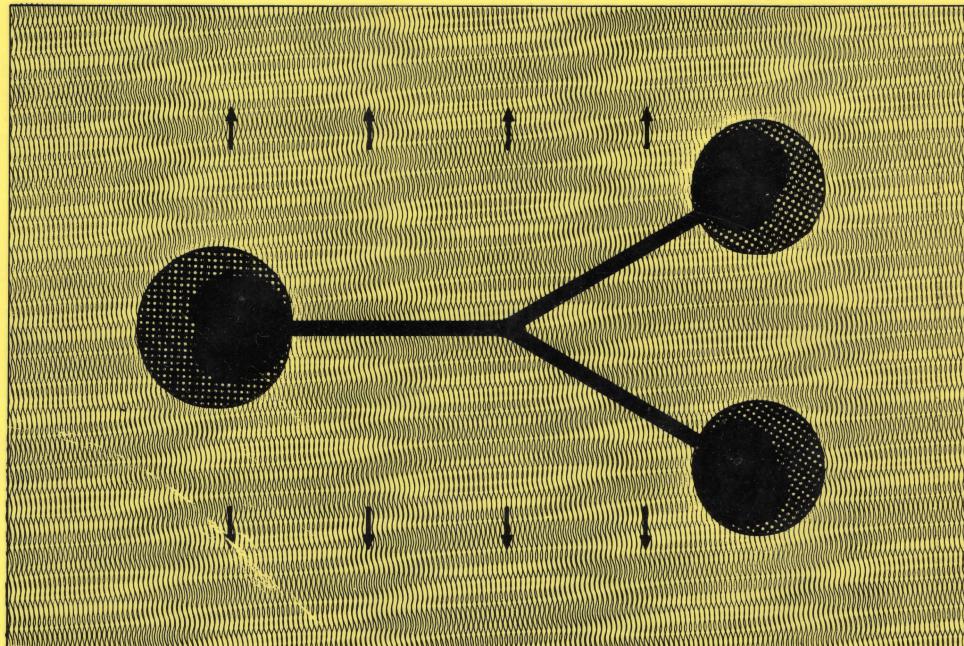


ΝΙΚΟΛΑΟΥ Ι. ΙΩΑΚΕΙΜΙΔΗ

ΓΕΝΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ
ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑΝ
ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΟΣ



**ΓΕΝΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ
ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑΝ
ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΟΣ**

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Ι. ΙΩΑΚΕΙΜΙΔΗ

**ΓΕΝΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ
ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑΝ
ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΟΣ**



**GENERAL METHODS
FOR THE SOLUTION OF CRACK PROBLEMS
IN THE THEORY
OF PLANE ELASTICITY**

(with a summary in English)

ΛΕΟΥΣΗΣ - ΜΑΣΤΡΟΓΙΑΝΝΗΣ

ΑΘΗΝΑΙ

1976

ΛΕΟΥΣΗΣ Σ. - ΜΑΣΤΡΟΓΙΑΝΝΗΣ Δ. O.E.

• Οδός Νοταρᾶ 39 (Έξαρχεια)

• Αθῆναι

Ε Λ Λ Α Σ

LEOUSIS S. - MASTROGIANNIS D. O.E.

39 Notara St. (Eksarcheia)

Athens

G R E E C E

Copyright

© Έπό Νικολάου Ι. Ιωακειμίδη
• Οδός Γ. Ιατρίδου 99
Καλλιθέα - Αθῆναι
Ε Λ Λ Α Σ

© by Nikolaos I. Ioakimidis
99 G. Iatridou St.
Kallithea - Athens
G R E E C E

Τό βιβλίον τούτο περιλαμβάνει τό πλήρες κείμενον τῆς ὑποβληθείσης ὑπό τοῦ συγγραφέως διδακτορικῆς διατριβῆς εἰς τὴν Ἀνωτάτην Σχολήν Ἡλεκτρολόγων Μηχανικῶν τοῦ Ἑθνικοῦ Μετσοβίου Πολυτεχνείου τὴν 23ην Ἰανουαρίου 1976 καὶ ἐγκριθείσης τὴν 29ην Μαρτίου 1976 κατόπιν εἰσηγήσεως τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ Π. Σ. Θεοχάρη, Καθηγητοῦ τῆς Μηχανικῆς καὶ Διευθυντοῦ τοῦ Ἐργαστηρίου Ἀντοχῆς, Υλικῶν τοῦ Ἑθνικοῦ Μετσοβίου Πολυτεχνείου.

This book contains the complete text of the doctoral dissertation submitted by the author to the Faculty of Electrical Engineering of the National Technical University of Athens on the 23rd of January 1976 and approved on the 29th of March 1976. This dissertation was introduced to the Faculty of Electrical Engineering by its advisor, Academician P. S. Theocaris, Professor of Mechanics and Director of the Laboratory for Testing Materials of the National Technical University of Athens.

Πρόλογος

Η παρούσα διατριβή έξεπονήθη κατά τά έτη 1974 καί 1795 είς τό Έθνικόν Μετσόβιον Πολυτεχνεῖον ύπό τήν καθοδήγησιν τοῦ σεβαστοῦ μου Καθηγητοῦ τῆς "Εδρας Μηχανικῆς Α'" καί Διευθυντοῦ τοῦ Εργαστηρίου 'Αντοχῆς 'Υλικῶν 'Ακαδημαϊκοῦ κ. Περικλέους Σ. Θεοχάρη, πρός τόν διπούν θεωρῶ καθηκόν μου νά έκφρασω τάς θερμάς μου εύχαριστίας διά τήν παρασχεθεῖσαν ἀμέριστον συμπαράστασιν καί συνδρομήν, δινευ τῶν διπούων θά κτο άδυνατος ή έκπόνησις τῆς μελέτης ταύτης.

Τό θέμα τῆς παρούσης διατριβῆς εἶναι εἰλημμένον ἐκ τῆς θεωρίας τῆς Ελαστικότητος, ἀφορᾶ δέ είς τήν εύρεσιν τῆς ἐντατικῆς καί παραμορφωσιακῆς καταστάσεως είς δοκίμια ἐξ ίσιοτρόπου ή ἀνισοτρόπου υλικοῦ μετά ρωγμῶν εύρισκόμενα είς κατάστασιν ἐπιπέδου ἐντάσεως ή ἐπιπέδου παραμορφώσεως. Η ἔργασία αὕτη δύναται νά θεωρηθῇ τμῆμα τῆς κατά τά τελευταῖα ἔτη διεξαγομένης ἐντόνου ἐρευνητικῆς ἔργασίας είς τήν "Εδραν Μηχανικῆς Α'" καί τό Εργαστήριον 'Αντοχῆς 'Υλικῶν τοῦ Έθνικοῦ Μετσοβίου Πολυτεχνείου ύπό τήν διεύθυνσιν τοῦ Καθηγητοῦ 'Ακαδημαϊκοῦ κ. Περικλέους Σ. Θεοχάρη καί ἀφορώσης κατά μέγα ποσοστόν αὕτης είς τόν προσδιορισμόν τῆς ἐντατικῆς καί παραμορφωσιακῆς καταστάσεως είς καταπονούμενα δοκίμια μετά ρωγμῶν.

Ωσαύτως ή παρούσα ἔργασία δύναται νά θεωρηθῇ ως συνέχεια καί συμπλήρωσις τῆς κατά τό έτος 1973 ἐκπονηθείσης διπλωματικῆς ἔργασίας τοῦ γράφοντος, διπου είχε μελετηθῇ πλήρως τό πρόβλημα τῆς εύθυγράμμου ρωγμῆς ἐντός δοκιμίου εύρισκομένου ύπό ἐπίπεδον ἐντατικήν ή παραμορφωσιακήν κατάστασιν καί μέ βάσιν πάλιν τήν θεωρίαν τῆς 'Επιπέδου Ελαστικότητος. Ενταῦθα θά διθούν γενικαί μέθοδοι ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος τῆς τυχούσης μορφῆς καμπυλογράμμου ἐν γένει ρωγμῆς ἐντός τόσον ίσιοτρόπου ὅσον καί ἀνισοτρόπου μέσου ως καί ἄλλων πλέον συνθέτων προβλημάτων ἀφορώντων είς δοκίμια

μετά ρωγμῶν, πάντοτε ἐντός τῶν πλαισίων τῆς Θεωρίας τῆς Ἐπιπέδου Ἐλαστικότητος.

Διά τῆς θεωρίας ταύτης ἔχουν ἐπιλυθῆ, κυρίως κατά τὰ τελευταῖα τριάκοντα ἔτη, πλεῖστα προβλήματα ρωγμῶν. Τά προβλήματα ὅμως ταῦτα ἀφοροῦν κατά τό πλεῖστον εἰς ἐντελῶς συγκεκριμένας μορφάς δοκιμών μετά ρωγμῶν καὶ δέν δίδουν γενικάς μεθόδους ἀντιμετωπίσεως ἐνός τυχόντος προβλήματος ρωγμῶν, τό διοῖν θά ἡδύνατο νά παρουσιασθῇ εἰς τήν πρᾶξιν. Τό γεγονός τοῦτο ἐν συνδυασμῷ μέ τό ὅτι γενικαί μέθοδοι ἀντιμετωπίσεως τῶν προβλημάτων τῆς Ἐπιπέδου Ἐλαστικότητος, εἰς ἥν περίπτωσιν δέν ὑπάρχουν ρωγμαί, ὑφίστανται ἀπό πολλῶν ἐτῶν δυνάμεναι νά ἐφαρμοσθοῦν ἐπιτυχῶς εἰς πᾶσαν παρουσιαζομένην περίπτωσιν, μᾶς ὥθησεν εἰς τό νά ἐπιχειρήσωμεν τήν ἐπέκτασιν τῶν προαναφερθεισῶν γενικῶν μεθόδων καὶ τήν ἀνεύρεσιν νέων τοιούτων, ὃστε εἰς τό μέλλον τά προβλήματα ρωγμῶν παρά τάς ἴδιομορφίας, αἴτινες παρουσιάζονται εἰς τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν, νά δύνανται νά ἐπιλύωνται εύχερῶς.

