν συγκέντρωσιν τάσεων καί παραμορφώσεων εἰς τό σημεῖον Ο, προφανῶς ὅμως ἀπειρισμός τῶν μετατοπίσεων εἰς τό σημεῖον Ο δέν ἔχει ἔννοιαν οὔτε συμβαίνει ἰσχυούσης τῆς ἀριστερᾶ ἀνισότητος τῆς σχέσεως (9).

Διά δύο διαδοχικά ἰσότροπα μέσα (Κ-1) καί Κ αἱ σχέσεις (5) λόγω τῶν (8) λαμβάνουν τήν ἑξῆς μορφήν παρά τό σημεῖον Ο καί διά τά σημεῖα t_k τῆς εὐθείας L_K:

$$\begin{aligned}\varphi_{1(k-1)}t_k^{\lambda}+\varphi_{2(k-1)}t_k^{\bar\lambda}+\bar\lambda\bar\varphi_{1(k-1)}t_k\bar t_k^{\bar\lambda-1}+\lambda\bar\varphi_{2(k-1)}t_k\bar t_k^{\lambda-1}+\bar\psi_{1(k-1)}\bar t_k^{\bar\lambda}+\bar\psi_{2(k-1)}\bar t_k^{\lambda}=\\=\varphi_{1k}t_k^{\lambda}+\varphi_{2k}t_k^{\bar\lambda}+\bar\lambda\bar\varphi_{1k}t_k\bar t_k^{\bar\lambda-1}+\lambda\bar\varphi_{2k}t_k\bar t_k^{\lambda-1}+\bar\psi_{1k}\bar t_k^{\bar\lambda}+\bar\psi_{2k}\bar t_k^{\lambda},\end{aligned}\tag{10α}$$

$$\begin{aligned}\mu_k\left[\kappa_{k-1}\varphi_{1(k-1)}t_k^{\lambda}+\kappa_{k-1}\varphi_{2(k-1)}t_k^{\bar\lambda}-\bar\lambda\bar\varphi_{1(k-1)}t_k\bar t_k^{\bar\lambda-1}-\lambda\bar\varphi_{2(k-1)}t_k\bar t_k^{\lambda-1}-\bar\psi_{1(k-1)}\bar t_k^{\bar\lambda}-\bar\psi_{2(k-1)}\bar t_k^{\lambda}\right]=\\=\mu_{k-1}\left[\kappa_k\varphi_{1k}t_k^{\lambda}+\kappa_k\varphi_{2k}t_k^{\bar\lambda}-\bar\lambda\bar\varphi_{1k}t_k\bar t_k^{\bar\lambda-1}-\lambda\bar\varphi_{2k}t_k\bar t_k^{\lambda-1}-\bar\psi_{1k}\bar t_k^{\bar\lambda}-\bar\psi_{2k}\bar t_k^{\lambda}\right].\end{aligned}\tag{10β}$$

Λαμβανομένων περαιτέρω ὑπ'ὄψιν τῶν σχέσεων:

$$t_k=\tau e^{i\theta_k}\quad,\bar t_k=\tau e^{-i\theta_k}\tag{11}$$

αἱ σχέσεις (10) γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned}\varphi_{1(k-1)}\tau^{\lambda}e^{i\lambda\theta_k}+\varphi_{2(k-1)}\tau^{\bar\lambda}e^{i\bar\lambda\theta_k}+\bar\lambda\bar\varphi_{1(k-1)}\tau^{\bar\lambda}e^{i(2-\bar\lambda)\theta_k}+\lambda\bar\varphi_{2(k-1)}\tau^{\lambda}e^{i(2-\lambda)\theta_k}+\\+\bar\psi_{1(k-1)}\tau^{\bar\lambda}e^{-i\bar\lambda\theta_k}+\bar\psi_{2(k-1)}\tau^{\lambda}e^{-i\lambda\theta_k}=\varphi_{1k}\tau^{\lambda}e^{i\lambda\theta_k}+\varphi_{2k}\tau^{\bar\lambda}e^{i\bar\lambda\theta_k}+\\+\bar\lambda\bar\varphi_{1k}\tau^{\bar\lambda}e^{i(2-\bar\lambda)\theta_k}+\lambda\bar\varphi_{2k}\tau^{\lambda}e^{i(2-\lambda)\theta_k}+\bar\psi_{1k}\tau^{\bar\lambda}e^{-i\bar\lambda\theta_k}+\bar\psi_{2k}\tau^{\lambda}e^{-i\lambda\theta_k},\end{aligned}\tag{12α}$$

$$\begin{aligned}\mu_k\Big[\kappa_{k-1}\varphi_{1(k-1)}\tau^{\lambda}e^{i\lambda\theta_k}+\kappa_{k-1}\varphi_{2(k-1)}\tau^{\bar\lambda}e^{i\bar\lambda\theta_k}-\bar\lambda\bar\varphi_{1(k-1)}\tau^{\bar\lambda}e^{i(2-\bar\lambda)\theta_k}-\\-\lambda\bar\varphi_{2(k-1)}\tau^{\lambda}e^{i(2-\lambda)\theta_k}-\bar\psi_{1(k-1)}\tau^{\bar\lambda}e^{-i\bar\lambda\theta_k}-\bar\psi_{2(k-1)}\tau^{\lambda}e^{-i\lambda\theta_k}\Big]=\\=\mu_{k-1}\Big[\kappa_k\varphi_{1k}\tau^{\lambda}e^{i\lambda\theta_k}+\kappa_k\varphi_{2k}\tau^{\bar\lambda}e^{i\bar\lambda\theta_k}-\bar\lambda\bar\varphi_{1k}\tau^{\bar\lambda}e^{i(2-\bar\lambda)\theta_k}-\\-\lambda\bar\varphi_{2k}\tau^{\lambda}e^{i(2-\lambda)\theta_k}-\bar\psi_{1k}\tau^{\bar\lambda}e^{-i\bar\lambda\theta_k}-\bar\psi_{2k}\tau^{\lambda}e^{-i\lambda\theta_k}\Big].\end{aligned}\tag{12β}$$

Θεωροῦντες τό λ μιγαδικόν ἀριθμόν διά τ μεταβαλλόμενον αἱ σχέσεις (12) ἰσχύουν, ἐφ'ὅσον οἱ συντελεσταί τῶν τ^{λ} καί $\tau^{\bar\lambda}$ εἶναι ἴσοι πρός μηδέν, ὅτε ἔχομεν:

./.

$$\varphi_{1(k-1)}e^{i\lambda\theta_k}+\lambda\bar{\varphi}_{2(k-1)}e^{i(2-\lambda)\theta_k}+\bar{\psi}_{2(k-1)}e^{-i\lambda\theta_k}=$$
$$=\varphi_{1k}e^{i\lambda\theta_k}+\lambda\bar{\varphi}_{2k}e^{i(2-\lambda)\theta_k}+\bar{\psi}_{2k}e^{-i\lambda\theta_k}, \quad (13a)$$
$$\mu_k[\kappa_{k-1}\varphi_{1(k-1)}e^{i\lambda\theta_k}-\lambda\bar{\varphi}_{2(k-1)}e^{i(2-\lambda)\theta_k}-\bar{\psi}_{2(k-1)}e^{-i\lambda\theta_k}]=$$
$$=\mu_{k-1}[\kappa_k\varphi_{1k}e^{i\lambda\theta_k}-\lambda\bar{\varphi}_{2k}e^{i(2-\lambda)\theta_k}-\bar{\psi}_{2k}e^{-i\lambda\theta_k}] \quad (13b)$$

διά τούς συντελεστάς τῶν τ^{λ} καί:

$$\varphi_{2(k-1)}e^{i\bar{\lambda}\theta_k}+\bar{\lambda}\bar{\varphi}_{1(k-1)}e^{i(2-\bar{\lambda})\theta_k}+\bar{\psi}_{1(k-1)}e^{-i\bar{\lambda}\theta_k}=$$
$$=\varphi_{2k}e^{i\bar{\lambda}\theta_k}+\bar{\lambda}\bar{\varphi}_{1k}e^{i(2-\bar{\lambda})\theta_k}+\bar{\psi}_{1k}e^{-i\bar{\lambda}\theta_k}, \quad (14a)$$
$$\mu_k[\kappa_{k-1}\varphi_{2(k-1)}e^{i\bar{\lambda}\theta_k}-\bar{\lambda}\bar{\varphi}_{1(k-1)}e^{i(2-\bar{\lambda})\theta_k}-\bar{\psi}_{1(k-1)}e^{-i\bar{\lambda}\theta_k}]=$$
$$=\mu_{k-1}[\kappa_k\varphi_{2k}e^{i\bar{\lambda}\theta_k}-\bar{\lambda}\bar{\varphi}_{1k}e^{i(2-\bar{\lambda})\theta_k}-\bar{\psi}_{1k}e^{-i\bar{\lambda}\theta_k}] \quad (14b)$$

διά τούς συντελεστάς τῶν $\tau^{\bar{\lambda}}$.

Πολλαπλασιάζοντες τάς σχέσεις (I3) ἐπί $e^{i\lambda\theta_k}$, τάς δέ σχέσεις (I4) ἐπί $e^{i\bar{\lambda}\theta_k}$ καί λαμβάνοντες τάς συζυγεῖς τῶν τελευταίων ἔχομεν τελικῶς τάς ἑξῆς σχέσεις διά τήν περίπτωσιν δύο διαδοχικῶν ἰσοτρόπων μέσων:

$$(\varphi_{1(k-1)}-\varphi_{1k})e^{2i\lambda\theta_k}+\lambda(\bar{\varphi}_{2(k-1)}-\bar{\varphi}_{2k})e^{2i\theta_k}+(\bar{\psi}_{2(k-1)}-\bar{\psi}_{2k})=0, \quad (15a)$$
$$(\bar{\varphi}_{2(k-1)}-\bar{\varphi}_{2k})e^{-2i\lambda\theta_k}+\lambda(\varphi_{1(k-1)}-\varphi_{1k})e^{-2i\theta_k}+(\psi_{1(k-1)}-\psi_{1k})=0, \quad (15b)$$
$$(\mu_k\kappa_{k-1}\varphi_{1(k-1)}-\mu_{k-1}\kappa_k\varphi_{1k})e^{2i\lambda\theta_k}-\lambda(\mu_k\bar{\varphi}_{2(k-1)}-\mu_{k-1}\bar{\varphi}_{2k})e^{2i\theta_k}-(\mu_k\bar{\psi}_{2(k-1)}-\mu_{k-1}\bar{\psi}_{2k})=0, \quad (15\gamma)$$
$$(\mu_k\kappa_{k-1}\bar{\varphi}_{2(k-1)}-\mu_{k-1}\kappa_k\bar{\varphi}_{2k})e^{-2i\lambda\theta_k}-\lambda(\mu_k\varphi_{1(k-1)}-\mu_{k-1}\varphi_{1k})e^{-2i\theta_k}-(\mu_k\psi_{1(k-1)}-\mu_{k-1}\psi_{1k})=0. \quad (15\delta)$$

Ὅταν τό μέσον η εἶναι κενόν, διά K=1 ἤ K=η-1, θά ἔχωμεν, ἐάν τό μέσον 1 ἤ (η-1) ἀντιστοίχως εἶναι ἰσότροπον, διά μέν τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος μέ δεδομένας τάσεις μή ἀπειριζομένας παρά τό σημεῖον 0 τήν ἑξῆς ὁριακήν συνθήκην:

$$\varphi_{1k}t_k^{\lambda}+\varphi_{2k}t_k^{\bar{\lambda}}+\bar{\lambda}\bar{\varphi}_{1k}t_k\bar{t}_k^{\bar{\lambda}-1}+\lambda\bar{\varphi}_{2k}t_k\bar{t}_k^{\lambda-1}+\bar{\psi}_{1k}\bar{t}_k^{\bar{\lambda}}+\bar{\psi}_{2k}\bar{t}_k^{\lambda}=0, \quad (16)$$

διά δέ τήν περίπτωσιν τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος μέ δεδομένας παραμορφώσεις μή ἀπειριζομένας παρά τό σημεῖον O τήν ἑξῆς ὁριακήν συνθήκην:

$$\kappa_k\varphi_{1k}t_k^{\lambda}+\kappa_k\varphi_{2k}t_k^{\bar\lambda}-\bar\lambda\bar\varphi_{1k}t_k\bar t_k^{\bar\lambda-1}-\lambda\bar\varphi_{2k}t_k\bar t_k^{\lambda-1}-\bar\psi_{1k}\bar t_k^{\bar\lambda}-\bar\psi_{2k}\bar t_k^{\lambda}=0. \qquad (17)$$

Ἡ σχέσις (I6) ἤ ἡ (I7) ἀντικαθιστᾷ οὕτω διά τήν εὐθεῖαν L_1 ὡς καί τήν L_η τάς σχέσεις (I0). Ἐκ τῆς σχέσεως (I6) προκύπτουν ἀναλόγως πρός τάς σχέσεις (I5) αἱ ἑξῆς σχέσεις:

$$\varphi_{1k}e^{2i\lambda\theta_k}+\lambda\bar\varphi_{2k}e^{2i\theta_k}+\bar\psi_{2k}=0, \qquad (18a)$$

$$\bar\varphi_{2k}e^{-2i\lambda\theta_k}+\lambda\varphi_{1k}e^{-2i\theta_k}+\psi_{1k}=0, \qquad (18b)$$

ἐκ δέ τῆς σχέσεως (I7) προκύπτουν ὁμοίως αἱ ἑξῆς σχέσεις:

$$\kappa_k\varphi_{1k}e^{2i\lambda\theta_k}-\lambda\bar\varphi_{2k}e^{2i\theta_k}-\bar\psi_{2k}=0, \qquad (19a)$$

$$\kappa_k\bar\varphi_{2k}e^{-2i\lambda\theta_k}-\lambda\varphi_{1k}e^{-2i\theta_k}-\psi_{1k}=0. \qquad (19b)$$

Μετά τήν περίπτωσιν τῶν ἰσοτρόπων μέσων ἐξετάζομεν τήν περίπτωσιν, ὅπου δύο διαδοχικά μέσα (K-1) καί K εἶναι ἀνισότροπα, ὅτε ἐπί τῆς εὐθείας L_K διαχωρισμοῦ αὐτῶν ἰσχύουν αἱ σχέσεις (6).

Διά τά σημεῖα t_k τῆς εὐθείας L_K θέτομεν:

$$t_k=x_k+iy_k=\tau e^{i\theta_k}, \qquad (20a)$$

ὁπότε θά εἶναι:

$$t_{jk}=x_k+s_{jk}y_k=x_k+a_{jk}y_k+ib_{jk}y_k=$$
$$=\tau(\cos\theta_k+a_{jk}\sin\theta_k+ib_{jk}\sin\theta_k)=\gamma_{jk}\tau e^{i\theta_{jk}},\ j=1,2, \qquad (20b)$$

διά τό μέσον K, ἀντίστοιχοι δέ τύποι θά ἰσχύουν καί διά τό μέσον (K-1).

Εἰς τούς τύπους (I9) προφανῶς ἐτέθησαν:

$$\gamma_{jk}=\left[(\cos\theta_k+a_{jk}\sin\theta_k)^2+(b_{jk}\sin\theta_k)^2\right]^{1/2},\ j=1,2, \qquad (21a)$$

$$\theta_{jk}=\arg(\cos\theta_k+a_{jk}\sin\theta_k+ib_{jk}\sin\theta_k),\ j=1,2, \qquad (21b)$$

./.