Κατά τήν ἐπιχειρουμένην ἐνταῦθα ἐπίλυσιν τῶν ἐπιπέδων προβλημάτων ρωγμῶν, ταῦτα ἀνάγονται εἰς τήν ἐπίλυσιν συστημάτων ἴδιομόρφων κατά Cauchy δλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων. Τά συστήματα ταῦτα δύνανται, ὡς ἀπεδείχθη, νά ἐπιλυθοῦν δι' ἀριθμητικῶν μεθόδων, ὡς ἐάν ἐπρόκειτο περί συστημάτων μή ἴδιομόρφων δλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων. Ἀνεπτύχθη οὕτω μία ἄκρως ἀποτελεσματική μέθοδος ἐπιλύσεως συστημάτων ἴδιομόρφων κατά Cauchy δλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων, ἣτις δύναται νά ἐφαρμοσθῇ ὅχι μόνον εἰς προβλήματα ρωγμῶν ἄλλα καὶ εἰς πλεῖστα ἄλλα προβλήματα τῆς Φυσικῆς. Ἐπί τῆς μεθόδου ταύτης ἐλπίζομεν ὅτι θά δυνηθῶμεν νά ἐπανέλθωμεν ἐν μεγαλυτέρᾳ ἐκτάσει εἰς τό μέλλον.

Πρέπει πάντως νά τονισθῇ ὅτι τά ἀναπτυσσόμενα θέματα εἰς τήν παροῦσαν διατριβήν ἐβασίσθησαν εἰς προηγουμένως δημοσιευθείσας σχετικάς ἐργασίας, τῶν διοῖν θά ἡδύναντο νά θεωρηθοῦν συμπλήρωσις καὶ ἐπέκτασις. "Ολαι αἱ ληφθεῖσαι ὑπ' ὅψιν ἐργασίαι ἀναφέρονται εἰς τά ἀντίστοιχα τμήματα τῆς δι-

ατριβής. Πέραν τούτων δπωσδήποτε ἔχουν δημοσιευθῆ καὶ ἔτεραι σχετικαὶ ἐργασίαι, αἵτινες δέν κατέστη δυνατόν νά ἀνευρεθοῦν καὶ δέν ἔχουν ληφθῆ ὑπ' ὅψιν. Πιστεύεται πάντως ὅτι τό περιεχόμενον τῶν ἐργασιῶν τούτων δέν αἴρει εἰ μή ἐλάχιστον ποσοστόν τῆς πρωτοτυπίας τῶν ἐνταῦθα ἀναπτυσσομένων.

Διά τήν ἀνεύρεσιν τῶν ἐργασιῶν, αἵτινες ἐλήφθησαν ὑπ' ὅψιν, ἀπητήθη πολύς χρόνος καὶ ἐπίπονοι προσπάθειαι. "Ἐν μέγα μέρος τούτων ἀνευρέθη εἰς τάς Βιβλιοθήκας τοῦ Ἐθνικοῦ Μετσοβίου Πολυτεχνείου, τοῦ Κέντρου Πυρηνικῶν Ἐρευνῶν "Δημόκριτος", τοῦ Ἐθνικοῦ Ἰδρύματος Ἐρευνῶν καὶ τοῦ Ἰδρύματος Εύγενίδου, ἐνῷ ἐν ἔτερον καὶ ἐπίσης ἀξιόλογον μέρος τούτων ἀπεκτήθη ἐκ τοῦ Δανειστικοῦ Τμήματος τῆς Βρεττανικῆς Βιβλιοθήκης. Πρός τό προσωπικόν τῶν Βιβλιοθηκῶν τούτων ἐκφράζονται θερμαὶ εὐχαριστίαι. Δύναται ἐπίσης νά σημειώθῃ ἐνταῦθα ὅτι θά προσέφερε μεγάλην ἑξυπηρέτησιν καὶ διευκόλυνσιν ἡ ἵδρυσις μιᾶς κεντρικῆς ἐπιστημονικῆς Βιβλιοθήκης ἐν Ἑλλάδι, ἡ ἐλλειψις τῆς δποίας δυσχεραίνει τήν ἐπιστημονικήν ἔρευναν μέ συνέπειαν πολλαί τῶν ἐν Ἑλλάδι ἐκπονουμένων διατριβῶν νά εἶναι πειραματικοῦ χαρακτήρος μικράν ἔχουσαι ἀνάγκην τῆς χρήσεως ἐκτενοῦς ἐπιστημονικῆς Βιβλιογραφίας. Είς τό σημεῖον τοῦτο διαφέρει ἡ παρούσα διατριβή, ἣτις ἀσχολεῖται μέ ἐν εύρῳ πεδίον προβλημάτων, χωρίς νά συγκεντρώνῃ τήν προσοχήν της εἰς ἐντελῶς συγκεκριμένον πρόβλημα.

Περαίνων θά ἐπεδύμουν νά ἐκφράσω τάς εὐχαριστίας μου πέραν τοῦ σεβαστοῦ μου Καθηγητοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Περικλέους Σ. Θεοχάρη καὶ πρός δλον τό προσωπικόν τῆς Ἐδρας Μηχανικῆς Α' καὶ τοῦ Ἐργαστηρίου Ἀντοχῆς 'Υλικῶν ὡς καὶ πρός τό προσωπικόν τοῦ Τμήματος Ἡλεκτρονικοῦ 'Υπολογιστοῦ τοῦ Ἐθνικοῦ Μετσοβίου Πολυτεχνείου διά τήν ὑπ' αὐτῶν παρασχεθεῖσαν βοήθειαν καὶ συμπαράστασιν κατά τήν ἐκπόνησιν τῆς παρούσης διατριβῆς. Ωσαύτως θερμαὶ εὐχαριστίαι ἐκφράζονται καὶ πρός δλους δόσους συνέβαλον εἰς τήν ἀρτίαν ἐμφάνισιν ταύτης.

‘Οδηγίσι ο διά τήν Ἀνάγνωσιν

‘Η παροῦσα διατριβή περιλαμβάνει πέραν τῆς εἰσαγωγῆς καὶ τοῦ πίνακος τῶν παραπομπῶν τέσσαρα κεφάλαια δηλούμενα διά τῶν κεφαλαίων γράμμάτων Α,Β,Γ καὶ Δ. ‘Εκαστον κεφάλαιον ὑποδιαιρεῖται εἰς τμήματα ἀριθμούμενα ἐντός ἐκάστου κεφαλαίου μέ τό πρῶτον τμῆμα τοῦ κεφαλαίου δηλουμένου ὡς τμῆμα 1. Οὕτω ἐν τμῆμα τῆς διατριβῆς χαρακτηρίζεται διά τοῦ κεφαλαίου γράμματος τοῦ κεφαλαίου, εἰς τό διποῖον ἀνήκει, ἀκολουθούμενου ὑπό τοῦ δηλωτικοῦ τοῦ τμήματος ἀριθμοῦ ἐντός τοῦ κεφαλαίου. ‘Ο κατά ταῦτα χαρακτηρισμός τοῦ τμήματος προηγεῖται τοῦ τίτλου εἰς τὴν ἀρχήν αὐτοῦ, χρησιμοποιεῖται δέ καὶ εἰς πᾶσαν παραπομπήν εἰς τό τμῆμα τοῦτο ἔξ ἐτέρου τμήματος.

‘Η ἀπαρίθμησις τῶν τύπων καὶ τῶν σχημάτων γίνεται ἐντός ἐκάστου τμήματος μέ τόν πρῶτον τύπον ἢ σχῆμα τοῦ τμήματος δηλουμένου διά τοῦ ἀριθμοῦ 1 ἀνευ ἐνδείξεως τοῦ τμήματος. Εἰς περίπτωσιν παραπομπῆς ἐντός ἐνός τμήματος εἰς τύπον ἢ σχῆμα τοῦ τμήματος τούτου, δέν ἀναφέρεται τό τμῆμα ἀλλά μόνον δὲ ἐνδεικτικός ἀριθμός τοῦ τύπου ἢ τοῦ σχήματος. Εἰς περίπτωσιν παραπομπῆς ἀπό ἐν τμῆμα ἐνός κεφαλαίου εἰς τύπον ἢ σχῆμα ἐτέρου τμήματος τοῦ αὐτοῦ κεφαλαίου, προηγεῖται τοῦ ἐνδεικτικοῦ ἀριθμοῦ τοῦ τύπου ἢ τοῦ σχήματος δὲ ἐνδεικτικός ἀριθμός τοῦ τμήματος ἐντός τοῦ κεφαλαίου. Οἱ οὕτω προκύπτοντες δύο ἀριθμοί χωρίζονται διά τελείας. ‘Εάν τέλος γίνεται παραπομπή ἀπό ἐν τμῆμα ἐνός κεφαλαίου εἰς τύπον ἢ σχῆμα τμήματος ἐτέρου κεφαλαίου, τοῦ ἐνδεικτικοῦ ἀριθμοῦ τοῦ τύπου ἢ τοῦ σχήματος προηγεῖται δχι μόνον δὲ ἐνδεικτικός ἀριθμός τοῦ τμήματος, εἰς τό διποῖον γίνεται παραπομπή, ἀλλά καὶ τό ἐνδεικτικόν κεφαλαῖον γράμμα τοῦ κεφαλαίου, εἰς τό διποῖον ἀνήκει τό τμῆμα. ‘Ανάλογα ἴσχύουν καὶ διά τούς πίνακας.

‘Οσον ἀφορᾷ τέλος εἰς τάς παραπομπάς, αὗται τίθενται ἐντός τοῦ κειμένου ἐντός μυστάκων, πλήρης δέ πίναξ τούτων κατά συγγραφέα ὑπάρχει εἰς τό τέλος τῆς διατριβῆς.

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	ix
ΟΔΗΓΙΑΙ ΔΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΓΝΩΣΙΝ	xii
ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ	xvii
SUMMARY	xxxiii
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α': Τό πρόβλημα τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου μέσου	9
A1. Γενική μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου	11
A2. Ἐτέρα μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου	31
A3. Ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου διά προσδιορισμοῦ τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν $\varphi_0(z)$ καὶ $\psi_0(z)$	43
A4. Ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου δι' ἀναγωγῆς του εἰς τό πρόβλημα τοῦ σώματος ἀνευ ρωγμῆς	52
A5. Ἐπίλυσις τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου τῇ βοηθείᾳ τῆς λύσεώς του δι' ἀπλῆν εύθύγραμμον ρωγμήν	55
A6. Γενική μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος δι' ἀπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου	60
A7. Γενική μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ μικτοῦ θεμελιώδους προβλήματος δι' ἀπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου	66
A8. Γενική μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου	72

A9. Έτέρα μέθοδος έπιλύσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἀ- πλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου	87
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β': Σύνθετα προβλήματα ρωγμῶν	95
B1. Ρωγμαί ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου	97
B2. Ρωγμή ἐντός πεπερασμένου ίσοτρόπου μέσου	101
B3. Ρωγμή μεταξύ δύο ίσοτρόπων μέσων	106
B4. Σειρά περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ἐντός ἀπεί- ρου ίσοτρόπου μέσου	113
B5. Σύστημα δίς περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου	123
B6. Ἀκτινική διάταξις ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου	137
B7. Ρωγμή μετά γωνιακῶν σημείων ή σύστημα συντρεχου- σῶν ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου	151
B8. Περίπτωσις ἀνισοτρόπων μέσων - Γενικεύσεις	159
B9. Συντελεσταί ἐντάσεως τῶν τάσεων	163
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ': Ἀριθμητική ἐπίλυσις ίδιομόρφων δλοκλη- ρωτικῶν ἔξισώσεων	177
Γ1. Γενικότητες	179
Γ2. Ἐπί τῶν ύφισταμένων μεθόδων ἐπιλύσεως ίδιομόρφων δλοκληρωτικῶν ἔξισώσεων	185
Γ3. Αἱ μέθοδοι ἐπιλύσεως ίδιομόρφων δλοκληρωτικῶν ἔξ- ισώσεων Gauss-Chebyshev καὶ Lobatto-Chebyshev	193
Γ4. Ἐφαρμογή τῆς μεθόδου δλοκληρώσεως Gauss εἰς τὸν ύπολογισμόν ίδιομόρφων δλοκληρωμάτων	205
Γ5. Ἐφαρμογή μιᾶς γενικῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς δλο- κληρώσεως εἰς τὸν ύπολογισμόν ίδιομόρφων δλοκλη- ρωμάτων	213
Γ6. Ἐφαρμογή τῶν μεθόδων δλοκληρώσεως Radau καὶ Lo- batto εἰς τὸν ύπολογισμόν ίδιομόρφων δλοκληρωμά- των	217
Γ7. Προσεγγιστική μέθοδος ἐπιλύσεως ίδιομόρφων δλο- κληρωτικῶν ἔξισώσεων	221

Γ8. Προσδιορισμός συναρτήσεως είς τι διάστημα ἐκ τῶν τιμῶν της εἰς συγκεκριμένα σημεῖα διά παρεμβολῆς	227
Γ9. Συνήθεις περιπτώσεις ἴδιομόρφων δλοκληρωτικῶν ἔξισώσεων καὶ μέθοδοι ἐπιλύσεως αὐτῶν	232
Γ10. Παρατηρήσεις	265
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ': 'Εφαρμογαί εἰς συγκεκριμένα προβλήματα ρωγμῶν	267
Δ1. 'Εφαρμογή 1η: Συγγραμμικαί περιοδικῶς διατεταγμέναι ρωγμαί	269
Δ2. 'Εφαρμογή 2α: Παράλληλοι περιοδικῶς διατεταγμέναι ρωγμαί	277
Δ3. 'Εφαρμογή 3η: Σύστημα δίς περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν	284
Δ4. 'Εφαρμογή 4η: Συντρέχουσαι ἀκτινικῶς καὶ συμμετρικῶς διατεταγμέναι ρωγμαί	296
Δ5. 'Εφαρμογή 5η: Δύο καθέτως διχοτομούμεναι ρωγμαί	305
Δ6. 'Εφαρμογή 6η: Κάθετος ἐπί ήμιεπίπεδον ρωγμή	317
Δ7. 'Εφαρμογή 7η: 'Απλῆ λεία ρωγμή ἐντός ἀπείρου ισοτρόπου μέσου	324
Δ8. 'Εφαρμογή 8η: Συντρέχουσαι ρωγμαί	335
Δ9. 'Εφαρμογή 9η: Σειρά παραλλήλων ήμιεπίπεδων περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν	368
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	375
ΠΑΡΑΠΟΜΠΑΙ	379
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΓΓΛΙΚΩΝ ΟΡΩΝ	403
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ ΘΕΜΑΤΩΝ	405

Περίληψις

ΓΕΝΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑΝ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΟΣ

‘Υπό Νικολάου Ι. ’Ιωακειμίδη
Μηχανολόγου-’Αλεκτρολόγου Μηχανικοῦ
’Αθήναι - Έλλας , 1976

1. Γενικότητες

Τό πρόβλημα ένός έλαστικού ωηγματωμένου μέσου ύπό συνθήκας έπιπέδου έντασεως ή έπιπέδου παραμορφώσεως δέν ̄εχει άντιμετωπισθή μέχρι σήμερον ύπό τήν γενικήν του μορφήν, αν καί τά προβλήματα ένός πεπερασμένου ή άπειρου, άπλού ή συνθέτου, άπληγκτος ή πολλαπλήγκτος συνοχής μέσου άνευ ρωγμῶν ̄εχουν πλήρως έπιλυθθή. Σηκοπόν τοῦ βιβλίου τούτου άποτελεῖ νά δοθοῦν γενικαί καί άποτελεσματικαί μέθοδοι διά τήν έπίλυσιν οίουδήποτε έπιπέδου προβλήματος είς μέσον μετά μιᾶς ή πλειόνων ρωγμῶν ή διατάξεων ρωγμῶν.

‘Η έπίλυσις ένός τοιούτου προβλήματος περιλαμβάνει τήν εύρεσιν καί έπίλυσιν τῶν άναγκαίων έξισώσεων. ’Οσον ἀφορᾷ είς τήν εύρεσιν τῶν έξισώσεων, ή μέθοδος τῶν μεγαδικῶν δυναμικῶν φ(z) καί ψ(z), ή Φ(z) καί Ψ(z), ήτις ̄εχει ήδη άποδειχθή λίαν άποτελεσματική κατά τήν έπίλυσιν προβλημάτων έπιπέδου έλαστικότητος, χρησιμοποιεῖται καθ’ δλοικηρίαν. ’Ολοκληρωτικαί παραστάσεις τῶν δυναμικῶν τούτων προτείνονται διά τά προβλήματα ρωγμῶν ύπό τήν μορφήν δλοικηρωμάτων τύπου Cauchy. Ούτω τό δλον πρόβλημα συνίσταται είς τήν εύρεσιν τῶν άγνώστων δυναμικῶν τούτων, τά δποτα είς τάς πλείστας περιπτώσεις δύνανται νά έρμηνευθοῦν ώς πυκνότητες συγκεντρωμένων δυνάμεων ή διατάξεων μεταστάσεων ή συνδυασμῶν τούτων έπενεργούντων έπι τῶν δρίων τοῦ μέσου καί είδικώτερον έπι τῶν ρωγμῶν. Καί τό πρῶτον καί τό δεύτερον θεμελιώδες πρόβλημα τῆς Θεωρίας τῆς ’Επιπέδου Έλαστικότητος ώς έ-

πίσης καί τό μικτόν θεμελιώδες πρόβλημα ἔξετάζονται. Βεβαίως, ἐμφασις δίδεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος, ἡ δοποία ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν συνήθη περίπτωσιν ἀφορτίστων ρωγμῶν ἐντός φορτίζομένου κατά τὰ ὑπόλοιπα ὅριά του μέσου. Διά χρήσεως τῶν τύπων τοῦ Plemelj τό ὄλον πρόβλημα ἀνάγεται εἰς ὄλας τάς περιπτώσεις εἰς τὴν ἐπίλυσιν μιᾶς ἢ περισσοτέρων ίδιομόρφων δλοικληρωτικῶν ἔξισώσεων τύπου Cauchy κατά μῆκος ὄλων τῶν ὅρίων τοῦ μέσου (περιλαμβανομένων καὶ τῶν ρωγμῶν). Αἱ ἔξισώσεις αὗται συνοδεύονται ὑπό τῆς συνθήκης ἢ τῶν συνθηκῶν μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων, αἴτινες πρέπει πάντοτε νά λαμβάνωνται ὑπ' ὅψιν πέριξ ἐκάστης ρωγμῆς ἢ διπῆς ἐντός τοῦ μέσου.

“Οσον ἀφορᾷ ἢδη εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν προκυπτουσῶν ἔξισώσεων, αὕτη συνίσταται βασικῶς εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ἐπίλυσιν τῶν δλοικληρωτικῶν ἔξισώσεων τύπου Cauchy, εἰς τάς δοποίας δύναται νά ἀναχθῇ ἐν ἐπίπεδον πρόβλημα ρωγμῶν, ὡς καὶ ἀνωτέρω ἀνεφέρθη. Διά τὴν ἀριθμητικὴν ἐπίλυσιν τοιούτων ἔξισώσεων, αἴτινες ὑπῆρξαν μέχρι σήμερον πρόβλημα διά πάντα ἀσχολούμενον μέ αὐτάς, εἰσάγεται μία λίαν ἀποτελεσματική μέθοδος, ἣτις συνίσταται εἰς τὴν ἀναγωγὴν τῶν ἔξισώσεων τούτων εἰς συστήματα γραμμικῶν ἔξισώσεων δι’ ἐφαρμογῆς τῶν γνωστῶν μεθόδων ἀριθμητικῆς δλοικληρώσεως εἰς τά ίδιομορφα δλοικληρώματα τύπου Cauchy. Δύναται δέ νά σημειωθῇ ὅτι ἡ χρῆσις τῶν μεθόδων ἀριθμητικῆς δλοικληρώσεως δι’ δλοικληρώματα τύπου Cauchy εἶναι ἐπιτρεπτή, μόνον ὅταν τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν ίδιομόρφων δλοικληρωτικῶν ἔξισώσεων, εἰς τάς δοποίας ἀπαντῶνται τά δλοικληρώματα ταῦτα, προσδιορίζωνται ὡς ρίζαι ὑπερβατικῶν ἔξισώσεων σχετιζομένων μέ τὴν χρησιμοποιούμενην μέθοδον ἀριθμητικῆς δλοικληρώσεως. Κατ’ αὐτόν τὸν τρόπον, μία ίδιομορφος δλοικληρωτική ἔξισωσις τύπου Cauchy δύναται νά θεωρηθῇ, ὡς πρός τὴν ἀριθμητικὴν ἐπίλυσίν της, σχεδόν ούχι δυσκολωτέρα μιᾶς συνήθους δλοικληρωτικῆς ἔξισώσεως μέ δμαλούς πυρῆνας. Ἡ μέθοδος αὕτη ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ίδιομόρφων δλοικληρωτικῶν ἔξισώσεων δύναται ἔξισου κα-

λῶς νά έφαρμοσθῇ εἰς τήν ἐπίλυσιν τοιούτων ἔξισώσεων ἀπαντωμένων ούχι μόνον εἰς τήν Θεωρίαν τῆς Ἐπιπέδου Ἐλαστικότητος ἀλλ' ἐπίσης καὶ εἰς πολλούς ἄλλους κλάδους τῆς Μαθηματικῆς Φυσικῆς.