δηλαδή είναι:

$$\tan\theta_{jk}=\frac{b_{jk}\sin\theta_k}{\cos\theta_k+a_{jk}\sin\theta_k}\ ,\quad j=1,2. \qquad (21\gamma)$$

Ἤδη αἱ σχέσεις (6) λόγῳ τῶν (8) λαμβάνουν παρά τό σημεῖον Ο καί διά τά σημεῖα t_k τῆς εὐθείας L_K τήν ἑξῆς μορφήν:

$$\varphi_{1(k-1)}t_{1k}^{\lambda}+\bar\varphi_{1(k-1)}\bar t_{1k}^{\bar\lambda}+\varphi_{2(k-1)}t_{1k}^{\bar\lambda}+\bar\varphi_{2(k-1)}\bar t_{1k}^{\lambda}+\psi_{1(k-1)}t_{2k}^{\lambda}+\bar\psi_{1(k-1)}\bar t_{2k}^{\bar\lambda}+$$
$$+\psi_{2(k-1)}t_{2k}^{\bar\lambda}+\bar\psi_{2(k-1)}\bar t_{2k}^{\lambda}=\varphi_{1k}t_{1k}^{\lambda}+\bar\varphi_{1k}\bar t_{1k}^{\bar\lambda}+\varphi_{2k}t_{1k}^{\bar\lambda}+\bar\varphi_{2k}\bar t_{1k}^{\lambda}+$$
$$+\psi_{1k}t_{2k}^{\lambda}+\bar\psi_{1k}\bar t_{2k}^{\bar\lambda}+\psi_{2k}t_{2k}^{\bar\lambda}+\bar\psi_{2k}\bar t_{2k}^{\lambda}\ , \qquad (22\alpha)$$

$$s_{1(k-1)}\varphi_{1(k-1)}t_{1k}^{\lambda}+\bar s_{1(k-1)}\bar\varphi_{1(k-1)}\bar t_{1k}^{\bar\lambda}+s_{1(k-1)}\varphi_{2(k-1)}t_{1k}^{\bar\lambda}+\bar s_{1(k-1)}\bar\varphi_{2(k-1)}\bar t_{1k}^{\lambda}+$$
$$+s_{2(k-1)}\psi_{1(k-1)}t_{2k}^{\lambda}+\bar s_{2(k-1)}\bar\psi_{1(k-1)}\bar t_{2k}^{\bar\lambda}+s_{2(k-1)}\psi_{2(k-1)}t_{2k}^{\bar\lambda}+\bar s_{2(k-1)}\bar\psi_{2(k-1)}\bar t_{2k}^{\lambda}=$$
$$=s_{1k}\varphi_{1k}t_{1k}^{\lambda}+\bar s_{1k}\bar\varphi_{1k}\bar t_{1k}^{\bar\lambda}+s_{1k}\varphi_{2k}t_{1k}^{\bar\lambda}+\bar s_{1k}\bar\varphi_{2k}\bar t_{1k}^{\lambda}+$$
$$+s_{2k}\psi_{1k}t_{2k}^{\lambda}+\bar s_{2k}\bar\psi_{1k}\bar t_{2k}^{\bar\lambda}+s_{2k}\psi_{2k}t_{2k}^{\bar\lambda}+\bar s_{2k}\bar\psi_{2k}\bar t_{2k}^{\lambda}\ , \qquad (22\beta)$$

$$p_{1(k-1)}\varphi_{1(k-1)}t_{1k}^{\lambda}+\bar p_{1(k-1)}\bar\varphi_{1(k-1)}\bar t_{1k}^{\bar\lambda}+p_{1(k-1)}\varphi_{2(k-1)}t_{1k}^{\bar\lambda}+\bar p_{1(k-1)}\bar\varphi_{2(k-1)}\bar t_{1k}^{\lambda}+$$
$$+p_{2(k-1)}\psi_{1(k-1)}t_{2k}^{\lambda}+\bar p_{2(k-1)}\bar\psi_{1(k-1)}\bar t_{2k}^{\bar\lambda}+p_{2(k-1)}\psi_{2(k-1)}t_{2k}^{\bar\lambda}+\bar p_{2(k-1)}\bar\psi_{2(k-1)}\bar t_{2k}^{\lambda}=$$
$$=p_{1k}\varphi_{1k}t_{1k}^{\lambda}+\bar p_{1k}\bar\varphi_{1k}\bar t_{1k}^{\bar\lambda}+p_{1k}\varphi_{2k}t_{1k}^{\bar\lambda}+\bar p_{1k}\bar\varphi_{2k}\bar t_{1k}^{\lambda}+$$
$$+p_{2k}\psi_{1k}t_{2k}^{\lambda}+\bar p_{2k}\bar\psi_{1k}\bar t_{2k}^{\bar\lambda}+p_{2k}\psi_{2k}t_{2k}^{\bar\lambda}+\bar p_{2k}\bar\psi_{2k}\bar t_{2k}^{\lambda}\ , \qquad (22\gamma)$$

$$q_{1(k-1)}\varphi_{1(k-1)}t_{1k}^{\lambda}+\bar q_{1(k-1)}\bar\varphi_{1(k-1)}\bar t_{1k}^{\bar\lambda}+q_{1(k-1)}\varphi_{2(k-1)}t_{1k}^{\bar\lambda}+\bar q_{1(k-1)}\bar\varphi_{2(k-1)}\bar t_{1k}^{\lambda}+$$
$$+q_{2(k-1)}\psi_{1(k-1)}t_{2k}^{\lambda}+\bar q_{2(k-1)}\bar\psi_{1(k-1)}\bar t_{2k}^{\bar\lambda}+q_{2(k-1)}\psi_{2(k-1)}t_{2k}^{\bar\lambda}+\bar q_{2(k-1)}\bar\psi_{2(k-1)}\bar t_{2k}^{\lambda}=$$
$$=q_{1k}\varphi_{1k}t_{1k}^{\lambda}+\bar q_{1k}\bar\varphi_{1k}\bar t_{1k}^{\bar\lambda}+q_{1k}\varphi_{2k}t_{1k}^{\bar\lambda}+\bar q_{1k}\bar\varphi_{2k}\bar t_{1k}^{\lambda}+$$
$$+q_{2k}\psi_{1k}t_{2k}^{\lambda}+\bar q_{2k}\bar\psi_{1k}\bar t_{2k}^{\bar\lambda}+q_{2k}\psi_{2k}t_{2k}^{\bar\lambda}+\bar q_{2k}\bar\psi_{2k}\bar t_{2k}^{\lambda}\ . \qquad (22\delta)$$

Λαμβανομένων περαιτέρω ὑπ' ὄψιν τῶν σχέσεων (20β) ἡ σχέσις (22α) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\tau^{\lambda}\Big[\gamma_{1(k-1)}^{\lambda}\big(\varphi_{1(k-1)}e^{i\lambda\theta_{1(k-1)}}+\bar\varphi_{2(k-1)}e^{-i\lambda\theta_{1(k-1)}}\big)+\gamma_{2(k-1)}^{\lambda}\big(\psi_{1(k-1)}e^{i\lambda\theta_{2(k-1)}}+$$
$$+\bar\psi_{2(k-1)}e^{-i\lambda\theta_{2(k-1)}}\big)-\gamma_{1k}^{\lambda}\big(\varphi_{1k}e^{i\lambda\theta_{1k}}+\bar\varphi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{1k}}\big)-\gamma_{2k}^{\lambda}\big(\psi_{1k}e^{i\lambda\theta_{2k}}+$$
$$+\bar\psi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{2k}}\big)\Big]+\tau^{\bar\lambda}\Big[\gamma_{1(k-1)}^{\bar\lambda}\big(\bar\varphi_{1(k-1)}e^{-i\bar\lambda\theta_{1(k-1)}}+\varphi_{2(k-1)}e^{i\bar\lambda\theta_{1(k-1)}}\big)+$$
$$+\gamma_{2(k-1)}^{\bar\lambda}\big(\bar\psi_{1(k-1)}e^{-i\bar\lambda\theta_{2(k-1)}}+\psi_{2(k-1)}e^{i\bar\lambda\theta_{2(k-1)}}\big)-\gamma_{1k}^{\bar\lambda}\big(\bar\varphi_{1k}e^{-i\bar\lambda\theta_{1k}}+$$
$$+\varphi_{2k}e^{i\bar\lambda\theta_{1k}}\big)-\gamma_{2k}^{\bar\lambda}\big(\bar\psi_{1k}e^{-i\bar\lambda\theta_{2k}}+\psi_{2k}e^{i\bar\lambda\theta_{2k}}\big)\Big]\ , \qquad (23\alpha)$$

./.

ἀναλόγους δέ ἐκφράσεις ἔχομεν καί διά τάς σχέσεις(22β–δ).

Θεωροῦντες τό λ μιγαδικόν ἀριθμόν διά τ μεταβαλλόμενον ἡ σχέσις (23α) ἰσχύει, ἐφ'ὅσον ὁ συντελεστής τοῦ τ^{λ} εἶναι ἴσος πρός μηδέν, καθ'ὅσον τότε καί ὁ συζυγής τούτου συντελεστής τοῦ $\tau^{\bar{\lambda}}$ θά εἶναι ἴσος πρός μηδέν, ὅτε ἔχομεν:

$$\gamma^{\lambda}_{1(k-1)}(\varphi_{1(k-1)}e^{i\lambda\theta_{1(k-1)}}+\bar{\varphi}_{2(k-1)}e^{-i\lambda\theta_{1(k-1)}})+\gamma^{\lambda}_{2(k-1)}(\psi_{1(k-1)}e^{i\lambda\theta_{2(k-1)}}+\bar{\psi}_{2(k-1)}e^{-i\lambda\theta_{2(k-1)}})-$$
$$-\gamma^{\lambda}_{1k}(\varphi_{1k}e^{i\lambda\theta_{1k}}+\bar{\varphi}_{2k}e^{-i\lambda\theta_{1k}})-\gamma^{\lambda}_{2k}(\psi_{1k}e^{i\lambda\theta_{2k}}+\bar{\psi}_{2k}e^{-i\lambda\theta_{2k}})=0, \quad (24\alpha)$$

ἀναλόγως δέ ἐκ τῶν σχέσεων (21β–δ) θά ἔχωμεν τελικῶς:

$$\gamma^{\lambda}_{1(k-1)}(s_{1(k-1)}\varphi_{1(k-1)}e^{i\lambda\theta_{1(k-1)}}+\bar{s}_{1(k-1)}\bar{\varphi}_{2(k-1)}e^{-i\lambda\theta_{1(k-1)}})+\gamma^{\lambda}_{2(k-1)}(s_{2(k-1)}\psi_{1(k-1)}e^{i\lambda\theta_{2(k-1)}}+\bar{s}_{2(k-1)}\bar{\psi}_{2(k-1)}e^{-i\lambda\theta_{2(k-1)}})-$$
$$-\gamma^{\lambda}_{1k}(s_{1k}\varphi_{1k}e^{i\lambda\theta_{1k}}+\bar{s}_{1k}\bar{\varphi}_{2k}e^{-i\lambda\theta_{1k}})-\gamma^{\lambda}_{2k}(s_{2k}\psi_{1k}e^{i\lambda\theta_{2k}}+\bar{s}_{2k}\bar{\psi}_{2k}e^{-i\lambda\theta_{2k}})=0, \quad (24\beta)$$

$$\gamma^{\lambda}_{1(k-1)}(p_{1(k-1)}\varphi_{1(k-1)}e^{i\lambda\theta_{1(k-1)}}+\bar{p}_{1(k-1)}\bar{\varphi}_{2(k-1)}e^{-i\lambda\theta_{1(k-1)}})+\gamma^{\lambda}_{2(k-1)}(p_{2(k-1)}\psi_{1(k-1)}e^{i\lambda\theta_{2(k-1)}}+\bar{p}_{2(k-1)}\bar{\psi}_{2(k-1)}e^{-i\lambda\theta_{2(k-1)}})-$$
$$-\gamma^{\lambda}_{1k}(p_{1k}\varphi_{1k}e^{i\lambda\theta_{1k}}+\bar{p}_{1k}\bar{\varphi}_{2k}e^{-i\lambda\theta_{1k}})-\gamma^{\lambda}_{2k}(p_{2k}\psi_{1k}e^{i\lambda\theta_{2k}}+\bar{p}_{2k}\bar{\psi}_{2k}e^{-i\lambda\theta_{2k}})=0, \quad (24\gamma)$$

$$\gamma^{\lambda}_{1(k-1)}(q_{1(k-1)}\varphi_{1(k-1)}e^{i\lambda\theta_{1(k-1)}}+\bar{q}_{1(k-1)}\bar{\varphi}_{2(k-1)}e^{-i\lambda\theta_{1(k-1)}})+\gamma^{\lambda}_{2(k-1)}(q_{2(k-1)}\psi_{1(k-1)}e^{i\lambda\theta_{2(k-1)}}+\bar{q}_{2(k-1)}\bar{\psi}_{2(k-1)}e^{-i\lambda\theta_{2(k-1)}})-$$
$$-\gamma^{\lambda}_{1k}(q_{1k}\varphi_{1k}e^{i\lambda\theta_{1k}}+\bar{q}_{1k}\bar{\varphi}_{2k}e^{-i\lambda\theta_{1k}})-\gamma^{\lambda}_{2k}(q_{2k}\psi_{1k}e^{i\lambda\theta_{2k}}+\bar{q}_{2k}\bar{\psi}_{2k}e^{-i\lambda\theta_{2k}})=0. \quad (24\delta)$$

Αἱ σχέσεις (24) εἶναι αἱ τελικαί σχέσεις διά τήν περίπτωσιν δύο διαδοχικῶν ἀνισοτρόπων μέσων.

Ὅταν τό μέσον η εἶναι κενόν, διά Κ=1 ἤ Κ=η–1, θά ἔχωμεν, ἐάν τό μέσον 1 ἤ (η–1) ἀντιστοίχως εἶναι ἀνισότροπον, διά μέν τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος μέ δεδομένας τάσεις μή ἀπειριζομένας παρά τό σημεῖον Ο τάς ἑξῆς ὁριακάς συνθήκας:

$$\varphi_{1k}t^{\lambda}_{1k}+\bar{\varphi}_{1k}\bar{t}^{\bar{\lambda}}_{1k}+\varphi_{2k}t^{\bar{\lambda}}_{1k}+\bar{\varphi}_{2k}\bar{t}^{\lambda}_{1k}+\psi_{1k}t^{\lambda}_{2k}+\bar{\psi}_{1k}\bar{t}^{\bar{\lambda}}_{2k}+\psi_{2k}t^{\bar{\lambda}}_{2k}+\bar{\psi}_{2k}\bar{t}^{\lambda}_{2k}=0, \quad (25\alpha)$$

$$s_{1k}\varphi_{1k}t^{\lambda}_{1k}+\bar{s}_{1k}\bar{\varphi}_{1k}\bar{t}^{\bar{\lambda}}_{1k}+s_{1k}\varphi_{2k}t^{\bar{\lambda}}_{1k}+\bar{s}_{1k}\bar{\varphi}_{2k}\bar{t}^{\lambda}_{1k}+$$
$$+s_{2k}\psi_{1k}t^{\lambda}_{2k}+\bar{s}_{2k}\bar{\psi}_{1k}\bar{t}^{\bar{\lambda}}_{2k}+s_{2k}\psi_{2k}t^{\bar{\lambda}}_{2k}+\bar{s}_{2k}\bar{\psi}_{2k}\bar{t}^{\lambda}_{2k}=0, \quad (25\beta)$$

διά δέ τήν περίπτωσιν τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος μέ δεδομένας παραμορφώσεις μή ἀπειριζομένας παρά τό σημεῖον Ο τάς ἑξῆς ὁριακάς συνθήκας:

$$p_{1k}\varphi_{1k}t^{\lambda}_{1k}+\bar{p}_{1k}\bar{\varphi}_{1k}\bar{t}^{\bar{\lambda}}_{1k}+p_{1k}\varphi_{2k}t^{\bar{\lambda}}_{1k}+\bar{p}_{1k}\bar{\varphi}_{2k}\bar{t}^{\lambda}_{1k}+$$
$$+p_{2k}\psi_{1k}t^{\lambda}_{2k}+\bar{p}_{2k}\bar{\psi}_{1k}\bar{t}^{\bar{\lambda}}_{2k}+p_{2k}\psi_{2k}t^{\bar{\lambda}}_{2k}+\bar{p}_{2k}\bar{\psi}_{2k}\bar{t}^{\lambda}_{2k}=0, \quad (26\alpha)$$

$$q_{1k}\varphi_{1k}t_{1k}^{\lambda}+\bar q_{1k}\bar\varphi_{1k}\bar t_{1k}^{\bar\lambda}+q_{1k}\varphi_{2k}t_{1k}^{\bar\lambda}+\bar q_{1k}\bar\varphi_{2k}\bar t_{1k}^{\lambda}+$$
$$+q_{2k}\psi_{1k}t_{2k}^{\lambda}+\bar q_{2k}\bar\psi_{1k}\bar t_{2k}^{\bar\lambda}+q_{2k}\psi_{2k}t_{2k}^{\bar\lambda}+\bar q_{2k}\bar\psi_{2k}\bar t_{2k}^{\lambda}=0. \qquad (26\beta)$$