Ἐφαρμογαί τῆς περιγραφείσης ἀντέρω μεθόδου ἐπιλύσεως προβλημάτων ρωγμῶν δίδονται δι' ὡρισμένα τοιαῦτα προβλήματα, τά πλεῦστα τῶν διποίων ἔχουν τίδη ἐπιλυθῆ δι' ἄλλων μεθόδων, πρός τόν σκοπόν ὅπως εἶναι δυνατή σύγκρισις αὐτῶν μετά τῆς προτεινομένης εἰς τό βιβλίον τοῦτο. Δύναται δέ νά παρατηρηθῇ ὅτι διά πρώτην φοράν αἱ τιμαί τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν εὐρίσκονται κατ' εύθεῖαν ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τῶν ἴδιομόρφων δλοκληρωτικῶν ἔξισώσεων ἄνευ τῆς ἀνάγκης τῆς χρήσεως τῆς μεθόδου τῆς προεκβολῆς ἢ τῶν σειρῶν ἀπείρων ὅρων.

Ἡ ἀνάπτυξις γενικῶν προγραμμάτων ὑπολογιστοῦ διά τήν ἐπίλυσιν οἰουδήποτε προβλήματος ρωγμῶν, τό διποῖον δύναται νά ἀπαντηθῇ εἰς μίαν πιθανήν ἐφαρμογήν, καὶ ἡ πινακοποίησις τῶν σημείων ἐφαρμογῆς μιᾶς ἴδιομόρφου δλοκληρωτικῆς ἔξισώσεως τύπου Cauchy διά τήν ἀριθμητικήν ἐπίλυσίν της εὐρίσκονται πέραν τοῦ σκοποῦ τοῦ βιβλίου τούτου, ἀλλ', ὡς ἐπίζεται, θά ἔξετασθοῦν εἰς προσεχεῖς ἔργασίας. Πιστεύεται δέ ὅτι τά προαναφερθέντα σημεῖα θά ήδύναντο νά ἀποτελέσουν συμπλήρωμα τῶν ὑφισταμένων πινάκων τετμημένων καὶ βαρῶν τῶν μεθόδων ἀριθμητικῆς δλοκληρώσεως.

2. Περιλήψεις

Τό δλον βιβλίον διαιρεῖται εἰς τέσσαρα κεφάλαια, ἔκαστον τῶν διποίων ὑποδιαιρεῖται περαιτέρω εἰς ἔννεα ἔως δέκα τμήματα. Λόγῳ τοῦ γεγονότος ὅτι σχετικῶς διάφορα μεταξύ των προβλήματα ἐπιλύονται εἰς τά τμήματα ταῦτα, σύντομοι περιλήψεις δὲ τῶν τμημάτων τοῦ βιβλίου δίδονται κατωτέρω, αἵτινες, πιστεύομεν, θά ἀποδειχθοῦν χρήσιμοι διά τόν ἐπιθυμοῦντα νά μελετήσῃ μόνον ὡρισμένα προβλήματα μεταξύ τῶν ἔξεταζομένων εἰς τό βιβλίον τοῦτο ἀναγνώστην.

Δύναται νά σημειωθῇ ὡσαύτως ὅτι, ὅταν δμιλῶμεν περί ίδιοιμόρφων δλοκληρωμάτων καί ίδιοιμόρφων δλοκληρώματιν ἔξισώσεων, ἐννοοῦμεν ίδιόμορφα δλοκληρώματα τύπου Cauchy καί ίδιοιμόρφους δλοκληρωτικάς ἔξισώσεις μέ πυρῆνας τύπου Cauchy ἀντιστοίχως καί ἐπίσης ὅτι οἱ ὅροι μέθοδος δλοκληρώσεως Gauss, μέθοδος δλοκληρώσεως Radau καί μέθοδος δλοκληρώσεως Lobatto χρησιμοποιοῦνται διά τήν δήλωσιν τῆς μεθόδου δλοκληρώσεως τύπου Gauss μέ δλας τάς τετμημένας της ἐντός τοῦ διαστήματος δλοκληρώσεως, μέ μίαν τῶν τετμημένων της συμπίπτουσαν μέ ἐν τῶν ἄκρων τοῦ διαστήματος δλοκληρώσεως καί μέ δύο τῶν τετμημένων της συμπιπτούσας μέ ἀμφότερα τά ἄκρα τοῦ διαστήματος δλοκληρώσεως ἀντιστοίχως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α': Τό πρόβλημα τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου μέσου

Είς τό κεφάλαιον τοῦτο μελετᾶται τό πρόβλημα τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου ἢ ἀνισοτρόπου μέσου. Είς τήν περίπτωσιν ίσοτρόπου μέσου τό πρῶτον θεμελιώδες, τό δεύτερον θεμελιώδες καί τό μικτόν θεμελιώδες πρόβλημα μελετῶνται, ἐνῷ είς τήν περίπτωσιν ἀνισοτρόπου μέσου ἔξετάζεται μόνον τό πρῶτον θεμελιώδες πρόβλημα. Ἀρκετάί μέθοδοι ἐπιλύσεως τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος προτείνονται, καθ' ὅσον εἶναι τό πλέον σημαντικόν. Καθ' ὅλον τό κεφάλαιον χρησιμοποιεῖται ἡ μέθοδος τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν καί τά ἔξεταζόμενα προβλήματα ἀνάγονται είς μιγαδικάς ίδιοιμόρφους δλοκληρωτικάς ἔξισώσεις κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς δμοῦ μετά μιας συνθήκης μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων.

A1. Γενική μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου: Τό πρῶτον θεμελιώδες πρόβλημα δι' ἄπειρον ίσότροπον μέσον περιέχον μίαν ἀπλήν λείαν ρωγμήν ἀνάγεται εἰς μίαν μιγαδικήν ίδιομορφον δλοκληρωτικήν ἔξισωσιν κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς καί μίαν συνθήκην μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων δια χρήσεως τῆς μεθόδου τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ ὁμοῦ μετά τῶν τύπων τοῦ Plemelj. Ἡ ἄγνωστος συνάρτησις εἰς τήν ίδιομορφον ὁ-

λοικληρωτικήν έξισωσιν, ήτις είναι ή πυκνότης ένδος όλοκληρώματος τύπου Cauchy παριστῶντος τήν συνάρτησιν $\Phi(z)$, δύναται νά συσχετισθῇ μέ τάς πυκνότητας συγκεντρωμένων δυνάμεων καί μεταστάσεων κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς. Αἱ πυκνότητες αὗται θά ἡδύναντο νά αληθοῦν συνάρτησις συγκεντρωμένων δυνάμεων καί συνάρτησις μεταστάσεων ἀντιστούχως.³ Επίσης γίνεται ἀναγωγή τῆς μιγαδικῆς ὁδιομόρφου όλοκληρωτικῆς έξισώσεις καί ἐφαρμογή εἰς δύο πράγματικάς ὁδιομόρφους όλοκληρωτικάς έξισώσεις καί ἐφαρμογή εἰς τό πρόβλημα μιᾶς εύθυγράμμου ρωγμῆς.

A2. 'Ετέρα μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου: 'Η αὐτή τεχνική ἡ περιγραφεῖσα εἰς τό τμῆμα A1 χρησιμοποιεῖται διά τήν ἀναγωγήν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου εἰς μίαν μιγαδικήν ὁδιομόρφου όλοκληρωτικήν έξισωσιν ὅμοια μετά τῆς συνθήκης μονοσημάντου τῶν μετατοπύσεων.⁴ Η μόνη διαφορά ἔγκειται εἰς τήν διαφορὸν ἔκφρασιν τῆς μιγαδικῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ δι' ἐνός όλοκληρώματος τύπου Cauchy. Δύο ἀκόμη όλοκληρωτικαί ἐξισώσεις τύπου Fredholm, ἵσοδύναμοι πρός τάς ὁδιομόρφους όλοκληρωτικάς έξισώσεις τοῦ τμήματος A1 καί τοῦ παρόντος τμήματος, εύρεσκονται ἐπίσης, ἀλλ' ἡ μορφὴ των είναι μᾶλλον πολύπλοκος.

A3. 'Επίλυσις τοῦ προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου διά προσδιορισμοῦ τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν φ_o(z) καί ψ_o(z): Μία ἀκόμη μέθοδος διά τήν ἐπύλυσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου δύναται νά προκύψῃ διά χρήσεως τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν φ_o(z) καί ψ_o(z) ἀντί τῶν χρησιμοποιηθέντων εἰς τό τμῆμα A1 $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$.⁵ Η οὕτω προκύπτουσα μιγαδική ὁδιομόρφος όλοκληρωτική έξισωσις ἀποδεικνύεται δτι είναι ἵσοδύναμος τῆς εύρεθείσης εἰς τό τμῆμα A1.

A4. 'Επίλυσις τοῦ προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου δι' ἀναγωγῆς τοῦ εἰς τό πρόβλημα τοῦ σώματος ἄνευ ρωγμῆς: Μία ἐναλλακτική μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου συνέσταται εἰς τήν θεώρησιν τῆς ρωγμῆς ὡς τμήματος τοῦ ὄρεου δύο ίσοτρόπων μέσων, τό ἐν τῶν ὀποίων είναι πεπερασμένον τό δ'⁶ ἔτερον ἀπειρον, εἰς τά ὀποῖα τό ὅλον ίσοτρόπον ἐπέπεδον δύ-

ναταὶ νά χωρισθῇ. Ἡ μέθοδος τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν διά τήν ἐπίλυσιν μέσων ἄνευ ρωγμῶν δύναται νά χρησιμοποιηθῇ διά τό θεωρηθέν πρόβλημα καύ, κατόπιν καταλλήλου τροποποιήσεως, νά τό ἀναγάγῃ εἰς μέαν μιγαδικήν ὑδιόμορφον ὀλοκληρωτικήν ἔξισωσιν ἵσοδύναμον τῆς τοῦ τμήματος Α3.