Αἱ σχέσεις (25) ἤ αἱ (26) ἀντικαθιστοῦν οὕτω διά τήν εὐθεῖαν L_1 ὡς καί τήν L_η τάς σχέσεις (22).'Εκ τῶν σχέσεων (25) προκύπτουν ἀναλόγως πρός τάς σχέσεις (24) αἱ ἑξῆς σχέσεις:

$$\gamma_{1k}^{\lambda}(\varphi_{1k}e^{i\lambda\theta_{1k}}+\bar\varphi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{1k}})+\gamma_{2k}^{\lambda}(\psi_{1k}e^{i\lambda\theta_{2k}}+\bar\psi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{2k}})=0\ , \qquad (27\alpha)$$

$$\gamma_{1k}^{\lambda}(s_{1k}\varphi_{1k}e^{i\lambda\theta_{1k}}+\bar s_{1k}\bar\varphi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{1k}})+\gamma_{2k}^{\lambda}(s_{2k}\psi_{1k}e^{i\lambda\theta_{2k}}+\bar s_{2k}\bar\psi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{2k}})=0\ , \qquad (27\beta)$$

ἐκ δέ τῶν σχέσεων (26) προκύπτουν ὁμοίως αἱ ἑξῆς σχέσεις:

$$\gamma_{1k}^{\lambda}(p_{1k}\varphi_{1k}e^{i\lambda\theta_{1k}}+\bar p_{1k}\bar\varphi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{1k}})+\gamma_{2k}^{\lambda}(p_{2k}\psi_{1k}e^{i\lambda\theta_{2k}}+\bar p_{2k}\bar\psi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{2k}})=0\ , \qquad (28\alpha)$$

$$\gamma_{1k}^{\lambda}(q_{1k}\varphi_{1k}e^{i\lambda\theta_{1k}}+\bar q_{1k}\bar\varphi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{1k}})+\gamma_{2k}^{\lambda}(q_{2k}\psi_{1k}e^{i\lambda\theta_{2k}}+\bar q_{2k}\bar\psi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{2k}})=0. \qquad (28\beta)$$

Μετά τήν περίπτωσιν τῶν ἀνισοτρόπων μέσων ἐξετάζομεν τήν περίπτωσιν, ὅπου ἐκ δύο διαδοχικῶν μέσων (K-1) καί K τό μέν πρῶτον εἶναι ἰσότροπον, τό δεύτερον ἀνισότροπον, ὁπότε δι'ἐναλλαγῆς τῶν δεικτῶν(K-1) καί K εἰς τάς σχέσεις, αἵτινες θά προκύψουν οὕτω, θά ἔχωμεν καί τήν περίπτωσιν, ὅπου τό μέσον (K-1) εἶναι ἀνισότροπον καί τό μέσον K ἰσότροπον. Ἤδη αἱ σχέσεις (7) λόγῳ τῶν (8) λαμβάνουν παρά τό σημεῖον O καί διά τά σημεῖα t_k τῆς εὐθείας L_K τήν ἑξῆς μορφήν:

$$\varphi_{1(k-1)}t_k^{\lambda}+\varphi_{2(k-1)}t_k^{\bar\lambda}+\lambda\bar\varphi_{1(k-1)}t_k\bar t_k^{\bar\lambda-1}+\lambda\bar\varphi_{2(k-1)}t_k\bar t_k^{\lambda-1}+\bar\psi_{1(k-1)}\bar t_k^{\bar\lambda}+\bar\psi_{2(k-1)}\bar t_k^{\lambda}=$$
$$=(1+is_{1k})(\varphi_{1k}t_{1k}^{\lambda}+\varphi_{2k}t_{1k}^{\bar\lambda})+(1+i\bar s_{1k})(\bar\varphi_{1k}\bar t_{1k}^{\bar\lambda}+\bar\varphi_{2k}\bar t_{1k}^{\lambda})+$$
$$+(1+is_{2k})(\psi_{1k}t_{2k}^{\lambda}+\psi_{2k}t_{2k}^{\bar\lambda})+(1+i\bar s_{2k})(\bar\psi_{1k}\bar t_{2k}^{\bar\lambda}+\bar\psi_{2k}\bar t_{2k}^{\lambda})\ , \qquad (29\alpha)$$

$$\frac{1}{\mu_{k-1}}\Big[\kappa_{k-1}\varphi_{1(k-1)}t_k^{\lambda}+\kappa_{k-1}\varphi_{2(k-1)}t_k^{\bar\lambda}-\lambda\bar\varphi_{1(k-1)}t_k\bar t_k^{\bar\lambda-1}-\lambda\bar\varphi_{2(k-1)}t_k\bar t_k^{\lambda-1}-\bar\psi_{1(k-1)}\bar t_k^{\bar\lambda}-\bar\psi_{2(k-1)}\bar t_k^{\lambda}\Big]=$$
$$=(p_{1k}+iq_{1k})(\varphi_{1k}t_{1k}^{\lambda}+\varphi_{2k}t_{1k}^{\bar\lambda})+(\bar p_{1k}+i\bar q_{1k})(\bar\varphi_{1k}\bar t_{1k}^{\bar\lambda}+\bar\varphi_{2k}\bar t_{2k}^{\lambda})+$$
$$+(p_{2k}+iq_{2k})(\psi_{1k}t_{2k}^{\lambda}+\psi_{2k}t_{2k}^{\bar\lambda})+(\bar p_{2k}+i\bar q_{2k})(\bar\psi_{1k}\bar t_{2k}^{\bar\lambda}+\bar\psi_{2k}\bar t_{2k}^{\lambda})\ . \qquad (29\beta)$$

Λαμβανομένων περαιτέρω ὑπ'ὄψιν τῶν σχέσεων (11) καί (20β)

./.

αἱ σχέσεις (29) γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$\varphi_{1(k-1)}\tau^{\lambda}e^{i\lambda\theta_k}+\varphi_{2(k-1)}\tau^{\bar\lambda}e^{i\bar\lambda\theta_k}+\bar\lambda\bar\varphi_{1(k-1)}\tau^{\bar\lambda}e^{i(2-\bar\lambda)\theta_k}+\lambda\bar\varphi_{2(k-1)}\tau^{\lambda}e^{i(2-\lambda)\theta_k}+$$
$$+\bar\psi_{1(k-1)}\tau^{\bar\lambda}e^{-i\bar\lambda\theta_k}+\bar\psi_{2(k-1)}\tau^{\lambda}e^{-i\lambda\theta_k}=(1+is_{1k})(\varphi_{1k}\gamma_{1k}^{\lambda}\tau^{\lambda}e^{i\lambda\theta_{1k}}+\varphi_{2k}\gamma_{1k}^{\bar\lambda}\tau^{\bar\lambda}e^{i\bar\lambda\theta_{1k}})+$$
$$+(1+i\bar s_{1k})(\bar\varphi_{1k}\gamma_{1k}^{\bar\lambda}\tau^{\bar\lambda}e^{-i\bar\lambda\theta_{1k}}+\bar\varphi_{2k}\gamma_{1k}^{\lambda}\tau^{\lambda}e^{-i\lambda\theta_{1k}})+(1+is_{2k})(\psi_{1k}\gamma_{2k}^{\lambda}\tau^{\lambda}e^{i\lambda\theta_{2k}}+$$
$$+\psi_{2k}\gamma_{2k}^{\bar\lambda}\tau^{\bar\lambda}e^{i\bar\lambda\theta_{2k}})+(1+i\bar s_{2k})(\bar\psi_{1k}\gamma_{2k}^{\bar\lambda}\tau^{\bar\lambda}e^{-i\bar\lambda\theta_{2k}}+\bar\psi_{2k}\gamma_{2k}^{\lambda}\tau^{\lambda}e^{-i\lambda\theta_{2k}}), \qquad (30\alpha)$$

$$\frac{1}{\mu_{k-1}}\Big[\kappa_{k-1}\varphi_{1(k-1)}\tau^{\lambda}e^{i\lambda\theta_k}+\kappa_{k-1}\varphi_{2(k-1)}\tau^{\bar\lambda}e^{i\bar\lambda\theta_k}-\bar\lambda\bar\varphi_{1(k-1)}\tau^{\bar\lambda}e^{i(2-\bar\lambda)\theta_k}-\lambda\bar\varphi_{2(k-1)}\tau^{\lambda}e^{i(2-\lambda)\theta_k}-$$
$$-\bar\psi_{1(k-1)}\tau^{\bar\lambda}e^{-i\bar\lambda\theta_k}-\bar\psi_{2(k-1)}\tau^{\lambda}e^{-i\lambda\theta_k}\Big]=(p_{1k}+iq_{1k})(\varphi_{1k}\gamma_{1k}^{\lambda}\tau^{\lambda}e^{i\lambda\theta_{1k}}+\varphi_{2k}\gamma_{1k}^{\bar\lambda}\tau^{\bar\lambda}e^{i\bar\lambda\theta_{1k}})+$$
$$+(\bar p_{1k}+i\bar q_{1k})(\bar\varphi_{1k}\gamma_{1k}^{\bar\lambda}\tau^{\bar\lambda}e^{-i\bar\lambda\theta_{1k}}+\bar\varphi_{2k}\gamma_{1k}^{\lambda}\tau^{\lambda}e^{-i\lambda\theta_{1k}})+(p_{2k}+iq_{2k})(\psi_{1k}\gamma_{2k}^{\lambda}\tau^{\lambda}e^{i\lambda\theta_{2k}}+$$
$$+\psi_{2k}\gamma_{2k}^{\bar\lambda}\tau^{\bar\lambda}e^{i\bar\lambda\theta_{2k}})+(\bar p_{2k}+i\bar q_{2k})(\bar\psi_{1k}\gamma_{2k}^{\bar\lambda}\tau^{\bar\lambda}e^{-i\bar\lambda\theta_{2k}}+\bar\psi_{2k}\gamma_{2k}^{\lambda}\tau^{\lambda}e^{-i\lambda\theta_{2k}}). \qquad (30\beta)$$

Θεωροῦντες τό λ μιγαδικόν ἀριθμόν διά τ μεταβαλλόμενον αἱ σχέσεις (30) ἰσχύουν, ἐφ'ὅσον οἱ συντελεσταί τῶν τ^{λ} καί $\tau^{\bar\lambda}$ εἶναι ἴσοι πρός μηδέν, ὅτε ἔχομεν:

$$\varphi_{1(k-1)}e^{i\lambda\theta_k}+\lambda\bar\varphi_{2(k-1)}e^{i(2-\lambda)\theta_k}+\psi_{2(k-1)}e^{-i\lambda\theta_k}-(1+is_{1k})\gamma_{1k}^{\lambda}\varphi_{1k}e^{i\lambda\theta_{1k}}-$$
$$-(1+i\bar s_{1k})\gamma_{1k}^{\lambda}\bar\varphi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{1k}}-(1+is_{2k})\gamma_{2k}^{\lambda}\psi_{1k}e^{i\lambda\theta_{2k}}-(1+i\bar s_{2k})\gamma_{2k}^{\lambda}\bar\psi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{2k}}=0, \qquad (31\alpha)$$

$$\bar\varphi_{2(k-1)}e^{-i\lambda\theta_k}+\lambda\varphi_{1(k-1)}e^{-i(2-\lambda)\theta_k}+\psi_{1(k-1)}e^{i\lambda\theta_k}-(1-i\bar s_{1k})\gamma_{1k}^{\lambda}\bar\varphi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{1k}}-$$
$$-(1-is_{1k})\gamma_{1k}^{\lambda}\varphi_{1k}e^{i\lambda\theta_{1k}}-(1-i\bar s_{2k})\gamma_{2k}^{\lambda}\bar\psi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{2k}}-(1-is_{2k})\gamma_{2k}^{\lambda}\psi_{1k}e^{i\lambda\theta_{1k}}=0, \qquad (31\beta)$$

$$\frac{1}{\mu_{k-1}}\Big[\kappa_{k-1}\varphi_{1(k-1)}e^{i\lambda\theta_k}-\lambda\bar\varphi_{2(k-1)}e^{i(2-\lambda)\theta_k}-\bar\psi_{2k}e^{-i\lambda\theta_k}\Big]-(p_{1k}+iq_{1k})\gamma_{1k}^{\lambda}\varphi_{1k}e^{i\lambda\theta_{1k}}-$$
$$-(\bar p_{1k}+i\bar q_{1k})\gamma_{1k}^{\lambda}\bar\varphi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{1k}}-(p_{2k}+iq_{2k})\gamma_{2k}^{\lambda}\psi_{1k}e^{i\lambda\theta_{2k}}-(\bar p_{2k}+i\bar q_{2k})\gamma_{2k}^{\lambda}\bar\psi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{2k}}=0, \qquad (31\gamma)$$

$$\frac{1}{\mu_{k-1}}\Big[\kappa_{k-1}\bar\varphi_{2(k-1)}e^{-i\lambda\theta_k}-\lambda\varphi_{1(k-1)}e^{-i(2-\lambda)\theta_k}-\psi_{1k}e^{i\lambda\theta_k}\Big]-(\bar p_{1k}-i\bar q_{1k})\gamma_{1k}^{\lambda}\bar\varphi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{1k}}-$$
$$-(p_{1k}-iq_{1k})\gamma_{1k}^{\lambda}\varphi_{1k}e^{i\lambda\theta_{1k}}-(\bar p_{2k}-i\bar q_{2k})\gamma_{2k}^{\lambda}\bar\psi_{2k}e^{-i\lambda\theta_{2k}}-(p_{2k}-iq_{2k})\gamma_{2k}^{\lambda}\psi_{1k}e^{i\lambda\theta_{2k}}=0. \qquad (31\delta)$$

τῶν σχέσεων (31α) καί (31γ) προκυψασῶν ἐκ μηδενισμοῦ τῶν συντελεστῶν τῶν τ^{λ} τῶν σχέσεων (30α) καί (30β) ἀντιστοίχως, τῶν δέ σχέσεων (31β) καί (31δ) προκυψασῶν ἐκ μηδενισμοῦ τῶν συντελεστῶν τῶν $\tau^{\bar\lambda}$ τῶν σχέσεων (30α) καί (30β) ἀντιστοίχως καί θεωρήσεως τῶν συζυγῶν παραστάσεων τούτων.

Αἱ σχέσεις (31) εἶναι αἱ τελικαί σχέσεις διά τήν περίπτωσιν δύο διαδοχικῶν μέσων, ἐξ ὧν τό ἕν εἶναι ἰσότροπον, τό δ'ἕτερον ἀνισότροπον.

./.

῎Ηδη, συμφώνως πρός τήν ἀνωτέρω ἀνάπτυξιν καί ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐάν τά μέσα Ι, 2,...,Κ,...,η-1 ἤ καί η, ἐφ'ὅσον ὁ τομεύς S_η καταλαμβάνεται ὑπό ὑλικοῦ, εἶναι ἰσότροπα ἤ ἀνισότροπα, θά ἰσχύουν δι'ἑκάστην τῶν εὐθειῶν L_K τέσσαρες σχέσεις ὡς αἱ (Ι5), (24) καί (3Ι) ἀναλόγως τοῦ ἐάν ἔχωμεν ἑκατέρωθεν τῆς L_K ἰσότροπα, ἀνισότροπα ἤ ἕν ἰσότροπον καί ἕν ἀνισότροπον μέσα ἀντιστοίχως πλήν τῶν εὐθειῶν L_1 καί L_η, εἰς περίπτωσιν ὅπου ὁ τομεύς S_η εἶναι κενός, δι'ἑκάστην τῶν ὁποίων θά ἰσχύουν δύο σχέσεις ὡς αἱ (Ι8), (Ι9), (25) καί(26) ἀναλόγως τοῦ ἐάν ἔχωμεν ἰσότροπον ἤ ἀνισότροπον μέσον παρά τάς L_1 καί L_η καί περαιτέρω ἐάν εἴμεθα εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου ἤ τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος.

᾿Ανεξαρτήτως πάντως τῶν οὕτω διακρινομένων περιπτώσεων ὁ ἀριθμός τῶν διατιθεμένων συνολικῶς σχέσεων δι'ὅλας τάς εὐθείας L_K ἰσοῦται μέ τόν τετραπλάσιον ἀριθμόν τῶν συντρεχόντων ὑλικῶν μέσων εἰς τό σημεῖον Ο.᾿Αφ'ἑτέρου ἐκ τῶν σχέσεων (8), ἰσχυουσῶν εἴτε δι'ἰσότροπα εἴτε δι'ἀνισότροπα μέσα, παρατηροῦμεν ὅτι πέραν τῆς σταθερᾶς λ, κοινῆς δι'ὅλα τά μέσα, ἀπαιτεῖται δι'ἕκαστον μέσον ὁ προσδιορισμός τεσσάρων σταθερῶν φ_{1k}, φ_{2k}, ψ_{1k} καί ψ_{2k} ,ἵνα θεωρῆται γνωστή ἡ ἐντατική κατάστασις εἰς αὐτό παρά τό σημεῖον Ο.῎Αρα ὁ ἀριθμός τῶν πρός προσδιορισμόν σταθερῶν δι'ὅλα τά μέσα ἰσοῦται πρός τόν ἀριθμόν τῶν διατιθεμένων σχέσεων, αἵτινες ἀποτελοῦν σύστημα πρωτοβαθμίων ὁμογενῶν ἐξισώσεων ὡς πρός τάς σταθεράς αὐτάς.῞Ινα δέ τό σύστημα τοῦτο ἔχῃ λύσιν, πλήν τῆς μηδενικῆς, ἀπαιτεῖται ὅπως ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν προσδιοριστέων σταθερῶν εἶναι μηδενική.῾Η συνθήκη αὕτη ἀποτελεῖ μίαν ὑπερβατικήν ἐξίσωσιν, ἐκ τῆς ὁποίας θά προκύψῃ ἡ τιμή τῆς σταθερᾶς λ, ἰδιοτιμῆς τοῦ ἐν λόγῳ προβλήματος,

./.

ὑπό τούς περιορισμούς (9).'Ακολούθως δέ ἐκ τοῦ συστήματος τῶν ὁμογενῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων θά προκύψουν αἱ σταθεραί φ_{1k}, φ_{2k}, ψ_{1k} καί ψ_{2k} τῶν μέσων Κ ἀνάλογοι ἅπασαι πρός μίαν αὐθαίρετον σταθεράν ἐξαρτωμένην ἐκ τῆς ὅλης φορτίσεως τοῦ συνθέτου δοκιμίου καί μή δυναμένης νά προσδιορισθῇ διά τῆς μελετωμένης ἐν προκειμένῳ ἀσυμπτω τικῆς ἐκφράσεως τῆς ἐντατικῆς καταστάσεως παρά τό ἀνώμαλον σημεῖον Ο. Δηλαδή ἐνταῦθα εὑρίσκομεν τάς σταθεράς φ_{1k}, φ_{2k}, ψ_{1k} καί ψ_{2k} κατά προσέγγισιν σταθερᾶς ἀναλογίας τῆς τελευταίας δυναμένης νά θεωρηθῇ ὡς μία μορφή συντελεστοῦ συγκεντρώσεως τάσεως.

Σημειοῦμεν ἐπίσης ὅτι αἱ μετατοπίσεις παρά τό σημεῖον Ο, λόγω τῆς μορφῆς τῶν σχέσεων (8), θά εἶναι ἀνάλογοι τοῦ παράγοντος $\mathrm{Re}\,\tau^{\lambda}$ ἤ τοῦ $\mathrm{Im}\,\tau^{\lambda}$, ἐνῷ αἱ τάσεις καί αἱ παραμορφώσεις τοῦ παράγοντος $\mathrm{Re}\,\tau^{\lambda-1}$ ἤ τοῦ $\mathrm{Im}\,\tau^{\lambda-1}$,ὅτε, λόγῳ τῶν περιορισμῶν (9), ὑπάρχει συγκέντρωσις, δηλαδή ἀπειρισμός, τῶν τάσεων καί παραμορφώσεων παρά τό σημεῖον Ο, ἐφ'ὅσον βεβαίως εὑρεθῇ τιμή τοῦ λ ἱκανοποιοῦσα τούς περιορισμούς (9), ὄχι ὅμως καί τῶν μετατοπίσεων, αἵτινες προφανῶς δέν δύνανται νά τείνουν εἰς τό ἄπειρον παρά τό σημεῖον Ο, καθ'ὅσον πρέπει πάντοτε νά εἶναι πεπερασμέναι, ἐνταῦθα δέ ἐθεωρήθη περαιτέρω τό σημεῖον Ο ὡς ἀκίνητον.

4. Παρατηρήσεις διά Πραγματικόν λ.

'Εάν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ ἀριθμός λ είς τάς σχέσεις (8) εἶναι πραγματικός, ἤ ἁπλῶς ὑποθέτωμεν τοῦτο, δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν είς τάς σχέσεις (3.8) ὅτι εἶναι: $\varphi_{2k}=\psi_{2k}=0$, διά πᾶν Κ, ὅτε αὗται λαμβάνουν τήν μορφήν:

$$\varphi_k(z)=\varphi_{1k}z^{\lambda}, \tag{1α}$$

$$\psi_k(z)=\psi_{1k}z^{\lambda} \tag{1β}$$

ὑπό τόν περιορισμόν:

$$0<\operatorname{Re}\lambda<1. \tag{2}$$

Θεωροῦντες ἤδη τήν περίπτωσιν δύο διαδοχικῶν ἰσοτρόπων μέσων (Κ-1) καί Κ θά ἔχωμεν ἁπλοποίησιν τῶν σχέσεων (3,10), διότι εἶναι:

$$\varphi_{2k}=\psi_{2k}=0 \tag{3}$$

καί περαιτέρω αἱ σχέσεις (3.12) λαμβάνουν τήν κάτωθι μορφήν, λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι ὁ ἀριθμός λ εἶναι πραγματικός, διά πολλαπλασιασμοῦ ὅλων τῶν ὅρων των ἐπί $\tau^{-\lambda}e^{i\lambda\theta_k}$:

$$\varphi_{1(k-1)}e^{2i\lambda\theta_k}+\lambda\bar{\varphi}_{1(k-1)}e^{2i\theta_k}+\bar{\psi}_{1(k-1)}=\varphi_{1k}e^{2i\lambda\theta_k}+\lambda\bar{\varphi}_{1k}e^{2i\theta_k}+\bar{\psi}_{1k}, \tag{4α}$$

$$\mu_k[\kappa_{k-1}\varphi_{1(k-1)}e^{2i\lambda\theta_k}-\lambda\bar{\varphi}_{1(k-1)}e^{2i\theta_k}-\bar{\psi}_{1(k-1)}]=\mu_{k-1}[\kappa_k\varphi_{1k}e^{2i\lambda\theta_k}-\lambda\bar{\varphi}_{1k}e^{2i\theta_k}-\bar{\psi}_{1k}]. \tag{4β}$$

Θεωροῦντες καί τάς συζυγεῖς μιγαδικάς ἐκφράσεις τῶν σχέσεων (4) λαμβάνομεν τελικῶς τάς ἑξῆς σχέσεις:

$$(\varphi_{1(k-1)}-\varphi_{1k})e^{2i\lambda\theta_k}+\lambda(\bar{\varphi}_{1(k-1)}-\bar{\varphi}_{1k})e^{2i\theta_k}+(\bar{\psi}_{1(k-1)}-\bar{\psi}_{1k})=0, \tag{5α}$$

$$(\bar{\varphi}_{1(k-1)}-\bar{\varphi}_{1k})e^{-2i\lambda\theta_k}+\lambda(\varphi_{1(k-1)}-\varphi_{1k})e^{-2i\theta_k}+(\psi_{1(k-1)}-\psi_{1k})=0, \tag{5β}$$

$$(\mu_k\kappa_{k-1}\varphi_{1(k-1)}-\mu_{k-1}\kappa_k\varphi_{1k})e^{2i\lambda\theta_k}-\lambda(\mu_k\bar{\varphi}_{1(k-1)}-\mu_{k-1}\bar{\varphi}_{1k})e^{2i\theta_k}-(\mu_k\bar{\psi}_{1(k-1)}-\mu_{k-1}\bar{\psi}_{1k})=0, \tag{5γ}$$

$$(\mu_k\kappa_{k-1}\bar{\varphi}_{1(k-1)}-\mu_{k-1}\kappa_k\bar{\varphi}_{1k})e^{-2i\lambda\theta_k}-\lambda(\mu_k\varphi_{1(k-1)}-\mu_{k-1}\varphi_{1k})e^{-2i\theta_k}-(\mu_k\psi_{1(k-1)}-\mu_{k-1}\psi_{1k})=0. \tag{5δ}$$

Αἱ σχέσεις ὅμως αὗται δέν διαφέρουν τῶν (3.Ι5), εἰ μή καθ'ὅσον ἀντί τῶν μεγεθῶν $\bar{\varphi}_{2k}$ καί $\bar{\psi}_{2k}$ ἔχομεν τώρα τά μεγέθη $\bar{\varphi}_{1k}$ καί $\bar{\psi}_{1k}$ ἀντιστοίχως διά πᾶν Κ.

Τά αὐτά συμπεράσματα συνάγομεν καί ἐάν θεωρήσωμεν καί τάς ὑπολοίπους εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον ἐξετασθείσας περιπτώσεις ἰσοτρόπων ἤ ἀνισοτρόπων μέσων καί πρώτου, δευτέρου ἤ τρίτου θεμελιώδους προβλήματος. Οὕτωςὅμως, ἐπειδή ἡ ἐξίσωσις, ἥτις σχηματίζεται πρός προσδιορισμόν τοῦ λ,οὐδόλως ἐπηρεάζεται εἴτε οἱ ἄγνωστοι τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, ἐκ μηδενισμοῦ τῶν συντελεστῶν τῶν ὁποίων προκύπτει, εἶναι οἱ φ_{1k} , $\overline{\varphi}_{2k}$, ψ_{1k} καί $\overline{\psi}_{2k}$,ὡς εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον, εἴτε οἱ φ_{1k} , $\overline{\varphi}_{1k}$, ψ_{1k} καί $\overline{\psi}_{1k}$,ὡς εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον, ὅπου ὅμως ἀπαιτεῖται ὅπως ὁ λ προκύψῃ πραγματικός ἀριθμός, ἕπεται ὅτι ἡ προκύπτουσα τιμή τοῦ λ, ἔστω καί ἐάν ὁ λ εἰχε θεωρηθῆ πραγματικός ἀριθμός, εὑρεθῆ δέ ἐκ τοῦ μηδενισμοῦ τῆς ὁριζούσης μιγαδικός, θά εἶναι ὀρθή.

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅμως θεωρήσεως τοῦ λ ὡς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, εὑρέσεως δέ τούτου μιγαδικοῦ, καίτοι ἡ μιγαδική αὕτη τιμή εἶναι ὀρθή, τό ἄτοπον θά φανῇ ἐάν ἀναζητηθοῦν περαιτέρω αἱ τιμαί τῶν φ_{1k} , $\overline{\varphi}_{1k}$, ψ_{1k} καί $\overline{\psi}_{1k}$ τῶν σχέσεων (1) αἱ ἐπαληθεύουσαι τό σύστημα τῶν ὁμογενῶν ἐξισώσεων, ἐκ τοῦ ὁποίου προέκυψεν ἡ ὁρίζουσα πρός προσδιορισμόν τοῦ λ, ὁπότε, ἐκτός ἐάν τό λ εἶναι πραγματικός ἀριθμός, ὡς εἰχε θεωρηθῆ, τά φ_{1k} καί $\overline{\varphi}_{1k}$ ὡς καί τά ψ_{1k} καί $\overline{\psi}_{1k}$ δέν θά εἶναι συζυγεῖς μιγαδικοί ἀριθμοί, θά εἶναι δηλαδή τά μεγέθη φ_{1k} , $\overline{\varphi}_{2k}$, ψ_{1k} καί $\overline{\psi}_{2k}$ ἀντιστοίχως τῶν σχέσεων(3.8).

Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην ἐξ ἄλλου ἡ σχέσις (4β) δέν εἶναι ἡ συζυγής τῆς (4α), καθ' ὅσον πρέπει νά ἀντικαταστήσωμεν τό λ διά τοῦ $\bar{\lambda}$, διά νά λάβωμεν τήν ὀρθήν ἔκφρασιν τῆς (4β) ἤ καί τῶν ἀναλόγων ταύτης σχέσεων.

Σκεπτόμενοι ἤδη ἀντιστρόφως χρησιμοποιοῦμεν τάς σχέσεις

./.

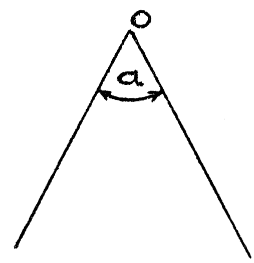
(3.8) κανονικῶς καί εἰς τάς περιπτώσεις, ὅπου ὑποθέτομεν ὅτι τό λ θά προκύψῃ πραγματικός ἀριθμός, χωρίς δηλαδή νά θεωρῶμεν ὅτι $\varphi_{2k} = \psi_{2k} = 0$, διά πᾶν K, ἐάν δέ προκύψῃ πραγματική τιμή τοῦ λ, δυνάμεθα νά εἴπωμεν εὐθύς ὅτι εἶναι $\varphi_{2k} = \psi_{2k} = 0$ διά πᾶν K, εὑρίσκομεν δέ τά φ_{1k}, $\overline{\varphi}_{1k}$, ψ_{1k} καί $\overline{\psi}_{1k}$ ἐκ τοῦ συστήματος τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων. Ἐάν ὅμως θεωρήσωμεν ὅτι εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ συστήματος τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων τά μεγέθη φ_{1k}, $\overline{\varphi}_{2k}$, ψ_{1k} καί $\overline{\psi}_{2k}$ τῶν ἐξισώσεων (3.8), τότε θά εἶναι, συμφώνως πρός ὅσα ἀνεφέρθησαν προηγουμένως, τά φ_{1k} καί $\overline{\varphi}_{2k}$ ὡς καί τά ψ_{1k} καί $\overline{\psi}_{2k}$ συζυγεῖς μιγαδικοί ἀριθμοί ἤ ἄλλως θά εἶναι: $\varphi_{1k} = \varphi_{2k}$ καί $\psi_{1k} = \psi_{2k}$ καί αἱ ἐξισώσεις (3.8) θά λάβουν τήν ἑξῆς μορφήν:

$$\varphi_k(z) = 2\varphi_{1k} z^{\lambda}, \qquad (6\alpha)$$

$$\psi_k(z) = 2\psi_{1k} z^{\lambda}, \qquad (6\beta)$$

τῶν σχέσεων τούτων ταυτιζομένων πρός τάς σχέσεις (1) λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι ἕν σύστημα ὁμογενῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ, ἐάν ἔχῃ μίαν μή μηδενικήν λύσιν, τότε ἔχει ὡς λύσεις καί τάς προκυπτούσας ἐκ ταύτης διά πολλαπλασιασμοῦ ὅλων τῶν προσδιορισθεισῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων ἐπί τυχόντα σταθερόν ἀριθμόν πραγματικόν ἤ μιγαδικόν. Ἐνγένει ἀπαιτεῖται πλήρης λύσις τοῦ ἐλαστικοῦ προβλήματος, ἵνα εὑρεθοῦν ἀκριβῶς αἱ τιμαί τῶν ἐν γένει μιγαδικῶν σταθερῶν φ_{1k}, φ_{2k}, ψ_{1k} καί ψ_{2k}, ἐνῷ διά τῆς παρούσης μεθόδου προσδιορίζονται αὗται κατά προσέγγισιν σταθερᾶς ἀναλογίας.