A5. Ἐπίλυσις τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἴσοτρόπου μέσου τῇ βοηθείᾳ τῆς λύσεως του δι' ἀπλῆν εύθυγραμμον ρωγμήν: Μία τελευταία μέθοδος ἀντιμετωπίσεως τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἴσοτρόπου μέσου συνέσταται εἰς τήν κατάλληλον τροποποίησιν τῆς κλασσικῆς λύσεως του διά τήν εὐδικήν περίπτωσιν τῆς εύθυγράμμου ρωγμῆς. Τό πρόβλημα δύναται οὕτω νά ἀναχθῇ εἰς ἓν σύστημα δύο ὑδιόμορφων ὀλοκληρωτικῶν ἔξισώσεων κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς ὅμοια μετά τῆς ἀπαρατήτου συνθήκης μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων.

A6. Γενική μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος δι' ἀπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἴσοτρόπου μέσου: Τό δεύτερον θεμελιώδες πρόβλημα δι' ἀπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἴσοτρόπου μέσου δύναται νά ἀντιμετωπισθῇ κατ' ἐντελῶς ἀνάλογον τρόπον τοῦ χρησιμοποιηθέντος εἰς τά τμήματα Α1 ἕως Α5 διά τό πρώτον θεμελιώδες πρόβλημα. Ἐνταῦθα χρησιμοποιεῖται ἡ μέθοδος τοῦ τμήματος Α1 διά τήν ἀναγωγήν τοῦ προβλήματος εἰς μέαν μιγαδικήν ὑδιόμορφον ὀλοκληρωτικήν ἔξισωσιν κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς ὅμοια μετά τῆς συνθήκης μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων.

A7. Γενική μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ μικτοῦ θεμελιώδους προβλήματος δι' ἀπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἴσοτρόπου μέσου: Τό μικτόν θεμελιώδες πρόβλημα δι' ἀπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἴσοτρόπου μέσου δύναται νά ἀναχθῇ εἰς μέαν μιγαδικήν ὑδιόμορφον ὀλοκληρωτικήν ἔξισωσιν κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς ὅμοια μετά τῆς συνθήκης μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων. Ἡ ἔξισωσις αὗτη ἔξαρταται ἐκ τῶν ὑψησταμένων ὄριακῶν συνθηκῶν ἐπύ τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς.

A8. Γενική μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου: Τό πρώτον θεμελιώδες πρόβλημα διά τό περιέχον μέαν ἀπλῆν λείαν ρωγμήν ἄπειρον ἀνισότροπον μέσον ἀνάγεται εἰς μέαν μιγαδικήν ὑδιόμορφον ὀλοκληρωτικήν ἔξισωσιν κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς ὅμοια μετά μιᾶς συνθήκης μονοσημάντου

τῶν μετατοπύσεων καθ' ὅμοιον τρόπον μέ τὸν χρησιμοποιηθέντα εἰς τὸ τμῆμα A1 διά τὴν περύπτωσιν ἵσοτρόπου μέσου, πλὴν τοῦ ὅτι χρησιμοποιούνται τά μιγαδικά δυναμικά $\Phi(z_1)$ καὶ $\Psi(z_2)$ ἀντέ τῶν $\Phi(z)$ καὶ $\Psi(z)$.

A9. Έτέρα μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου: 'Η ὕδια μέθοδος ἡ χρησιμοποιηθεῖσα εἰς τὸ τμῆμα A2 διά τὴν περύπτωσιν ἵσοτρόπου μέσου δύναται, καταλλήλως τροποποιουμένη, νά χρησιμοποιηθῇ διά τὴν ἐπύλυσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου. Τό πρόβλημα ἀνάγεται οὕτω εἰς μίαν μιγαδικήν ὕδιόμορφον ὄλοκληρωτικήν ἔξισωσιν ἵσοδύναμον τῆς εύρεθείσης εἰς τὸ τμῆμα A8. Δύο ἀκόμη ἵσοδύναμοι ὄλοκληρωτικαί ἔξισώσεις τύπου Fredholm δίδονται ὠσαύτως.' Ολαὶ αἱ ἔξισώσεις αὗται συνοδεύονται ὑπό τῆς συνθήκης μονοσημάντου τῶν μετατοπύσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β': Σύνθετα προβλήματα ρωγμῶν

Εἰς τό κεφάλαιον τοῦτο ἔξετάζονται συνθετώτερα προβλήματα ρωγμῶν, ὡς ρωγμαὶ ἐντός πεπερασμένων ἢ ἀπείρων μέσων ἢ διατάξεις ρωγμῶν. Μόνον ἡ περύπτωσις τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος καὶ ἴσοτρόπων μέσων μελετᾶται, λόγῳ τοῦ γεγονότος ὅτι δύνανται εύκόλως νά εύρεθοῦν ἀποτελεσματικαὶ μέθοδοι ἐπιλύσεως διά τάς περιπτώσεις καὶ τῶν ἄλλων θεμελιώδην προβλημάτων ὡς ἐπίσης καὶ τῶν ἀνισοτρόπων μέσων, ἐάν ληφθοῦν ὑπό ὅψιν αἱ ἀντίστοιχοι μέθοδοι ἐπιλύσεως αἱ εύρεθεῖσαι εἰς τό Κεφάλαιον A' διά τὴν ἀπλῆν λείαν ρωγμήν. 'Ωσαύτως δίδονται χρήσιμοι τύποι διά τὸν ὑπολογισμόν τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων.' Η μέθοδος τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν χρησιμοποιεῖται καθ' ὅλον τό κεφάλαιον.

B1. Ρωγμαὶ ἐντός ἀπείρου ἴσοτρόπου μέσου: Τό πρῶτον θεμελιώδες πρόβλημα δι' ἀπειρον ἴσοτρόπον μέσον μετά ρωγμῶν ἀνάγεται εἰς μίαν μιγαδικήν ὕδιόμορφον ὄλοκληρωτικήν ἔξισωσιν κατά μῆκος τῶν ρωγμῶν ὁμοῦ μετά συνθηκῶν μονοσημάντου τῶν μετατοπύσεων ἵσων τὸν ἀριθμόν πρός τὸν ἀριθμόν τῶν ρωγμῶν.' Εφαρμογή εἰς τὴν περύπτωσιν εὐθυγράμμων ρωγμῶν γίνεται πλέον λεπτομερῶς.

B2. Ρωγμή ἐντός πεπερασμένου ἴσοτρόπου μέσου: Τό πρῶτον

θεμελιώδες πρόβλημα διαίτη πεπερασμένον ὑστροπὸν μέσον περιέχον μέαν ρωγμήν ἀνάγεται εἰς μέαν μιγαδικήν ὑδιόμορφον ὀλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν κατά μῆκος τόσον τῆς ρωγμῆς ὅσον καί τοῦ ὄρέου τοῦ μέσου ὁμοῦ μετά μιᾶς συνθήκης μονοσημάντου τῶν μετατοπύσεων περί τὴν ρωγμήν.

B3. Ρωγμή μεταξύ δύο ἴσοτρόπων μέσων: Τό πρῶτον θεμελιώδες πρόβλημα δι' ἀπειρον ὑστροπὸν μέσον περιέχον ἐν ὑστροπὸν ἔγκλεισμα μετά ρωγμῆς κατά μῆκος τμήματος τοῦ ὄρέου του ἀνάγεται εἰς μέαν μιγαδικήν ὑδιόμορφον ὀλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν κατά μῆκος ὀλοκλήρου τοῦ ὄρέου τοῦ ἔγκλεισματος, περιλαμβανομένης καί τῆς ρωγμῆς, ὁμοῦ μετά μιᾶς συνθήκης μονοσημάντου τῶν μετατοπύσεων περί τὴν ρωγμήν.

B4. Σειρά περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ἴσοτρόπου μέσου: Τό πρῶτον θεμελιώδες πρόβλημα διάσειράν περιοδικῶς διατεταγμένων λείων ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ὑστροπὸν μέσου ἀνάγεται εἰς μέαν μιγαδικήν ὑδιόμορφον ὀλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν κατά μῆκος μιᾶς τῶν ρωγμῶν ὁμοῦ μετά μιᾶς συνθήκης μονοσημάντου τῶν μετατοπύσεων. Ἡ εὑρεσίς τῆς ἐξίσωσεως ταύτης βασίζεται εἴτε εἰς τὴν θεωρίαν τῶν περιοδικῶν συναρτήσεων εἴτε εἰς τὴν διδομένην εἰς τό τμῆμα B1 θεωρίαν τὴν ἀφορῶσαν εἰς τὴν ἀλληλεπίδρασιν μεταξύ πολλῶν ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ὑστροπὸν μέσου. Ἡ μεθόδος τῆς συμμόρφου ἀπεικονύσεως δύναται νά χρησιμοποιηθῇ ὥσαύτως.

B5. Σύστημα δίς περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ἴσοτρόπου μέσου: Τό πρῶτον θεμελιώδες πρόβλημα διά δίς περιοδικόν σύστημα λείων ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ὑστροπὸν μέσου ἀνάγεται εἰς μέαν μιγαδικήν ὑδιόμορφον ὀλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν κατά μῆκος μιᾶς τῶν ρωγμῶν ὁμοῦ μετά μιᾶς συνθήκης μονοσημάντου τῶν μετατοπύσεων. Ἡ εὑρεσίς τῆς ἐξίσωσεως ταύτης βασίζεται ἐπί τῆς θεωρίας τῶν δίς περιοδικῶν συναρτήσεων.

B6. Ἀκτινική διάταξις ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ὑστροπὸν μέσου: Τό πρῶτον θεμελιώδες πρόβλημα δι' ἀκτινικήν διάταξιν λείων ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ὑστροπὸν μέσου ἀνάγεται εἰς μέαν μιγαδικήν ὑδιόμορφον ὀλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν κατά μῆκος μιᾶς τῶν ρωγμῶν ὁμοῦ μετά μιᾶς συνθήκης μονοσημάντου τῶν μετατοπύσεων. Ἡ εὑρεσίς τῆς ἐξίσωσεως ταύτης βασίζεται εἴτε εἰς τὴν θεωρίαν τῶν αύτομόρφων συναρτήσεων εἴτε εἰς τὴν διθεῖσαν εἰς τό τμῆμα B1 θεωρίαν τὴν ἀφορῶσαν εἰς τὴν ἀλληλεπίδρα-

σιν πολλάν ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου.¹ Η μέθοδος τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως δύναται νά χρησιμοποιηθῇ ὡσαύτως. Γύνεται ἐπίσης ἐφαρμογή εἰς τήν περίπτωσιν ἀκτινοκῆς διατάξεως εὐθυγράμμων ρωγμῶν.