5. Σφήν ἐξ Ἰσοτρόπου Ὑλικοῦ.



Σχῆμα 5

Ἔστω α ἡ γωνία τοῦ σφηνός ὡς εἰς τό παραπλεύρως Σχῆμα 5. Θά ἐξετάσωμεν τάς περιπτώσεις τῶν τριῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων. Θεωροῦμεν τάς σχέσεις (3.8) μέ K=1 διά τόν σφῆνα ἐξ ἰσοτρόπου ὑλικοῦ.

Περίπτωσις πρώτου θεμελιώδους προβλήματος: Κατ'αὐτήν δίδονται αἱ τάσεις ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τοῦ σφηνός.

Εἰς τάςσχέσεις (3.I8) θέτοντες $\vartheta_k=0$ καί $\vartheta_k=\alpha$ διά τάς δύο πλευράς τοῦ σφηνός θά ἔχωμεν τάς ἑξῆς συνθήκας:

$$\varphi_{11}+\lambda\bar{\varphi}_{21}+\bar{\psi}_{21}=0, \tag{1α}$$

$$\bar{\varphi}_{21}+\lambda\varphi_{11}+\psi_{11}=0, \tag{1β}$$

$$\varphi_{11}e^{2i\lambda a}+\lambda\bar{\varphi}_{21}e^{2ia}+\bar{\psi}_{21}=0, \tag{1γ}$$

$$\bar{\varphi}_{21}e^{-2i\lambda a}+\lambda\varphi_{11}e^{-2ia}+\psi_{11}=0, \tag{1δ}$$

ὁπότε ἡ σταθερά λ προσδιορίζεται διά μηδενισμοῦ τῆς ὁριζούσης τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀνωτέρω συστήματος:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 0 \\ e^{2i\lambda a} & \lambda e^{2ia} & 0 & 1 \\ \lambda e^{-2ia} & e^{-2i\lambda a} & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

καί προκύπτει:

$$1-\cos 2\lambda a=\lambda^2(1-\cos 2a) \tag{3α}$$

ἤ μᾶλλον

$$\sin\lambda a=\pm\lambda\sin a. \tag{3β}$$

Περίπτωσις δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος: Κατ'αὐτήν δίδονται αἱ μετατοπίσεις ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τοῦ σφηνός.

Εἰς τάς σχέσεις (3.19) θέτοντες $\theta_k=0$ καί $\theta_k=\alpha$ διά τάς δύο πλευράς τοῦ σφηνός θά ἔχωμεν τάς ἑξῆς συνθήκας:

$$K_1\varphi_{11}-\lambda\bar{\varphi}_{21}-\bar{\psi}_{21}=0, \tag{4α}$$

$$K_1\bar{\varphi}_{21}-\lambda\varphi_{11}-\psi_{11}=0, \tag{4β}$$

$$K_1\varphi_{11}e^{2i\lambda\alpha}-\lambda\bar{\varphi}_{21}e^{2i\alpha}-\bar{\psi}_{21}=0, \tag{4γ}$$

$$K_1\bar{\varphi}_{21}e^{-2i\lambda\alpha}-\lambda\varphi_{11}e^{-2i\alpha}-\psi_{11}=0, \tag{4δ}$$

ὁπότε ἡ σταθερά λ προσδιορίζεται διά μηδενισμοῦ τῆς ὁριζούσης τοῦ ἀνωτέρω συστήματος:

$$\begin{vmatrix} K_1 & -\lambda & 0 & -1 \\ -\lambda & K_1 & -1 & 0 \\ K_1e^{2i\lambda\alpha} & -\lambda e^{2i\alpha} & 0 & -1 \\ -\lambda e^{-2i\alpha} & K_1e^{-2i\lambda\alpha} & -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \tag{5}$$

καί προκύπτει:

$$K_1^2(1-\cos 2\lambda\alpha)=\lambda^2(1-\cos 2\alpha) \tag{6α}$$

ἤ μᾶλλον:

$$K_1\sin\lambda\alpha=\pm\lambda\sin\alpha\ . \tag{6β}$$

Περίπτωσις τρίτου θεμελιώδους προβλήματος:Κατ'αὐτήν δίδονται αἱ τάσεις ἐπί τῆς μιᾶς πλευρᾶς τοῦ σφηνός καί αἱ μετατοπίσεις ἐπί τῆς ἑτέρας πλευρᾶς τοῦ σφηνός.

Εἰς τάς σχέσεις (3.18) θέτοντες $\theta_k=0$ διά τήν μίαν πλευράν τοῦ σφηνός, εἰς δέ τάς σχέσεις (3.19) $\theta_k=\alpha$ διά τήν ἑτέραν πλευράν τοῦ σφηνός θά ἔχωμεν τάς ἑξῆς συνθήκας:

$$\varphi_{11}+\lambda\bar{\varphi}_{21}+\bar{\psi}_{21}=0, \tag{7α}$$

$$\bar{\varphi}_{21}+\lambda\varphi_{11}+\psi_{11}=0, \tag{7β}$$

$$K_1\varphi_{11}e^{2i\lambda\alpha}-\lambda\bar{\varphi}_{21}e^{2i\alpha}-\bar{\psi}_{21}=0, \tag{7γ}$$

$$K_1\bar{\varphi}_{21}e^{-2i\lambda\alpha}-\lambda\varphi_{11}e^{-2i\alpha}-\psi_{11}=0, \tag{7δ}$$

./.

ὁπότε ἡ σταθερά λ προσδιορίζεται διά μηδενισμοῦ τῆς ὁριζούσης τοῦ ἀνωτέρω συστήματος:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 0 \\ K_1 e^{2i\lambda a} & -\lambda e^{2ia} & 0 & -1 \\ -\lambda e^{-2ia} & K_1 e^{-2i\lambda a} & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

καί προκύπτει:

$$1+K_1^2+2K_1\cos 2\lambda a = 2\lambda^2(1-\cos 2a) \qquad (9\alpha)$$

ἤ μᾶλλον:

$$4K_1\sin^2\lambda a+4\lambda^2\sin^2 a = (1+K_1)^2. \qquad (9\beta)$$

'Εφαρμογή εἰς τάς Ρωγμάς 'Εντός 'Ισοτρόπου Μέσου.

'Εξετάζομεν τήν ὁριακήν συμπεριφοράν τῶν συναρτήσεων $\varphi(Z)$ καί $\psi(Z)$ διά τάς περιπτώσεις τῶν τριῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων. 'Η γωνία τοῦ σφηνός εἶναι ἤδη α=2Π διά τήν περίπτωσιν ρωγμῶν.

Α. Περίπτωσις πρώτου θεμελιώδους προβλήματος:

Βάσει τῶν ἀνωτέρω ὁ τύπος (3β) δίδει:

$$\lambda=\frac{1}{2}. \qquad (10)$$

Β. Περίπτωσις δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος:

'Ομοίως ἐκ τοῦ τύπου (6β) εὑρίσκομεν:

$$\lambda=\frac{1}{2}. \qquad (11)$$

Γ. Περίπτωσις τρίτου θεμελιώδους προβλήματος:

'Αναλόγως ἐκ τοῦ τύπου (9β) λαμβάνομεν:

$$\sin 2\lambda\pi=\pm\frac{1+K_1}{2\sqrt{K_1}}, \qquad (12)$$

ἀπό ὅπου προκύπτει τελικῶς:

$$\lambda=\frac{1}{4}\pm\frac{\ln K_1}{4\pi i}. \qquad (13)$$

Τά ἀποτελέσματα ταῦτα εὑρέθησαν ὑπό διαφόρων ἐρευνητῶν, ὡς τοῦ ENGLAND (Ι4) καί ἄλλων.

6.Σφήν ἐξ 'Ανισοτρόπου 'Υλικοῦ.

"Εστω α ἡ γωνία τοῦ σφηνός ὡς εἰς τό Σχῆμα 5 ἀνωτέρω.Θά ἐξετάσωμεν, ὡς καί διά τόν σφῆνα ἐξ ἰσοτρόπου ὑλικοῦ, τάς περιπτώσεις τῶν τριῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων.Θεωροῦμεν τάς σχέσεις (3.8) μέ K=1 διά τόν σφῆνα ἐξ ἀνισοτρόπου ὑλικοῦ.Θέτομεν ἐπίσης:

$$s_{j1}=a_{j1}+ib_{j1}=\rho_{j1}e^{i\sigma_{j1}}\ ,\quad j=1,2\ , \tag{1α}$$

$$p_{j1}=p_{j11}+ip_{j21}=p_{j31}e^{ip_{j41}}\ ,\quad j=1,2\ , \tag{1β}$$

$$q_{j1}=q_{j11}+iq_{j21}=q_{j31}e^{iq_{j41}}\ ,\quad j=1,2\ . \tag{1γ}$$

Διά $\theta_k=0$ ἐκ τῶν σχέσεων (3.21α) λαμβάνομεν:

$$\gamma_{11}=\gamma_{21}=1\ , \tag{2}$$

ἐκ δέ τῶν σχέσεων (3.21β):

$$\theta_{11}=\theta_{21}=0\ . \tag{3}$$

Διά $\theta_k=α$ ἐκ τῶν σχέσεων (3.21α) λαμβάνομεν:

$$\gamma_{12}=\left[(\cos a+a_{11}\sin a)^2+(b_{11}\sin a)^2\right]^{1/2}\ , \tag{4α}$$

$$\gamma_{22}=\left[(\cos a+a_{21}\sin a)^2+(b_{21}\sin a)^2\right]^{1/2}\ , \tag{4β}$$

ἐκ δέ τῶν σχέσεων (3.21β):

$$\theta_{12}=\arg(\cos a+a_{11}\sin a+ib_{11}\sin a)\ , \tag{5α}$$

$$\theta_{22}=\arg(\cos a+a_{21}\sin a+ib_{21}\sin a)\ . \tag{5β}$$

Περίπτωσις πρώτου θεμελιώδους προβλήματος:Κατ'αὐτήν δίδονται αἱ τάσεις ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τοῦ σφηνός.

Εἰς τάς σχέσεις (3.27) θεωροῦντες θ_k =0 καί θ_k =α διά τάς δύο πλευράς τοῦ σφηνός θά ἔχωμεν τάς ἑξῆς συνθήκας λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν καί τάς σχέσεις (2-5):

$$\varphi_{11}+\bar{\varphi}_{21}+\psi_{11}+\bar{\psi}_{21}=0, \qquad (6\alpha)$$

$$s_{11}\varphi_{11}+\bar{s}_{11}\bar{\varphi}_{21}+s_{21}\psi_{11}+\bar{s}_{21}\bar{\psi}_{21}=0, \qquad (6\beta)$$

$$\gamma_{12}^{\lambda}\varphi_{11}e^{i\lambda\theta_{12}}+\bar{\gamma}_{12}^{\lambda}\bar{\varphi}_{21}e^{-i\lambda\theta_{12}}+\gamma_{22}^{\lambda}\psi_{11}e^{i\lambda\theta_{22}}+\bar{\gamma}_{22}^{\lambda}\bar{\psi}_{21}e^{-i\lambda\theta_{22}}=0, \qquad (6\gamma)$$

$$\gamma_{12}^{\lambda}s_{11}\varphi_{11}e^{i\lambda\theta_{12}}+\bar{\gamma}_{12}^{\lambda}\bar{s}_{11}\bar{\varphi}_{21}e^{-i\lambda\theta_{12}}+\gamma_{22}^{\lambda}s_{21}\psi_{11}e^{i\lambda\theta_{22}}+\bar{\gamma}_{22}^{\lambda}\bar{s}_{21}\bar{\psi}_{21}e^{-i\lambda\theta_{22}}=0, \qquad (6\delta)$$

ὁπότε ἡ σταθερά λ προσδιορίζεται διά μηδενισμοῦ τῆς ὁριζούσης τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀνωτέρω συστήματος:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ s_{11} & \bar{s}_{11} & s_{21} & \bar{s}_{21} \\ \gamma_{12}^{\lambda}e^{i\lambda\theta_{12}} & \gamma_{12}^{\lambda}e^{-i\lambda\theta_{12}} & \gamma_{22}^{\lambda}e^{i\lambda\theta_{22}} & \gamma_{22}^{\lambda}e^{-i\lambda\theta_{22}} \\ \gamma_{12}^{\lambda}s_{11}e^{i\lambda\theta_{12}} & \gamma_{12}^{\lambda}\bar{s}_{11}e^{-i\lambda\theta_{12}} & \gamma_{22}^{\lambda}s_{21}e^{i\lambda\theta_{22}} & \gamma_{22}^{\lambda}\bar{s}_{21}e^{-i\lambda\theta_{22}} \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Ἀθροίζοντες καί ἀφαιροῦντες κατά μέλη τά στοιχεῖα τῆς πρώτης καί τῆς δευτέρας ὡς καί τῆς τρίτης καί τῆς τετάρτης στήλης τῆς ὁριζούσης τῆς ἐξισώσεως (7) πρός προσδιορισμόν τοῦ λ γράφομεν, λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν καί τάς σχέσεις (1α), ταύτην μέ συντελεστάς πραγματικούς ἀριθμούς ὡς ἑξῆς:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{11} & \beta_{11} & \alpha_{21} & \beta_{21} \\ \gamma_{12}^{\lambda}\cos\lambda\theta_{12} & \gamma_{12}^{\lambda}\sin\lambda\theta_{12} & \gamma_{22}^{\lambda}\cos\lambda\theta_{22} & \gamma_{22}^{\lambda}\sin\lambda\theta_{22} \\ \gamma_{12}^{\lambda}\rho_{11}\cos(\lambda\theta_{12}+\sigma_{11}) & \gamma_{12}^{\lambda}\rho_{11}\sin(\lambda\theta_{12}+\sigma_{11}) & \gamma_{22}^{\lambda}\rho_{21}\cos(\lambda\theta_{22}+\sigma_{21}) & \gamma_{22}^{\lambda}\rho_{21}\sin(\lambda\theta_{22}+\sigma_{21}) \end{vmatrix}=0, \qquad (8)$$

ἀφαιροῦντες δέ τήν τρίτην ἀπό τῆς πρώτης στήλης ἔχομεν τελικῶς:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\alpha_{21} & \beta_{11} & \beta_{21} \\ \gamma_{12}^{\lambda}\cos\lambda\theta_{12}-\gamma_{22}^{\lambda}\cos\lambda\theta_{22} & \gamma_{12}^{\lambda}\sin\lambda\theta_{12} & \gamma_{22}^{\lambda}\sin\lambda\theta_{22} \\ \gamma_{12}^{\lambda}\rho_{11}\cos(\lambda\theta_{12}+\sigma_{11})-\gamma_{22}^{\lambda}\rho_{21}\cos(\lambda\theta_{22}+\sigma_{21}) & \gamma_{12}^{\lambda}\rho_{11}\sin(\lambda\theta_{12}+\sigma_{11}) & \gamma_{22}^{\lambda}\rho_{21}\sin(\lambda\theta_{22}+\sigma_{21}) \end{vmatrix}=0. \qquad (9)$$

Περίπτωσις δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος: Κατ'αὐτήν δίδονται αἱ μετατοπίσεις ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τοῦ σφηνός.

./.

Εἰς τάς σχέσεις (3.28) θεωροῦντες $\theta_k=0$ καί $\theta_k=\alpha$ θά ἔχωμεν τάς ἑξῆς συνθήκας λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν καί τάς σχέσεις (2-5):

$$p_{11}\varphi_{11}+\bar{p}_{11}\bar{\varphi}_{21}+p_{21}\psi_{11}+\bar{p}_{21}\bar{\psi}_{21}=0\,, \tag{10α}$$

$$q_{11}\varphi_{11}+\bar{q}_{11}\bar{\varphi}_{21}+q_{21}\psi_{11}+\bar{q}_{21}\bar{\psi}_{21}=0\,, \tag{10β}$$

$$\gamma_{12}^{\lambda}p_{11}\varphi_{11}e^{i\lambda\theta_{12}}+\gamma_{12}^{\lambda}\bar{p}_{11}\bar{\varphi}_{21}e^{-i\lambda\theta_{12}}+\gamma_{22}^{\lambda}p_{21}\psi_{11}e^{i\lambda\theta_{22}}+\gamma_{22}^{\lambda}\bar{p}_{21}\bar{\psi}_{21}e^{-i\lambda\theta_{22}}=0\,, \tag{10γ}$$

$$\gamma_{12}^{\lambda}q_{11}\varphi_{11}e^{i\lambda\theta_{12}}+\gamma_{12}^{\lambda}\bar{q}_{11}\bar{\varphi}_{21}e^{-i\lambda\theta_{12}}+\gamma_{22}^{\lambda}q_{21}\psi_{11}e^{i\lambda\theta_{22}}+\gamma_{22}^{\lambda}\bar{q}_{21}\bar{\psi}_{21}e^{-i\lambda\theta_{22}}=0\,, \tag{10δ}$$

ὁπότε ἡ σταθερά λ προσδιορίζεται διά μηδενισμοῦ τῆς ὁριζούσης τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀνωτέρω συστήματος:

$$\begin{vmatrix} p_{11} & \bar{p}_{11} & p_{21} & \bar{p}_{21} \\ q_{11} & \bar{q}_{11} & q_{21} & \bar{q}_{21} \\ \gamma_{12}^{\lambda}p_{11}e^{i\lambda\theta_{12}} & \gamma_{12}^{\lambda}\bar{p}_{11}e^{-i\lambda\theta_{12}} & \gamma_{22}^{\lambda}p_{21}e^{i\lambda\theta_{22}} & \gamma_{22}^{\lambda}\bar{p}_{21}e^{-i\lambda\theta_{22}} \\ \gamma_{12}^{\lambda}q_{11}e^{i\lambda\theta_{12}} & \gamma_{12}^{\lambda}\bar{q}_{11}e^{-i\lambda\theta_{12}} & \gamma_{22}^{\lambda}q_{21}e^{i\lambda\theta_{22}} & \gamma_{22}^{\lambda}\bar{q}_{21}e^{-i\lambda\theta_{22}} \end{vmatrix}=0. \tag{11}$$

'Αθροίζοντες καί ἀφαιροῦντες κατά μέλη τά στοιχεῖα τῆς πρώτης καί τῆς δευτέρας ὡς καί τῆς τρίτης καί τῆς τετάρτης στήλης τῆς ὁριζούσης τῆς ἐξισώσεως (11) πρός προσδιορισμόν τοῦ λ γράφομεν, λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν καί τάς σχέσεις (1 β-γ), ταύτην μέ συντελεστάς πραγματικούς ἀριθμούς ὡς ἑξῆς:

$$\begin{vmatrix} p_{111} & p_{121} & p_{211} & p_{221} \\ q_{111} & q_{121} & q_{211} & q_{221} \\ \gamma_{12}^{\lambda}p_{131}\cos(\lambda\theta_{12}+p_{141}) & \gamma_{12}^{\lambda}p_{131}\sin(\lambda\theta_{12}+p_{141}) & \gamma_{22}^{\lambda}p_{231}\cos(\lambda\theta_{22}+p_{241}) & \gamma_{22}^{\lambda}p_{231}\sin(\lambda\theta_{22}+p_{241}) \\ \gamma_{12}^{\lambda}q_{131}\cos(\lambda\theta_{12}+q_{141}) & \gamma_{12}^{\lambda}q_{131}\sin(\lambda\theta_{12}+q_{141}) & \gamma_{22}^{\lambda}q_{231}\cos(\lambda\theta_{22}+q_{241}) & \gamma_{22}^{\lambda}q_{231}\sin(\lambda\theta_{22}+q_{241}) \end{vmatrix}=0. \tag{12}$$

Περίπτωσις τρίτου θεμελιώδους προβλήματος: Κατ'αὐτήν δίδονται αἱ τάσεις ἐπί τῆς μιᾶς πλευρᾶς τοῦ σφηνός καί αἱ μετατοπίσεις ἐπί τῆς ἑτέρας πλευρᾶς τοῦ σφηνός.

./.

Εἰς τάς σχέσεις (3.27) θεωροῦντες $\theta_k=0$ διά τήν μίαν πλευράν τοῦ σφηνός, εἰς δέ τάς σχέσεις (3.28) $\theta_k=\alpha$ διά τήν ἑτέραν πλευράν τοῦ σφηνός θά ἔχωμεν τάς ἑξῆς συνθήκας λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν καί τάς σχέσεις (2-5):

$$\varphi_{11}+\bar{\varphi}_{21}+\psi_{11}+\bar{\psi}_{21}=0, \tag{13α}$$

$$s_{11}\varphi_{11}+\bar{s}_{11}\bar{\varphi}_{21}+s_{21}\psi_{11}+\bar{s}_{21}\bar{\psi}_{21}=0, \tag{13β}$$

$$\gamma_{12}^{\lambda}p_{11}\varphi_{11}e^{i\lambda\theta_{12}}+\gamma_{12}^{\lambda}\bar{p}_{11}\bar{\varphi}_{21}e^{-i\lambda\theta_{12}}+\gamma_{22}^{\lambda}p_{21}\psi_{11}e^{i\lambda\theta_{22}}+\gamma_{22}^{\lambda}\bar{p}_{21}\bar{\psi}_{21}e^{-i\lambda\theta_{22}}=0, \tag{13γ}$$

$$\gamma_{12}^{\lambda}q_{11}\varphi_{11}e^{i\lambda\theta_{12}}+\gamma_{12}^{\lambda}\bar{q}_{11}\bar{\varphi}_{21}e^{-i\lambda\theta_{12}}+\gamma_{22}^{\lambda}q_{21}\psi_{11}e^{i\lambda\theta_{22}}+\gamma_{22}^{\lambda}\bar{q}_{21}\bar{\psi}_{21}e^{-i\lambda\theta_{22}}=0, \tag{13δ}$$

ὁπότε ἡ σταθερά λ προσδιορίζεται διά μηδενισμοῦ τῆς ὁριζούσης τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀνωτέρω συστήματος:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ s_{11} & \bar{s}_{11} & s_{21} & \bar{s}_{21} \\ \gamma_{12}^{\lambda}p_{11}e^{i\lambda\theta_{12}} & \gamma_{12}^{\lambda}\bar{p}_{11}e^{-i\lambda\theta_{12}} & \gamma_{22}^{\lambda}p_{21}e^{i\lambda\theta_{22}} & \gamma_{22}^{\lambda}\bar{p}_{21}e^{-i\lambda\theta_{22}} \\ \gamma_{12}^{\lambda}q_{11}e^{i\lambda\theta_{12}} & \gamma_{12}^{\lambda}\bar{q}_{11}e^{-i\lambda\theta_{12}} & \gamma_{22}^{\lambda}q_{21}e^{i\lambda\theta_{22}} & \gamma_{22}^{\lambda}\bar{q}_{21}e^{-i\lambda\theta_{22}} \end{vmatrix}=0. \tag{14}$$

Ἀθροίζοντες καί ἀφαιροῦντες κατά μέλη τά στοιχεῖα τῆς πρώτης καί τῆς δευτέρας ὡς καί τῆς τρίτης καί τῆς τετάρτης στήλης τῆς ὁριζούσης τῆς ἐξισώσεως (14) πρός προσδιορισμόν τοῦ λ γράφομεν, λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν καί τάς σχέσεις (1), ταύτην μέ συντελεστάς πραγματικούς ἀριθμούς ὡς ἑξῆς:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a_{11} & b_{11} & a_{21} & b_{21} \\ \gamma_{12}^{\lambda}p_{131}\cos(\lambda\theta_{12}+p_{141}) & \gamma_{12}^{\lambda}p_{131}\sin(\lambda\theta_{12}+p_{141}) & \gamma_{22}^{\lambda}p_{231}\cos(\lambda\theta_{12}+p_{241}) & \gamma_{22}^{\lambda}p_{231}\sin(\lambda\theta_{12}+p_{241}) \\ \gamma_{12}^{\lambda}q_{131}\cos(\lambda\theta_{12}+q_{141}) & \gamma_{12}^{\lambda}q_{131}\sin(\lambda\theta_{12}+q_{141}) & \gamma_{22}^{\lambda}q_{231}\cos(\lambda\theta_{12}+q_{241}) & \gamma_{22}^{\lambda}q_{231}\sin(\lambda\theta_{12}+q_{241}) \end{vmatrix}=0, \tag{15}$$

ἀφαιροῦντες δέ τήν τρίτην ἀπό τῆς πρώτης στήλης ἔχομεν τελικῶς:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-a_{21} & b_{11} & b_{21} \\ \gamma_{12}^{\lambda}p_{131}\cos(\lambda\theta_{12}+p_{141})-\gamma_{22}^{\lambda}p_{231}\cos(\lambda\theta_{12}+p_{241}) & \gamma_{12}^{\lambda}p_{131}\sin(\lambda\theta_{12}+p_{141}) & \gamma_{22}^{\lambda}p_{231}\sin(\lambda\theta_{12}+p_{241}) \\ \gamma_{12}^{\lambda}q_{131}\cos(\lambda\theta_{12}+q_{141})-\gamma_{22}^{\lambda}q_{231}\cos(\lambda\theta_{12}+q_{241}) & \gamma_{12}^{\lambda}q_{131}\sin(\lambda\theta_{12}+q_{141}) & \gamma_{22}^{\lambda}q_{231}\sin(\lambda\theta_{12}+q_{241}) \end{vmatrix}=0. \tag{16}$$

'Εφαρμογή είς τάς Ρωγμάς 'Εντός 'Ανισοτρόπου Μέσου.

'Εξετάζομεν τήν όριακήν συμπεριφοράν τῶν συναρτήσεων $\varphi(Z)$ καί $\psi(Z)$ διά τάς περιπτώσεις τῶν τριῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων. 'Η γωνία τοῦ σφηνός εἶναι ἤδη $\alpha=2\pi$ διά τήν περίπτωσιν ρωγμῶν. 'Επίσης θεωροῦντες τό έξεταζόμενον ἄκρον τῆς ρωγμῆς κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος ἔχομεν διά τά σημεῖα t τῆς ρωγμῆς τάς σχέσεις:

$$t=t_1=t_2 \quad , \quad \gamma_1=\gamma_2=1 \quad , \theta=\theta_1=\theta_2=2\pi . \tag{17}$$

Α. Περίπτωσις πρώτου θεμελιώδους προβλήματος:

Βάσει τῶν άνωτέρω σχέσεων ό τύπος (7) δίδει:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ s_1 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_2 \\ e^{2\pi i\lambda} & e^{-2\pi i\lambda} & e^{2\pi i\lambda} & e^{-2\pi i\lambda} \\ s_1 e^{2\pi i\lambda} & \bar{s}_1 e^{-2\pi i\lambda} & s_2 e^{2\pi i\lambda} & \bar{s}_2 e^{-2\pi i\lambda} \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

'Η σχέσις (18) δι' έφαρμογῆς άπλῶν ίδιοτήτων τῶν όριζουσῶν περαιτέρω δίδει:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & s_1-\bar{s}_1 & s_1-s_2 & \bar{s}_1-\bar{s}_2 \\ e^{2\pi i\lambda} & e^{2\pi i\lambda}-e^{-2\pi i\lambda} & 0 & 0 \\ s_1 e^{2\pi i\lambda} & s_1 e^{2\pi i\lambda}-\bar{s}_1 e^{-2\pi i\lambda} & (s_1-s_2)e^{2\pi i\lambda} & (\bar{s}_1-\bar{s}_2)e^{-2\pi i\lambda} \end{vmatrix} = 0, \tag{19}$$

ὅτε λαμβάνομεν:

$$(s_1-s_2)(\bar{s}_1-\bar{s}_2)(e^{4\pi i\lambda}+e^{-4\pi i\lambda}-2)=0 \tag{20}$$

καί δεδομένου ὅτι εἶναι: $S_1 \neq S_2$ προκύπτει τελικῶς:

$$e^{4\pi i\lambda} = 1 \tag{21}$$

καί:

$$\lambda = \frac{1}{2}, \tag{22}$$

ὡς ἰσχύει καί διά τήν περίπτωσιν ρωγμῆς εἰς ἰσότροπον μέσον.

Β.Περίπτωσις δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος:

'Εργαζόμενοι κατ'ἀνάλογον τρόπον ἐκ τοῦ τύπου (11) εὑρίσκομεν κατά σειράν:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{q_1}{p_1} & \frac{\bar{q}_1}{\bar{p}_1} & \frac{q_2}{p_2} & \frac{\bar{q}_2}{\bar{p}_2} \\ e^{2\pi i\lambda} & e^{-2\pi i\lambda} & e^{2\pi i\lambda} & e^{-2\pi i\lambda} \\ \frac{q_1}{p_1}e^{2\pi i\lambda} & \frac{\bar{q}_1}{\bar{p}_1}e^{-2\pi i\lambda} & \frac{q_2}{p_2}e^{2\pi i\lambda} & \frac{\bar{q}_2}{\bar{p}_2}e^{-2\pi i\lambda} \end{vmatrix} = 0, \tag{23}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{q_1}{p_1} & \frac{q_1}{p_1}-\frac{\bar{q}_1}{\bar{p}_1} & \frac{q_1}{p_1}-\frac{q_2}{p_2} & \frac{\bar{q}_1}{\bar{p}_1}-\frac{\bar{q}_2}{\bar{p}_2} \\ e^{2\pi i\lambda} & e^{2\pi i\lambda}-e^{-2\pi i\lambda} & 0 & 0 \\ \frac{q_1}{p_1}e^{2\pi i\lambda} & \frac{q_1}{p_1}e^{2\pi i\lambda}-\frac{\bar{q}_1}{\bar{p}_1}e^{-2\pi i\lambda} & \left(\frac{q_1}{p_1}-\frac{q_2}{p_2}\right)e^{2\pi i\lambda} & \left(\frac{\bar{q}_1}{\bar{p}_1}-\frac{\bar{q}_2}{\bar{p}_2}\right)e^{-2\pi i\lambda} \end{vmatrix} = 0, \tag{24}$$

ὅτε λαμβάνομεν:

$$\left(\frac{q_1}{p_1}-\frac{q_2}{p_2}\right)\left(\frac{\bar{q}_1}{\bar{p}_1}-\frac{\bar{q}_2}{\bar{p}_2}\right)\left(e^{4\pi i\lambda}+e^{-4\pi i\lambda}-2\right) = 0 \tag{25}$$

καί ὑποθέτοντες ὅτι εἶναι: $\frac{q_1}{p_1} \neq \frac{q_2}{p_2}$ εὑρίσκομεν τελικῶς:

$$e^{4\pi i\lambda} = 1 \tag{26}$$

καί:

$$\lambda = \frac{1}{2}, \tag{27}$$

ὡς ἰσχύει καί διά τήν περίπτωσιν ρωγμῆς εἰς ἰσότροπον μέσον.