B7. Ρωγμή μετά γωνιακῶν σημείων ἢ σύστημα συντρεχουσῶν ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου: Μελετᾶται τό πρόβλημα τῆς μετά γωνιακῶν σημείων ρωγμῆς ἢ τοῦ συστήματος συντρεχουσῶν ρωγμῶν, μέχμασιν εἰς τό πρόβλημα τῆς εὐρέσεως τῶν τάξεων τῶν ίδιομορφῶν τῶν μηγανικῶν δυναμικῶν πέριξ γωνιακῶν σημείων ἢ κοινῶν σημείων ρωγμῶν. ² Εν συνεχείᾳ ἢ ἀναγωγή τοῦ προβλήματος εἰς τό πρόβλημα τῆς ἀπλῆς λεῖας ρωγμῆς, τό μελετηθέν εἰς τό τμῆμα A1, εἶναι εὐχερῶς δυνατή.

B8. Περίπτωσις ἀνισοτρόπων μέσων - Γενικεύσεις: Αἱ μελετηθεῖσαι εἰς τό τμῆμα τοῦτο μέθοδοι ἀντιμετωπίσεως προβλημάτων ρωγμῶν διά τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος καί ίσοτρόπων μέσων δύνανται νά τροποποιηθοῦν καταλλήλως οὕτως, ὥστε νά ἐφαρμόζωνται εἰς τάς περιπτώσεις τοῦ δευτέρου ἢ τοῦ μικτοῦ θεμελιώδους προβλήματος ὡς ἐπίσης καί εἰς τήν περίπτωσιν ἀνισοτρόπων μέσων. Εἶναι ἐπίσης δυνατόν νά συνδυασθοῦν αἱ ἀνωτέρω μέθοδοι κατά τρόπον, ὥστε πλέον σύνθετα τῶν ἔξετασθέντων εἰς τό κεφάλαιον τοῦτο προβλήματα ρωγμῶν νά δύνανται νά ἐπιλύωνται.

B9. Συντελεσταὶ ἐντάσεως τῶν τάξεων: Δύονται χρήσιμοι τύποι διά τόν ύπολογισμόν τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάξεων εἰς τά ἄκρα ρωγμῶν ἐπί τῇ ύποθέσει ὅτι τό μιγαδικόν δυναμικόν $\Phi(z)$ ἢ ἡ συνάρτησις μεταστάσεων ἢ ἄλλη τις ίσοδύναμος συνάρτησις ἔχει προηγουμένως ύπολογισθῇ. Δύεται ἐπίσης ὡς παράδειγμα ἢ περίπτωσις τῆς σχήματος τόξου κύκλου ρωγμῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ': "Αριθμητική ἐπίλυσις ίδιομόρφων δλοκληρωτικῶν ἔξισώσεων

Εἰς τό κεφάλαιον τοῦτο παρουσιάζεται μία ἀποτελεσματική μέθοδος διά τήν ἀριθμητικήν ἐπίλυσιν ίδιομόρφων δλοκληρωτικῶν ἔξισώσεων μέ πυρήνας τύπου Cauchy, ὡς αἱ εὐρεθεῖσαι εἰς τά Κεφάλαια Α' καί Β'. Διά χρήσεως τῆς μεθόδου ταύτης μία ίδιόμορφος δλοκληρωτική ἔξισωσις δύναται νά ἐπιλυθῇ ἀριθμητικῶς μέ τό ίδιον περίπου πλήθος ύπολογισμῶν τό ἀπαι-

τούμενον διά τήν ἀριθμητικήν ἐπίλυσιν μιᾶς δλοικληρωτικῆς ἔξισώσεως μέ διμαλούς πυρῆνας.

Γ1. Γενικότητες: Παρουσιάζονται κατά γενικόν τρόπον αἱ μέθοδοι ἀριθμητικῆς δλοικληρώσεως, ὡς ἐφαρμόζονται εἰς τήν ἐπίλυσιν δλοικληρωτικῶν ἔξισώσεων.

Γ2. Ἐπί τῶν ὑφισταμένων μεθόδων ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ἴδιομόρφων δλοικληρωτικῶν ἔξισώσεων: Γίνεται σύντομος ἀνασκόπησις τῶν ἥδη ὑφισταμένων μεθόδων ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ἴδιομόρφων δλοικληρωτικῶν ἔξισώσεων συνοδευομένη ὑπό τῶν πλεονεκτημάτων καί τῶν μετονεκτημάτων ἐκάστης τούτων.

Γ3. Αἱ μέθοδοι ἐπιλύσεως ἴδιομόρφων δλοικληρωτικῶν ἔξισώσεων Gauss-Chebyshev καὶ Lobatto-Chebyshev: Ἡ μέθοδος Gauss-Chebyshev διά τήν ἀριθμητικήν ἐπίλυσιν ὑδιομόρφων δλοικληρωτικῶν ἔξισώσεων ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι εἰς τήν πραγματικότητα μέθοδος δλοικληρώσεως Gauss διά θεωρήσεως τῆς ἀκριβείας της, ἣτις δέν εἶχε προηγουμένως πλήρως διερευνηθῆ. Ἡ μέθοδος Lobatto-Chebyshev διά τήν ἀριθμητικήν ἐπίλυσιν ὑδιομόρφων δλοικληρωτικῶν ἔξισώσεων προκύπτει περαιτέρω, διά πρώτην φοράν, καί κατά τρόπον ὅμοιον τοῦ χρησιμοποιηθέντος διά τήν ἀνάπτυξιν τῆς ἥδη γνωστῆς μεθόδου Gauss-Chebyshev. Αἱ μέθοδοι αὗται βασικῶς χρησιμοποιοῦν τάς ἀντιστοίχους μεθόδους ἀριθμητικῆς δλοικληρώσεως, καίτοι ὅχι κατά σαφῆ τρόπον, διά τὸν ὑπολογισμὸν τῶν δλοικληρωμάτων τύπου Cauchy τῶν ὑδιομόρφων δλοικληρωτικῶν ἔξισώσεων καί εύρσκουν κατάλληλα σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν ἔξισώσεων τούτων οὕτως, ὥστε αἱ ὑδιομορφίαι τύπου Cauchy νά μή ἐπηρεάζουν τήν ἀκρύβειαν ὑπολογισμοῦ τῶν δλοικληρωμάτων τύπου Cauchy. Τό πλεονέκτημα τῆς μεθόδου Lobatto-Chebyshev ἔναντι τῆς μεθόδου Gauss-Chebyshev, εἰς τήν περίπτωσιν προβλημάτων ρωγμῶν, εἶναι ὅτι διά χρήσεως τῆς μεθόδου Lobatto - Chebyshev αἱ τιμαί τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τὰ ἄκρα τῶν ρωγμῶν δύνανται νά προσδιορίζωνται κατ' εὐθεῖαν μετά τήν ἀριθμητικήν ἐπίλυσιν τῶν ἀντιστοίχων ὑδιομόρφων δλοικληρωτικῶν ἔξισώσεων.

Γ4. Ἐφαρμογαί τῆς μεθόδου δλοικληρώσεως Gauss εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ἴδιομόρφων δλοικληρωμάτων: Ἡ μέθοδος δλοικληρώσεως Gauss δύναται νά τροποποιηθῇ καταλλήλως οὕτως, ὥστε νά ἐφαρμόζεται διά τὸν ἀριθμητικόν ὑπολογισμὸν ὑδιομόρφων δλοικληρωμάτων τύπου Cauchy. Ἡ

τροποποίησις αὕτη συνέσταται εἰς τήν ὅπαρξιν ἐνός ἐπί πλέον ὅρου εἰς τήν προσεγγιστικήν ἔκφρασιν ἐνός τοιούτου ὀλοκληρώματος. Η ἀκρύβεια τῆς τροποποιημένης ταύτης μεθόδου ὀλοκληρώσεως Gauss εἶναι ἐντελῶς ἵση μέτην ἀκρύβειαν τῆς συνήθους μεθόδου ὀλοκληρώσεως Gauss.

Γ5. Ἐφαρμογή μιᾶς γενικῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως διά τόν ὑπολογισμόν ໃδιομόρφων ὀλοκληρωμάτων: "Ἐν ὑδρόμορφον ὀλοκλήρωμα τύπου Cauchy δύναται νά ὑπολογισθῇ ἀριθμητικῶς κατά τόν αὐτόν τρόπον μέ ἐν κοινόν ὀλοκλήρωμα, πλὴν τοῦ γεγονότος ὅτι οἱ ἀπλοῦ πόλοι τῆς ὀλοκληρουμένης συναρτήσεως ἐντός τοῦ διαστήματος ὀλοκληρώσεως πρέπει νά λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν. Κατ' αὐτόν τόν τρόπον, εἰς νέος ὅρος, μή ὑφιστάμενος εἰς τάς προσεγγιστικάς ἔκφράσεις κοινῶν ὀλοκληρωμάτων, πρέπει νά προστεθῇ. Διά τῆς μεθόδου ταύτης, οἰοσδήποτε χρησιμοποιούμενος διά κοινά ὀλοκληρώματα τύπος ὀλοκληρώσεως δύναται νά τροποποιηθῇ, ὥστε νά χρησιμοποιηται καί δι' ὑδρόμορφα ὀλοκληρώματα τύπου Cauchy.

Γ6. Ἐφαρμογή τῶν μεθόδων ὀλοκληρώσεως Radau καὶ Lobatto εἰς τόν ὑπολογισμόν ໃδιομόρφων ὀλοκληρωμάτων: Αἱ μέθοδοι ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως Radau καὶ Lobatto προκύπτουν ὡς εἰδικαί περιπτώσεις τῆς ἀναπτυχθείσης εἰς τό τμῆμα Γ5 γενικῆς μεθόδου ὑπολογισμού ַδιομόρφων ὀλοκληρωμάτων τύπου Cauchy.