Γ.Περίπτωσις τρίτου θεμελιώδους προβλήματος:

Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην ἐκ τοῦ τύπου (14) εὑρίσκομεν κατά σειράν:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ s_1 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_2 \\ p_1 e^{2\pi i \lambda} & \bar{p}_1 e^{-2\pi i \lambda} & p_2 e^{2\pi i \lambda} & \bar{p}_2 e^{-2\pi i \lambda} \\ q_1 e^{2\pi i \lambda} & \bar{q}_1 e^{-2\pi i \lambda} & q_2 e^{2\pi i \lambda} & \bar{q}_2 e^{-2\pi i \lambda} \end{vmatrix} = 0, \tag{28}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & s_1-\bar{s}_1 & s_1-s_2 & \bar{s}_1-\bar{s}_2 \\ p_1 e^{2\pi i \lambda} & p_1 e^{2\pi i \lambda}-\bar{p}_1 e^{-2\pi i \lambda} & (p_1-p_2) e^{2\pi i \lambda} & (\bar{p}_1-\bar{p}_2) e^{-2\pi i \lambda} \\ q_1 e^{2\pi i \lambda} & q_1 e^{2\pi i \lambda}-\bar{q}_1 e^{-2\pi i \lambda} & (q_1-q_2) e^{2\pi i \lambda} & (\bar{q}_1-\bar{q}_2) e^{-2\pi i \lambda} \end{vmatrix} = 0, \tag{29}$$

ὅτε λαμβάνομεν δι'ἀναπτύξεως τῆς ἀνωτέρω ὁριζούσης:

$$\begin{aligned} &(s_1-\bar{s}_1)\left[(p_1-p_2)(\bar{q}_1-\bar{q}_2)-(\bar{p}_1-\bar{p}_2)(q_1-q_2)\right]+ \\ &+(\bar{s}_1-\bar{s}_2)\left[(p_1 e^{4\pi i \lambda}-\bar{p}_1)(q_1-q_2)-(q_1 e^{4\pi i \lambda}-\bar{q}_1)(p_1-p_2)\right]+ \\ &+(s_1-s_2)\left[(\bar{p}_1 e^{-4\pi i \lambda}-p_1)(\bar{q}_1-\bar{q}_2)-(\bar{q}_1 e^{-4\pi i \lambda}-q_1)(\bar{p}_1-\bar{p}_2)\right]=0 \end{aligned} \tag{30}$$

καί περαιτέρω:

$$\begin{aligned} &(\bar{s}_1-\bar{s}_2)(p_1 q_2-p_2 q_1) e^{4\pi i \lambda}+(s_1-s_2)(\bar{p}_1\bar{q}_2-\bar{p}_2\bar{q}_1) e^{-4\pi i \lambda}+ \\ &+s_1\left[p_2(\bar{q}_1-\bar{q}_2)-q_2(\bar{p}_1-\bar{p}_2)\right]+\bar{s}_1\left[\bar{p}_2(q_1-q_2)-\bar{q}_2(p_1-p_2)\right]- \\ &-s_2\left[p_1(\bar{q}_1-\bar{q}_2)-q_1(\bar{p}_1-\bar{p}_2)\right]-\bar{s}_2\left[\bar{p}_1(q_1-q_2)-\bar{q}_1(p_1-p_2)\right]=0, \end{aligned} \tag{31}$$

θέτοντες δέ:

$$K=\frac{Re\left[(\bar{p}_1-\bar{p}_2)(s_1 q_2-s_2 q_1)-(\bar{q}_1-\bar{q}_2)(s_1 p_2-s_2 p_1)\right]}{\left|(\bar{s}_1-\bar{s}_2)(p_1 q_2-p_2 q_1)\right|}, \tag{32a}$$

$$\vartheta_0=2k\pi-\arg\left[(\bar{s}_1-\bar{s}_2)(p_1 q_2-p_2 q_1)\right] \tag{32b}$$

ἐκ τῆς σχέσεως (I5) λαμβάνομεν:

$$K=\frac{e^{4\pi i \lambda-i\vartheta_0}+e^{-4\pi i \lambda+i\vartheta_0}}{2} \tag{33}$$

καί περαιτέρω:

$$K=\cos(4\pi\lambda-\vartheta_0), \tag{34}$$

τελικῶς δέ:

$$\lambda=\frac{\theta_o}{4\pi}\pm i\frac{\cosh^{-1}k}{4\pi}. \tag{35}$$

'Εάν θεωρήσωμεν ὅτι ἡ σταθερά τοῦ ὑλικοῦ κ ὁρισθεῖσα ἀνωτέρω εἶναι ἀπολύτως μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, ὁ τύπος (35) μᾶς δίδει τήν σταθεράν λ ὡς ἄθροισμα ἑνός πραγματικοῦ καί ἑνός φανταστικοῦ ὅρου, ὡς καί εἰς τά ἰσότροπα ὑλικά ἴσχυεν, ἐπειδή δέ ἐπιθυμοῦμεν νά εἶναι:

$$0<\mathrm{Re}\lambda<1 \tag{36}$$

καί λόγῳ τοῦ ὅτι ἐκ τῆς (32β) φαίνεται ὅτι ὑπάρχουν δύο τιμαι τῆς σταθερᾶς θ_o ἱκανοποιοῦσαι τήν συνθήκην:

$$0\leqslant\theta_o\leqslant 4\pi\ , \tag{37}$$

ὅτε ἡ σχέσις (35) δίδει δύο τιμάς τῆς σταθερᾶς $\mathrm{Re}\lambda$ ἱκανοποιούσας τήν συνθήκην (36), τῶν πραγματικῶν μερῶν των διαφερόντων κατά $\frac{1}{2}$, ὡς ἰσχύει καί διά τήν περίπτωσιν τῶν ἰσοτρόπων ὑλικῶν, ἡ ἰδιομορφία τῶν τάσεων παρά τό ἄκρον τῆς ρωγμῆς χαρακτηρίζεται προφανῶς ὑπό τῆς μικροτέρας τῶν δύο τούτων τιμῶν τῆς σταθερᾶς $\mathrm{Re}\lambda$, διά τήν ὁποίαν ἡ γωνία θ_o προκύπτει ἐκ τῆς (32β) διά $k=1$.

'Εάν ἡ σταθερά κ τοῦ ὑλικοῦ εἶναι ἀπολύτως μικροτέρα τῆς μονάδος, ὁ τύπος (35) μεταπίπτει εἰς τόν:

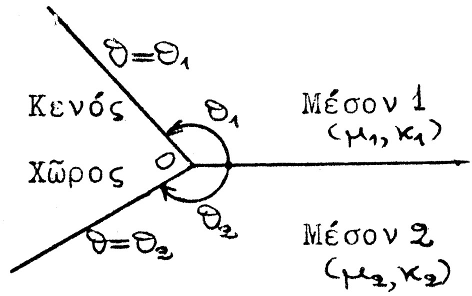
$$\lambda=\frac{\theta_o}{4\pi}\pm\frac{\cos^{-1}k}{4\pi}, \tag{38}$$

τοῦ περιορισμοῦ (36) ἐξακολουθοῦντος νά ἰσχύῃ.

7. Σφήν ἐκ Δύο 'Ισοτρόπων Μέσων.

7α. Γενικαί Παρατηρήσεις.

Θεωροῦμεν τόν σφῆνα τοῦ παραπλεύρως Σχήματος 6 συνιστάμενον ἐκ δύο ἁπλῶν σφηνῶν ἐξ ἰσοτρόπων μέσων μέ σταθεράς $\mu_1, \varkappa_1$ καί $\mu_2, \varkappa_2$ καί γωνίας κορυφῆς ϑ_1 καί ϑ_2 ἀντιστοίχως.



Σχῆμα 6

'Η ἰδιάζουσα ἐντατική κατάστασις παρά τήν κορυφήν ἑνός τοιούτου σφηνός ἐμελετήθη, μόνον διά τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος, διά μέν τάς εἰδικάς περιπτώσεις τῆς ρωγμῆς μέ $\vartheta_1=-\vartheta_2=\pi$ ὑπό τοῦ WILLIAMS (48), μέ χρῆσιν πραγματικῶν συναρτήσεων διά τήν ἔκφρασιν τοῦ ἐλαστικοῦ πεδίου παρά τήν κορυφήν τοῦ σφηνός, καί τῶν ὀρθογωνίων σφηνῶν μέ $\vartheta_1=-\vartheta_2=\frac{\pi}{2}$ ὑπό τοῦ BOGY (2), διά τῆςχρήσεως τοῦ μετασχηματισμοῦ MELLIN, διά δέ τήν γενικήν περίπτωσιν τοῦ Σχήματος 6 ὑπό τοῦ BOGY(3) καί τῶν HEIN καί ERDOGAN (24) διά τῆς χρήσεως πάλιν τοῦ μετασχηματισμοῦ MELLIN.

Κατωτέρω δίδομεν τάς γενικάς λύσεις τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος διά τῆς ἀναπτυχθείσης εἰς τήν § 3 μεθόδου καί διά τά τρία θεμελιώδη προβλήματα.

7β. Τό Πρῶτον Θεμελιῶδες Πρόβλημα.

Βάσει τοῦ Σχήματος 6 διά $\vartheta=0$ αἱ σχέσεις (3.I5) δίδουν:

$$(\varphi_{11}-\varphi_{12})+\gimel(\bar{\varphi}_{21}-\bar{\varphi}_{22})+(\bar{\psi}_{21}-\bar{\psi}_{22})=0, \qquad (1\alpha)$$

$$(\bar{\varphi}_{21}-\bar{\varphi}_{22})+\gimel(\varphi_{11}-\varphi_{12})+(\psi_{11}-\psi_{12})=0, \qquad (1\beta)$$

$$(\Gamma\varkappa_1\varphi_{11}-\varkappa_2\varphi_{12})-\gimel(\Gamma\bar{\varphi}_{21}-\bar{\varphi}_{22})-(\Gamma\bar{\psi}_{21}-\bar{\psi}_{22})=0, \qquad (1\gamma)$$

$$(\Gamma\varkappa_1\bar{\varphi}_{21}-\varkappa_2\bar{\varphi}_{22})-\gimel(\Gamma\varphi_{11}-\varphi_{12})-(\Gamma\psi_{11}-\psi_{12})=0, \qquad (1\delta)$$

ἔνθα ἐτέθη:

$$\Gamma=\frac{\mu_2}{\mu_1}\,. \qquad (2)$$

Περαιτέρω διά $\vartheta=\vartheta_1$ καί $\vartheta=\vartheta_2$ λαμβάνομεν διά τήν ἐξεταζομένην περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος ἐκ τῶν σχέσεων (3.Ι8):

$$\varphi_{11} e^{2i\lambda\theta_1} + \lambda\bar{\varphi}_{21} e^{2i\theta_1} + \bar{\psi}_{21} = 0, \tag{3α}$$
$$\bar{\varphi}_{21} e^{-2i\lambda\theta_1} + \lambda\varphi_{11} e^{-2i\theta_1} + \psi_{11} = 0, \tag{3β}$$
$$\varphi_{12} e^{2i\lambda\theta_2} + \lambda\bar{\varphi}_{22} e^{2i\theta_2} + \bar{\psi}_{22} = 0, \tag{3γ}$$
$$\bar{\varphi}_{22} e^{-2i\lambda\theta_2} + \lambda\varphi_{12} e^{-2i\theta_2} + \psi_{12} = 0. \tag{3δ}$$

'Αντικαθιστῶντες τάς τιμάς τῶν $\psi_{11}, \bar{\psi}_{21}, \psi_{12}$ καί $\bar{\psi}_{22}$ ἐκ τῶν σχέσεων (3) εἰς τάς (1) ἔχομεν:

$$(1-e^{2i\lambda\theta_1})\varphi_{11} + \lambda(1-e^{2i\theta_1})\bar{\varphi}_{21} = (1-e^{2i\lambda\theta_2})\varphi_{12} + \lambda(1-e^{2i\theta_2})\bar{\varphi}_{22}, \tag{4α}$$
$$(1-e^{-2i\lambda\theta_1})\bar{\varphi}_{21} + \lambda(1-e^{-2i\theta_1})\varphi_{11} = (1-e^{-2i\lambda\theta_2})\bar{\varphi}_{22} + \lambda(1-e^{-2i\theta_2})\varphi_{12}, \tag{4β}$$
$$\Gamma\left[(\kappa_1+e^{2i\lambda\theta_1})\varphi_{11} - \lambda(1-e^{2i\theta_1})\bar{\varphi}_{21}\right] = (\kappa_2+e^{2i\lambda\theta_2})\varphi_{12} - \lambda(1-e^{2i\theta_2})\bar{\varphi}_{22}, \tag{4γ}$$
$$\Gamma\left[(\kappa_1+e^{-2i\lambda\theta_1})\bar{\varphi}_{21} - \lambda(1-e^{-2i\theta_1})\varphi_{11}\right] = (\kappa_2+e^{-2i\lambda\theta_2})\bar{\varphi}_{22} - \lambda(1-e^{-2i\theta_2})\varphi_{12} \tag{4δ}$$

καί ἡ χαρακτηριστική ἐξίσωσις διά τόν προσδιορισμόν τοῦ λ, προκύπτουσα διά μηδενισμοῦ τῆς ὁριζούσης τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (4) μέ ἀγνώστους τά φ_{11}, $\bar{\varphi}_{21}$, φ_{12} καί $\bar{\varphi}_{22}$, εἶναι:

$$\begin{vmatrix} 1-e^{2i\lambda\theta_1} & \lambda(1-e^{2i\theta_1}) & 1-e^{2i\lambda\theta_2} & \lambda(1-e^{2i\theta_2}) \\ \lambda(1-e^{-2i\theta_1}) & 1-e^{-2i\lambda\theta_1} & \lambda(1-e^{-2i\theta_2}) & 1-e^{-2i\lambda\theta_2} \\ \Gamma(\kappa_1+e^{2i\lambda\theta_1}) & -\lambda\Gamma(1-e^{2i\theta_1}) & \kappa_2+e^{2i\lambda\theta_2} & -\lambda(1-e^{2i\theta_2}) \\ -\lambda\Gamma(1-e^{-2i\theta_1}) & \Gamma(\kappa_1+e^{-2i\lambda\theta_1}) & -\lambda(1-e^{-2i\theta_2}) & \kappa_2+e^{-2i\lambda\theta_2} \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

'Η ὁρίζουσα (5) δύναται περαιτέρω νά γραφῇ καί ὑπό ἰσοδύναμον πραγματικήν μορφήν, χωρίς βεβαίως τοῦτο νά ἀποκλείῃ τήν ὕπαρξιν μιγαδικῶν ριζῶν λ, αἵτινες ὅμως κατά ταῦτα θά ἐμφανίζωνται κατά ζεύγη συζυγῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

./.

Οὕτω προσθέτοντες καί ἀφαιροῦντες τάς γραμμάς 1 καί 2 ὡς καί τάς 3 καί 4 λαμβάνομεν ἐκ τῆς ὁριζούσης (5):

$$\begin{vmatrix}
(1-e^{2i\lambda\theta_1})+\lambda(1-e^{-2i\theta_1}) & (1-e^{-2i\lambda\theta_1})+\lambda(1-e^{2i\theta_1}) & (1-e^{2i\lambda\theta_2})+\lambda(1-e^{-2i\theta_2}) & (1-e^{-2i\lambda\theta_2})+\lambda(1-e^{2i\theta_2}) \\
(1-e^{2i\lambda\theta_1})-\lambda(1-e^{-2i\theta_1}) & -[(1-e^{-2i\lambda\theta_1})-\lambda(1-e^{2i\theta_1})] & (1-e^{2i\lambda\theta_2})-\lambda(1-e^{-2i\theta_2}) & -[(1-e^{-2i\lambda\theta_2})-\lambda(1-e^{2i\theta_2})] \\
\Gamma[(\kappa_1+e^{2i\lambda\theta_1})-\lambda(1-e^{-2i\theta_1})] & \Gamma[(\kappa_1+e^{-2i\lambda\theta_1})-\lambda(1-e^{2i\theta_1})] & (\kappa_2+e^{2i\lambda\theta_2})-\lambda(1-e^{-2i\theta_2}) & (\kappa_2+e^{-2i\lambda\theta_2})-\lambda(1-e^{2i\theta_2}) \\
\Gamma[(\kappa_1+e^{2i\lambda\theta_1})+\lambda(1-e^{-2i\theta_1})] & -\Gamma[(\kappa_1+e^{-2i\lambda\theta_1})+\lambda(1-e^{2i\theta_1})] & (\kappa_2+e^{2i\lambda\theta_2})+\lambda(1-e^{-2i\theta_2}) & -[(\kappa_2+e^{-2i\lambda\theta_2})+\lambda(1-e^{2i\theta_2})]
\end{vmatrix}=0 \qquad (6)$$

καί περαιτέρω προσθέτοντες καί ἀφαιροῦντες τάς στήλας 1 καί 2 ὡς καί τάς 3 καί 4 λαμβάνομεν τελικῶς τήν ἐξῆςἐξίσωσιν πρός προσδιορισμόν τοῦ λ:

$$\begin{vmatrix}
1-\cos2\lambda\theta_1+\lambda(1-\cos2\theta_1) & -\sin2\lambda\theta_1+\lambda\sin2\theta_1 & 1-\cos2\lambda\theta_2+\lambda(1-\cos2\theta_2) & -\sin2\lambda\theta_2+\lambda\sin2\theta_2 \\
-\sin2\lambda\theta_1-\lambda\sin2\theta_1 & 1-\cos2\lambda\theta_1-\lambda(1-\cos2\theta_1) & -\sin2\lambda\theta_2-\lambda\sin2\theta_2 & 1-\cos2\lambda\theta_2-\lambda(1-\cos2\theta_2) \\
\Gamma[\kappa_1+\cos2\lambda\theta_1-\lambda(1-\cos2\theta_1)] & \Gamma[\sin2\lambda\theta_1-\lambda\sin2\theta_1] & \kappa_2+\cos2\lambda\theta_2-\lambda(1-\cos2\theta_2) & \sin2\lambda\theta_2-\lambda\sin2\theta_2 \\
\Gamma[\sin2\lambda\theta_1+\lambda\sin2\theta_1] & \Gamma[\kappa_1+\cos2\lambda\theta_1+\lambda(1-\cos2\theta_1)] & \sin2\lambda\theta_2+\lambda\sin2\theta_2 & \kappa_2+\cos2\lambda\theta_2+\lambda(1-\cos2\theta_2)
\end{vmatrix}=0. \qquad (7)$$

7γ. Τό Δεύτερον Θεμελιῶδες Πρόβλημα.