Γ7. Προσεγγιστική μέθοδος ἐπιλύσεως ַδιομόρφων ὀλοκληρωτικῶν ἔξισώσεων: Μία ὑδρόμορφος ὀλοκληρωτική ἐξίσωσις δύναται νά ἐπιλυθῇ ἀριθμητικῶς, ἐάν τά ὀλοκληρώματά της ἔκφρασθοῦν κατά προσεγγιστικόν τρόπον τῇ χρήσει ἐνός καταλλήλου τύπου ὀλοκληρώσεως καί κατόπιν ἡ ἐξίσωσις ἐφαρμοσθῇ εἰς ὧρισμένα σημεῖα ἐντός τοῦ διαστήματος ὀλοκληρώσεως. Κατ' αὐτόν τόν τρόπον προκύπτει ἐν σύστημα γραμμικῶν ἔξισώσεων, τό δόπον δύναται νά ἐπιλυθῇ εύκόλως. Τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τῆς ַδιομόρφου ὀλοκληρωτικῆς ἔξισώσεως πρέπει νά ἐκλεγοῦν ὡς ρίζαι ὧρισμένων ὑπερβατικῶν συναρτήσεων καί κατά τρόπον, ὥστε νά μηδενίζεται ὁ ἐπί πλέον ὅρος εἰς τήν προσεγγιστικήν ἔκφρασιν ἐνός ַδιομόρφου ὀλοκληρώματος, ὥστε τό ὀλοκλήρωμα τοῦτο νά ἐκφράζεται ἀριθμητικῶς ὡς κοινόν ὀλοκλήρωμα.

Γ8. Προσδιορισμός συναρτήσεως εἰς τι διάστημα ἐκ τῶν τιμῶν της εἰς συγκεκριμένα σημεῖα διά παρεμβολῆς: Γίνεται σύν-

τομος ἀνασκόπησις τῶν γνωστῶν μεθόδων τῆς παρεμβολῆς, ὡς ἐφαρμόζεται εἰς τάς περιπτώσεις, ὅπου μένα συνάρτησις ἔχει προσδιορισθῇ μόνον εἰς τάς τετυμένας μετά μεθόδου ἀριθμητικῆς δόλοκληρώσεως καί πρέπει νά προσδιορισθῇ καθ' ὅλον τό διάστημα δόλοκληρώσεως.⁴ Η περίπτωσις αὕτη προκύπτει, ἀφοῦ ἔχει εὐρεθῇ ἡ λύσις τοῦ συστήματος τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων τοῦ προσεγγίζοντος μέναν ὑδατομορφον δόλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν.

Γ9. Συνήθεις περιπτώσεις ιδιομόρφων δόλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων καί μέθοδοι ἐπιλύσεως αὐτῶν: Ἡ περιγραφεῖσα εἰς τό τμῆμα Γ7 μέθοδος ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ὑδατομόρφων δόλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων ἐφαρμόζεται εἰς τάς πλέον συνήθεις περιπτώσεις μεθόδων ἀριθμητικῆς ὄλοκληρώσεως χρησιμοποιουμένων διά τὸν ὑπολογισμόν τῶν δόλοκληρωμάτων τῶν ὑδατομόρφων δόλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων. Δι' ἐκάστην τῶν μεθόδων τούτων, αὗτινες εἶναι τύπου Gauss, Radau καὶ Lobatto, δύοντας ἀναλυτικῶς αἱ συναρτήσεις, αἱ διάταξις τῶν δόποιών εἶναι τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν ἀντιστούχων ὑδατομόρφων δόλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων. Αἱ συναρτήσεις αὗται προκύπτουν ἐκ τῶν ὁρθογωνίων πολυωνύμων τῶν σχετικῶν μὲ τὴν θεωρητικῶν μέθοδον δόλοκληρώσεως. Κατ' αὐτόν τὸν τρόπον ἐκάστη μέθοδος, ἐφαρμόσιμος δι' ἐν ὠρισμένον διάστημα δόλοκληρώσεως καί συνάρτησιν βάρους καί περαιτέρω διά μέναν ὑδατομορφον δόλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν περιέχουσαν δόλοκληρωμα τύπου Cauchy μέ τό αὐτό διάστημα δόλοκληρώσεως καί συνάρτησιν βάρους, δύναται νά θεωρηθῇ, ὅταν συμπληρωθῇ ὑπό τῶν τιμῶν τῶν σημείων ἐφαρμογῆς τῆς ὑδατομόρφου δόλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως, ὡς μέθοδος διά τὴν ἀριθμητικήν ἐπέλυσιν τῆς ὑδατομόρφου δόλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως. Οὕτως, ἐξητάσθησαν αἱ κάτωθι μέθοδοις ἐπιλύσεως ὑδατομόρφων δόλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων: Gauss-Legendre, Lobatto-Legendre, Gauss-Chebyshev, Lobatto-Chebyshev, Gauss-Jacobi, Gauss-Laguerre καί Gauss-Hermite ὡς ἐπίσης καί τροποποιημέναι μορφαί τῶν μεθόδων Gauss-Legendre, Lobatto-Legendre καί Gauss-Hermite κατόπιν τῆς ἀλλαγῆς μεταβλητῆς $\tau = t^2$ ή $\tau = 1-t^2$, ἐνθα τ εἶναι ἡ μεταβλητή δόλοκληρώσεως διά τὴν κανονικήν μορφήν τῶν μεθόδων καί τ διά τὴν τροποποιημένην μορφήν των. Αἱ τροποποιημέναι αὗται μέθοδοι εἶναι ἵσοδύναμοι μέθοδοις Gauss, Radau καὶ Lobatto καί πολύ χρήσιμοι διά τὴν ἀριθμητικήν ἐπέλυσιν ὑδατομόρφων δόλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων ἀπαντωμένων εἰς προβλήματα ρωγμῶν. Πύνακες τῶν τετυμένων ἐφαρμογῆς μεταξις ὑδατομόρφου δόλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως διά τὴν ἀριθμητικήν ἐπέλυσιν της

διέδονται διά τάς περιπτώσεις τῶν μεθόδων Gauss-Legendre, τροποποιημένης Gauss-Legendre, Lobatto-Legendre καί τροποποιημένης Lobatto-Legendre.

Γ10. Παρατηρήσεις: Γίνονται χρήσιμοι παρατηρήσεις ἀφορῶσαι εἰς τήν ἀκρίβειαν μιᾶς μεθόδου ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως, ὅταν ἐφαρμόζεται διά τήν ἐπέλυσιν μιᾶς ἰδιομόρφου ὀλοκληρωτικῆς ἔξισώσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ': 'Εφαρμογαί είς συγκεκριμένα προβλήματα ρωγμῶν

Είς τό κεφάλαιον τοῦτο αὶ ἀναπτυχθεῖσαι είς τά κεφάλαια A' καὶ B' μέθοδοι ἐπιλύσεως προβλημάτων ρωγμῶν ἐφαρμόζονται είς ὡρισμένα γνωστά προβλήματα ρωγμῶν. Διά τήν ἐπίλυσιν τῶν προκυπτουσῶν ἰδιομόρφων ὀλοκληρωτικῶν ἔξισώσεων αἱ μέθοδοι Radau καὶ Lobatto προετιμήθησαν τῶν ἀντιστοίχων μεθόδων Gauss, λόγῳ τοῦ γεγονότος ὅτι κατ' αὐτόν τὸν τρόπον οἱ συντελεσταί ἐντάσεως τῶν τάσεων είς τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν δύνανται νά ὑπολογίζωνται κατ' εύθεῖαν. Σύγκρισις τῶν μεθόδων τούτων ἀντιμετωπίσεως προβλημάτων ρωγμῶν μέσαλλας ἥδη ὑφισταμένας μεθόδους γίνεται, ὅπου εἶναι δυνατόν. Πίνακες τιμῶν τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων είς τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν δίδονται ὠσαύτως. Εξετάζονται δέ παραδείγματα ἐκ τῶν περιπτώσεων κανονικῶν διατεταγμένων, τεμνομένων ἢ διακλαδιζομένων ρωγμῶν.

Δ1. Έφαρμογή 1η: Συγγραμμικαί περιοδικῶς διατεταγμέναι ρωγμαί: 'Εξετάζεται τό πρόβλημα μιᾶς σειρᾶς συγγραμμικῶν περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ἐντός ἀπεύρου ἵστορόπου μέσου. "Ολαι αὖ ρωγμαί φορτίζονται μέ σταθεράν πίεσιν. Τό πρόβλημα ἀνάγεται εἰς μίαν ἰδιόμορφον ὀλοκληρωτικήν ἐξέσωσιν κατά μῆκος μιᾶς τῶν ρωγμῶν, ἥτις ἐπιλύεται διά τῆς μεθόδου Lobatto-Chebyshev. Δέδεται ὠσαύτως ἡ κατανομή τῆς συναρτήσεως μεταστάσεων κατά μῆκος τῶν ρωγμῶν δι' ὥρισμένας τυπικάς περιπτώσεις ὡς ἐπέσης καί αἱ ἀντιστοιχοὶ τιμαί τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων είς τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν, αἵτινες εύρεσκονται ἐν συμφωνίᾳ μέ τάς θεωρητικάς τιμάς τάς εύρεθείσας ἐκ τῆς λύσεως κλευστῆς μορφῆς τοῦ παρόντος προβλήματος. Γενίκευσις τῆς μεθόδου ἐπιλύσεως εἰς πλέον συνθέτους περιπτώσεις σειρῶν περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν εἶναι πλήρως δυνατή.

Δ2. Έφαρμογή 2α: Παράλληλοι περιοδικῶς διατεταγμέναι ρωγμαί: 'Εξετάζεται τό πρόβλημα μιᾶς σειρᾶς παραλλήλων περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ἐντός ἀπεύρου ἵσοτρόπου μέσου καί μέ σταθεράν πίεσιν κατά μῆκος τῶν πλευρῶν τῶν ρωγμῶν. Τό πρόβλημα ἀνάγεται εἰς μάνιν ὑδρόμορφον ὄλοκληρωτικήν ἔξισωσιν κατά μῆκος μιᾶς τῶν ρωγμῶν, ἥτις ἐπιλύεται διά τῆς μεθόδου Lobatto-Chebyshev, ὡς καί εἰς τήν περιπτώσιν τῆς 'Έφαρμογῆς 1. Δέδεται ὡσαύτως ἡ κατανομή τῆς συναρτήσεως μεταστάσεων κατά μῆκος τῶν ρωγμῶν δι' ὧρισμένας τυπικάς περιπτώσεις ὡς ἐπίσης καί αἱ ἀντίστοιχοι τιμαί τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν, αἴτινες εύρύσκονται ἐν συμφωνίᾳ μέ τάς ἥδη εύρεθείσας δι' ἄλλων μεθόδων τιμάς. Γενίκευσις τῆς μεθόδου ἐπιλύσεως εἰς πλέον συνθέτους περιπτώσεις σειρῶν περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν εἶναι πλήρως δυνατή.

Δ3. Έφαρμογή 3η: Σύστημα δίς περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν 'Εξετάζεται τό πρόβλημα μιᾶς δίς περιοδικῆς διατάξεως ρωγμῶν ἐντός ἀπεύρου ἵσοτρόπου μέσου καί μέ σταθεράν πίεσιν κατά μῆκος τῶν πλευρῶν τῶν ρωγμῶν. Τό πρόβλημα ἀνάγεται εἰς μάνιν ὑδρόμορφον ὄλοκληρωτικήν ἔξισωσιν κατά μῆκος μιᾶς τῶν ρωγμῶν, ἥτις ἐπιλύεται διά τῆς μεθόδου Lobatto-Chebyshev, ὡς καί εἰς τάς περιπτώσεις τῶν Έφαρμογῶν 1 καὶ 2. Δέδεται ὡσαύτως ἡ κατανομή τῆς συναρτήσεως μεταστάσεων κατά μῆκος τῶν ρωγμῶν δι' ὧρισμένας τυπικάς περιπτώσεις ὡς ἐπίσης καί αἱ ἀντίστοιχοι τιμαί τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν, αἴτινες εύρύσκονται ἐν συμφωνίᾳ μέ τάς ἥδη εύρεθείσας δι' ἄλλων μεθόδων τιμάς. Γενίκευσις τῆς μεθόδου ἐπιλύσεως εἰς πλέον συνθέτους περιπτώσεις δίς περιοδικῶν διατάξεων ρωγμῶν εἶναι πλήρως δυνατή.

Δ4. Έφαρμογή 4η: Συντρέχουσαι ἀκτινικῶς καί συμμετρικῶς διατεταγμέναι ρωγμαί: 'Εξετάζεται τό πρόβλημα μιᾶς ἀστεροειδοῦς ρωγμῆς ἐντός ἀπεύρου ἵσοτρόπου μέσου καί μέ σταθεράν πίεσιν κατά μῆκος τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς. Τό πρόβλημα ἀνάγεται εἰς μάνιν ὑδρόμορφον ὄλοκληρωτικήν ἔξισωσιν κατά μῆκος μιᾶς τῶν ρωγμῶν, ἥτις ἐπιλύεται διά τῆς τροποποιημένης μεθόδου Gauss-Legendre. Ἡ κατανομή τῆς συναρτήσεως μεταστάσεων κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς δέδεται διά διαφόρους τιμάς τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀλάδων ταύτης ὡς καί αἱ ἀντίστοιχοι τιμαί τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα τῶν ἀλάδων τῆς ρωγμῆς, αἴτινες εύρύσκονται ἐν

συμφωνή φ μέ τάς ήδη εύρεθείσας δι' αλλων μεθόδων τυμάς. Γενέκευσις της μεθόδου έπιλύσεως είς πλέον συνθέτους περιπτώσεις ρωγμῶν μετ' ακτινο-κῆς συμμετρίας εἶναι πλήρως δυνατή.

Δ5. Έφαρμογή 5η: Δύο καθέτως διχοτομούμεναι ρωγμαί: 'Εξετάζεται τό πρόβλημα δύο καθέτως διχοτομουμένων ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου καί μέ σταθεράν πίεσιν κατά μῆκος τῶν πλευρῶν τῶν ρωγμῶν. Τό πρόβλημα τοῦτο είς τήν περίπτωσιν καθέτως διχοτομουμένων ἀνίσων ρωγμῶν ἀνάγεται εἰς ἓν σύστημα δύο ίδιομόρφων δόλοκληρωτικῶν ἔξισώσεων κατά μῆκος τῶν δύο ρωγμῶν, τό διόποτε ἀπλοποιεῖται εἰς μίαν ίδιομορφον δόλοκληρωτικήν ἔξισωσιν εἰς τήν περίπτωσιν καθέτως διχοτομουμένων ἕσων ρωγμῶν.. Αί ἔξισώσεις αὗται ἐπιλύονται διά τῶν μεθόδων: Gauss-Legendre, Gauss-Chebyshev καί Lobatto-Chebyshev.' Η κατανομή της συναρτήσεως μεταστάσεων κατά μῆκος τῶν ρωγμῶν δέδεται διά διαφόρους λόγους μηκῶν τῶν ρωγμῶν ὡς καί αὖτε στοιχοι τιμαί τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν, αὕτινες εύρεσκονται ἐν συμφωνή φ μέ τάς ήδη εύρεθείσας δι' αλλων μεθόδων τυμάς. Γενέκευσις της μεθόδου έπιλύσεως είς πλέον συνθέτους περιπτώσεις προβλημάτων ρωγμῶν εἶναι πλήρως δυνατή.

Δ6. Έφαρμογή 6η: Κάθετος ἐπί ήμιεπίπεδον ρωγμή: 'Εξετάζεται τό πρόβλημα μιᾶς καθέτου ἐπί τό δύοιν ἐνδό ίσοτρόπου ήμιεπιπέδου ρωγμῆς καί μέ σταθεράν φόρτισιν είς τό ἀπειρον κάθετον ἐπί τήν ρωγμήν. Τό πρόβλημα ἀνάγεται είς ἓν σύστημα δύο ίδιομόρφων δόλοκληρωτικῶν ἔξισώσεων κατά μῆκος της ρωγμῆς καί τοῦ δύοίου τοῦ ήμιεπιπέδου, τό διόποτε ἐπιλύεται διά χρήσεως της τροποποιημένης μεθόδου Gauss-Legendre καί της μεθόδου Gauss-Laguerre. Δύδεται ὡσαύτως ἡ κατανομή της συναρτήσεως μεταστάσεων κατά μῆκος τοῦ δύοίου τοῦ ήμιεπιπέδου καί της ρωγμῆς ὡς ἐπίσης καί ἡ τυμή τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων είς τό ἄκρον της ρωγμῆς, κήτις εύρεσκεται ἐν συμφωνή φ μέ τήν ήδη εύρεθείσαν δι' αλλων μεθόδων τυμήν. Γενέκευσις της μεθόδου έπιλύσεως είς πλέον συνθέτους περιπτώσεις ἔξωτερικῶν ρωγμῶν εἶναι πλήρως δυνατή.

Δ7. Έφαρμογή 7η: Απλή λεία ρωγμή ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου: 'Εξετάζεται τό πρόβλημα μιᾶς ἀπλής λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου καί μέ σταθεράν φόρτισιν είς τό ἀπειρον. Τό εύρεθεν διά τό πρόβλημα τοῦτο είς τό τμῆμα A1 σύστημα δύο ίδιομόρφων δόλοκληρωτικῶν ἔξισώσεων ἐπιλύεται διά τάς περιπτώσεις εύθυγράμμους ὡς καί

σχήματος τόξου κύκλου ρωγμῆς διά χρήσεως τῆς μεθόδου Lobatto-Chebyshev. Δέδονται ὡσαύτως αἱ κατανομαὶ τῆς συναρτήσεως μεταστάσεων κατά μῆκος τῶν ρωγμῶν ὡς ἐπίσης καὶ αἱ τιμαὶ τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τὰ ἄκρα τῶν ρωγμῶν, αὕτινες εὐρύσκονται ἐν συμφωνίᾳ μὲν τάς θεωρητικάς τιμάς. Ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου ἐπιλύσεως δι' οἰανδήποτε περίπτωσιν ἀπλῆς λεῖας ρωγμῆς ἐντός ἀπεύρου ἵστορόπου μέσου εἶναι πλήρως δυνατή.

Δ8. Ἐφαρμογὴ 8η: Συντρέχουσαι ρωγμαί: Ἐξετάζεται τὸ πρόβλημα μιᾶς συμμετρικῶς διακλαδιζομένης ρωγμῆς ἐντός ἀπεύρου μέσου καὶ μέσταθεράν καὶ κάθετον ἐπί τὴν διακλαδιζομένην ρωγμήν φόρτισιν εἰς τὸ ἄπειρον. Τό πρόβλημα ἀνάγεται εἰς ἐν σύστημα τριῶν ἴδιομόρφων ὀλοκληρωτικῶν ἔξισώσεων κατά μῆκος τῆς συνθέτου ρωγμῆς, τό διόποτε ἐπιλύεται εἴτε διά χρήσεως τῆς τροποποιημένης μεθόδου Gauss-Legendre καὶ τῆς τροποποιημένης μεθόδου Lobatto-Legendre, εἴτε διά χρήσεως μόνον τῆς τροποποιημένης μεθόδου Lobatto-Legendre ὅμοια δύο προφανῶν συνθηκῶν εἰς τό σημεῖον διακλαδώσεως τῆς κυρίας ρωγμῆς. Δύδονται ὡσαύτως αἱ προκύπτουσαι τιμαὶ τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τὰ τρία ἄκρα τῆς συνθέτου ρωγμῆς εὐρύσκομεναι ἐν ἴκανοποιητικῇ συμφωνίᾳ μέν τάς πειραματικάς τιμάς των, καθ' ὃσον δέν ἔχουν εὐρεθῆ θεωρητικαί τιμαί διά τό πρόβλημα τοῦτο. Γενίκευσις τῆς μεθόδου ἐπιλύσεως δι' οἰανδήποτε πρόβλημα ἐκκινουσῶν ἐκ ιονοῦ σημείου ρωγμῶν εἶναι πλήρως δυνατή.

Δ9. Ἐφαρμογὴ 9η: Σειρά παραλλήλων ἡμιταπείρων περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν: Ἐξετάζεται τὸ πρόβλημα μιᾶς σειρᾶς παραλλήλων ἡμιταπείρων περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ἐντός ἀπεύρου ἵστορόπου μέσου μέσταθεράν πέρεσιν ἐφαρμοζομένην κατά μῆκος τῶν πλευρῶν τῶν ρωγμῶν. Τό πρόβλημα ἀνάγεται εἰς μίαν ἴδιομορφὸν ὀλοκληρωτικὴν ἔξισωσιν κατά μῆκος μιᾶς τῶν ρωγμῶν, ἥτις ἐπιλύεται διά τῆς τροποποιημένης μεθόδου Gauss-Hermite. Δύδεται ὡσαύτως ἡ κατανομὴ τῆς συναρτήσεως μεταστάσεων κατά μῆκος τῶν ρωγμῶν ὡς ἐπίσης καὶ ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τὰ ἄκρα τῶν ρωγμῶν, ἥτις εὐρύσκεται ἐν συμφωνίᾳ μέν τὴν ἥδη εὐρεθεῖσαν δι' ἄλλων μεθόδων τιμήν. Γενίκευσις τῆς μεθόδου ἐπιλύσεως εἰς πλέον συνθέτους περιπτώσεις σειρῶν ἡμιταπείρων περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν εἶναι πλήρως δυνατή.