Κατ'ἀνάλογον τρόπον μελετᾶται ἡ περίπτωσις τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος. Οὕτως αἱ σχέσεις (1) ἰσχύουν πάλιν, ἀντί ὅμως τῶν σχέσεων (3) διά $\vartheta=\vartheta_1$ καί $\vartheta=\vartheta_2$ λαμβάνομεν διά τήν ἐξεταζομένην περίπτωσιν τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος ἐκ τῶν σχέσεων (3.19):

$$\kappa_1 \varphi_{11} e^{2i\lambda\theta_1} - \lambda \bar{\varphi}_{21} e^{2i\theta_1} - \bar{\psi}_{21} = 0\,, \qquad (8\alpha)$$
$$\kappa_1 \bar{\varphi}_{21} e^{-2i\lambda\theta_1} - \lambda \varphi_{11} e^{-2i\theta_1} - \psi_{11} = 0\,, \qquad (8\beta)$$
$$\kappa_2 \varphi_{12} e^{2i\lambda\theta_2} - \lambda \bar{\varphi}_{22} e^{2i\theta_2} - \bar{\psi}_{22} = 0\,, \qquad (8\gamma)$$
$$\kappa_2 \bar{\varphi}_{22} e^{-2i\lambda\theta_2} - \lambda \varphi_{12} e^{-2i\theta_2} - \psi_{12} = 0\,, \qquad (8\delta)$$

ἐργαζόμενοι δέ περαιτέρω ὡς καί διά τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος εὑρίσκομεν τήν ἑξῆς χαρακτηριστικήν ἐξίσωσιν διά τόν προσδιορισμόν τοῦ λ:

$$\begin{vmatrix} 1+\kappa_1 e^{2i\lambda\theta_1} & \lambda(1-e^{2i\theta_1}) & 1+\kappa_2 e^{2i\lambda\theta_2} & \lambda(1-e^{2i\theta_2}) \\ \lambda(1-e^{-2i\theta_1}) & 1+\kappa_1 e^{-2i\lambda\theta_1} & \lambda(1-e^{-2i\theta_2}) & 1+\kappa_2 e^{-2i\lambda\theta_2} \\ \Gamma\kappa_1(1-e^{2i\lambda\theta_1}) & -\lambda\Gamma(1-e^{2i\theta_1}) & \kappa_2(1-e^{2i\lambda\theta_2}) & -\lambda(1-e^{2i\theta_2}) \\ -\lambda\Gamma(1-e^{-2i\theta_1}) & \Gamma\kappa_1(1-e^{-2i\lambda\theta_1}) & -\lambda(1-e^{-2i\theta_2}) & \kappa_2(1-e^{-2i\lambda\theta_2}) \end{vmatrix} = 0\,, \qquad (9)$$

τῆς ὁποίας ἰσοδύναμος μορφή εἶναι καί ἡ ἑξῆς:

$$\begin{vmatrix} 1+\kappa_1\cos 2\lambda\theta_1+\lambda(1-\cos 2\theta_1) & , \kappa_1\sin 2\lambda\theta_1+\lambda\sin 2\theta_1 & , 1+\kappa_2\cos 2\lambda\theta_2+\lambda(1-\cos 2\theta_2) & , \kappa_2\sin 2\lambda\theta_2+\lambda\sin 2\theta_2 \\ \kappa_1\sin 2\lambda\theta_1-\lambda\sin 2\theta_1 & , 1+\kappa_1\cos 2\lambda\theta_1-\lambda(1-\cos 2\theta_1) & , \kappa_2\sin 2\lambda\theta_2-\lambda\sin 2\theta_2 & , 1+\kappa_2\cos 2\lambda\theta_2-\lambda(1-\cos 2\theta_2) \\ \Gamma[\kappa_1(1-\cos 2\lambda\theta_1)-\lambda(1-\cos 2\theta_1)] & , \Gamma[-\kappa_1\sin 2\lambda\theta_1-\lambda\sin 2\theta_1] & , \kappa_2(1-\cos 2\lambda\theta_2)-\lambda(1-\cos 2\theta_2) & , -\kappa_2\sin 2\lambda\theta_2-\lambda\sin 2\theta_2 \\ \Gamma[-\kappa_1\sin 2\lambda\theta_1+\lambda\sin 2\theta_1] & , \Gamma[\kappa_1(1-\cos 2\lambda\theta_1)+\lambda(1-\cos 2\theta_1)] & , -\kappa_2\sin 2\lambda\theta_2+\lambda\sin 2\theta_2 & , \kappa_2(1-\cos 2\lambda\theta_2)+\lambda(1-\cos 2\theta_2) \end{vmatrix} = 0. \qquad (10)$$

7δ. Τό Τρίτον Θεμελιῶδες Πρόβλημα.

Εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ τρίτου θεμελιώδους προβλήματος ἰσχύουν πάλιν αἱ σχέσεις (1) διά $\vartheta=0$, αἱ σχέσεις (3α–β) διά $\vartheta=\vartheta_1$ καί αἱ σχέσεις (8γ–δ) διά $\vartheta=\vartheta_2$ ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἔχομεν διά $\vartheta=\vartheta_1$ δεδομένας τάς ἐπιβαλλομένας τάσεις καί διά $\vartheta=\vartheta_2$ τάς ἐπιβαλλομένας μετατοπίσεις.

Ἐργαζόμενοι δέ περαιτέρω ὡς καί διά τάς περιπτώσεις τοῦ πρώτου καί τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος εὑρίσκομεν τήν ἑξῆς χαρακτηριστικήν ἐξίσωσιν διά τόν προσδιορισμόν τοῦ λ:

$$\begin{vmatrix} 1-e^{2i\eta\theta_1} & \eta(1-e^{2i\theta_1}) & 1+\kappa_2 e^{2i\eta\theta_2} & \eta(1-e^{2i\theta_2}) \\ \eta(1-e^{-2i\theta_1}) & 1-e^{-2i\eta\theta_1} & \eta(1-e^{-2i\theta_2}) & 1+\kappa_2 e^{-2i\eta\theta_2} \\ \Gamma(\kappa_1+e^{2i\eta\theta_1}) & -\eta\Gamma(1-e^{2i\theta_1}) & \kappa_2(1-e^{2i\eta\theta_2}) & -\eta(1-e^{2i\theta_2}) \\ -\eta\Gamma(1-e^{-2i\theta_1}) & \Gamma(\kappa_1+e^{-2i\eta\theta_1}) & -\eta(1-e^{-2i\theta_2}) & \kappa_2(1-e^{-2i\eta\theta_2}) \end{vmatrix} = 0, \qquad (11)$$

τῆς ὁποίας ἰσοδύναμος μορφή εἶναι καί ἡ ἑξῆς:

$$\begin{vmatrix} 1-\cos 2\eta\theta_1+\eta(1-\cos 2\theta_1), & -\sin 2\eta\theta_1+\eta\sin 2\theta_1, & 1+\kappa_2\cos 2\eta\theta_2+\eta(1-\cos 2\theta_2), & \kappa_2\sin 2\eta\theta_2+\eta\sin 2\theta_2 \\ -\sin 2\eta\theta_1-\eta\sin 2\theta_1, & 1-\cos 2\eta\theta_1-\eta(1-\cos 2\theta_1), & \kappa_2\sin 2\eta\theta_2-\eta\sin 2\theta_2, & 1+\kappa_2\cos 2\eta\theta_2-\eta(1-\cos 2\theta_2) \\ \Gamma[\kappa_1+\cos 2\eta\theta_1-\eta(1-\cos 2\theta_1)], & \Gamma[\sin 2\eta\theta_1-\eta\sin 2\theta_1], & \kappa_2(1-\cos 2\eta\theta_2)-\eta(1-\cos 2\theta_2), & -\kappa_2\sin 2\eta\theta_2-\eta\sin 2\theta_2 \\ \Gamma[\sin 2\eta\theta_1+\eta\sin 2\theta_1], & \Gamma[\kappa_1+\cos 2\eta\theta_1+\eta(1-\cos 2\theta_1)], & -\kappa_2\sin 2\eta\theta_2+\eta\sin 2\theta_2, & \kappa_2(1-\cos 2\eta\theta_2)+\eta(1-\cos 2\theta_2) \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$

7ε. Ἐφαρμογή εἰς τάς Ρωγμάς Μεταξύ Δύο Ἰσοτρόπων Μέσων.

Διά $\vartheta_1=-\vartheta_2=\pi$, ὅτε τό Σχῆμα 6 λαμβάνει τήν μορφήν ρωγμῆς μεταξύ δύο ἰσοτρόπων μέσων, καί λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τόν περιορισμόν (3.9) εὑρίσκομεν:

Διά τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος βάσει τῆς σχέσεως (5):

./.

$$\begin{vmatrix} 1-e^{2\pi i\eta} & 0 & 1-e^{-2\pi i\eta} & 0 \\ 0 & 1-e^{-2\pi i\eta} & 0 & 1-e^{2\pi i\eta} \\ \Gamma(\kappa_1+e^{2\pi i\eta}) & 0 & \kappa_2+e^{-2\pi i\eta} & 0 \\ 0 & \Gamma(\kappa_1+e^{-2\pi i\eta}) & 0 & \kappa_2+e^{2\pi i\eta} \end{vmatrix} = 0, \qquad (13)$$

ἀπό ὅπου προκύπτει:

$$(\Gamma+\kappa_2)e^{\pm 2\pi i\eta}+(\Gamma\kappa_1+1)=0, \qquad (14a)$$

$$e^{\pm 2\pi i\eta}=-\frac{\mu_2\kappa_1+\mu_1}{\mu_1\kappa_2+\mu_2} \qquad (14b)$$

καί τελικῶς:

$$\eta=\frac{1}{2}\pm i\,\frac{\ln\frac{\mu_2\kappa_1+\mu_1}{\mu_1\kappa_2+\mu_2}}{2\pi}. \qquad (15)$$

Τό ἀποτέλεσμα τοῦτο συμφωνεῖ μέ τό ἐξαχθέν ὑπό τῶν HEIN καί ERDOGAN (24).

Διά τήν περίπτωσιν τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος βάσει τῆς σχέσεως (9):

$$\begin{vmatrix} 1+\kappa_1 e^{2\pi i\eta} & 0 & 1+\kappa_2 e^{-2\pi i\eta} & 0 \\ 0 & 1+\kappa_1 e^{-2\pi i\eta} & 0 & 1+\kappa_2 e^{2\pi i\eta} \\ \Gamma\kappa_1(1-e^{2\pi i\eta}) & 0 & \kappa_2(1-e^{-2\pi i\eta}) & 0 \\ 0 & \Gamma\kappa_1(1-e^{-2\pi i\eta}) & 0 & \kappa_2(1-e^{2\pi i\eta}) \end{vmatrix} = 0, \qquad (16)$$

ἀπό ὅπου προκύπτει:

$$\kappa_1(\Gamma+\kappa_2)e^{\pm 2\pi i\eta}+\kappa_2(\Gamma\kappa_1+1)=0, \qquad (17a)$$

$$e^{\pm 2\pi i\eta}=-\frac{\kappa_2(\mu_2\kappa_1+\mu_1)}{\kappa_1(\mu_1\kappa_2+\mu_2)} \qquad (17b)$$

καί τελικῶς:

$$\eta=\frac{1}{2}\pm i\,\frac{\ln\frac{\kappa_2(\mu_2\kappa_1+\mu_1)}{\kappa_1(\mu_1\kappa_2+\mu_2)}}{2\pi}. \qquad (18)$$

Διά τήν περίπτωσιν τοῦ τρίτου θεμελιώδους προβλήματος βάσει

./.

τῆς σχέσεως (II):

$$\begin{vmatrix} 1-e^{2\pi i\eta} & 0 & 1+K_2e^{-2\pi i\eta} & 0 \\ 0 & 1-e^{-2\pi i\eta} & 0 & 1+K_2e^{2\pi i\eta} \\ \Gamma(K_1+e^{2\pi i\eta}) & 0 & K_2(1-e^{-2\pi i\eta}) & 0 \\ 0 & \Gamma(K_1+e^{-2\pi i\eta}) & 0 & K_2(1-e^{2\pi i\eta}) \end{vmatrix}=0 \qquad (19)$$

ἀπό ὅπου προκύπτουν κατά σειράν αἱ σχέσεις:

$$(1-e^{2\pi i\eta})\Big[K_2^2(1-e^{2\pi i\eta})(1-e^{-2\pi i\eta})^2-\Gamma K_2(1+K_2e^{2\pi i\eta})\cdot \\ \cdot(1-e^{-2\pi i\eta})(K_1+e^{-2\pi i\eta})\Big]+(1+K_2e^{-2\pi i\eta})\Big[\Gamma^2(K_1+e^{2\pi i\eta})\cdot \\ \cdot(1+K_2e^{2\pi i\eta})(K_1+e^{-2\pi i\eta})-\Gamma K_2(1-e^{2\pi i\eta})(K_1+e^{2\pi i\eta})(1-e^{-2\pi i\eta})\Big]=0, \qquad (20a)$$

$$\Gamma^2(1+K_1^2+2K_1\cos 2\pi\eta)(1+K_2^2+2K_2\cos 2\pi\eta)+ \\ +4K_2^2(1-\cos 2\pi\eta)^2-4\Gamma K_2(1-\cos 2\pi\eta)\big[K_1+K_2+(1+K_1K_2)\cdot \qquad (20\beta) \\ \cos 2\pi\eta\big]=0.$$

8. Σφήν ἐκ Δύο 'Ανισοτρόπων Μέσων ἤ ἐξ 'Ενός 'Ισοτρόπου καί 'Ενός 'Ανισοτρόπου Μέσου.

Τά προβλήματα τοῦ σφηνός ἐκ δύο ἀνισοτρόπων μέσων ἤ ἐξ ἑνός ἰσοτρόπου καί ἑνός ἀνισοτρόπου μέσου ἐξετάζονται κατά τρόπον ἀνάλογον τοῦ εἰς τήν προηγουμένην § 7 μελετηθέντος προβλήματος τοῦ σφηνός ἐκ δύο ἰσοτρόπων μέσων μέ βάσιν πάλιν τήν γενικήν θεωρίαν τῆς § 3. Δεδομένου ὅμως ὅτι οἱ ἐξαγόμενοι οὕτω τύποι εἶναι συνθετώτεροι διά τά παρόντα προβλήματα ἤ διά τό πρόβλημα τῆς § 7, δέν ἔχουν δέ ἰδιαίτερον θεωρητικόν ἐνδιαφέρον, δέν θά ἐπεκταθῶμεν ἐνταῦθα ἐπί τῆς εὑρέσεως αὐτῶν.