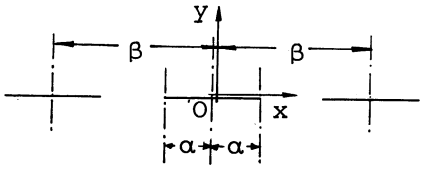
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΡΩΓΜΩΝ

Δ1. ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η: ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΑΙ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΡΩΓΜΑΙ

Θεωροῦμεν σύστημα ἐπ'εὐθείας κειμένων καί περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ὡς εἰς τό παραπλεύρως Σχῆμα 1. Τό μῆκος ἑκάστης ρωγμῆς εἶναι 2α καί ἡ ἀπόστασις μεταξύ τῶν μέσων δύο διαδοχικῶν ρωγμῶν εἶναι β. Ἅπασαι αἱ ρωγμαί θεωροῦνται φορτιζόμεναι καθέτως διά φορτίσεως (-σ) ἐπ'ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν αὐτῶν. Θά εὕρωμεν τόν συντελεστήν ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν. Ὁ συντελεστής ἐντάσεως τῶν τάσεων οὗτος εἶναι προφανῶς ὁ αὐτός καί εἰς τήν περίπτωσιν ρωγμῶν μή φορτιζομένων, ἐντός μέσου μέ φόρτισιν σ εἰς τό ἄπειρον καθέτως ἐπί τήν διεύθυνσιν τῶν ρωγμῶν, ἤτοι κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος Oy βάσει τοῦ ἀνωτέρω Σχήματος 1.



Σχῆμα 1

Ἡ συνάρτησις τῶν μεταστάσεων g(x) λαμβάνει προφανῶς τάς αὐτάς τιμάς ἐπί τῶν ἀντιστοίχων σημείων ὅλων τῶν ρωγμῶν, ὁπότε δυνάμεθα νά γράψωμεν τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν, εἰς τήν ὁποίαν ἀνάγεται τό πρόβλημά μας, μόνον ἐπί τῆς ρωγμῆς $-\alpha<x<\alpha$, βάσει δέ τῶν ὅσων ἀνεφέρθησαν εἰς τά τμήματα A1 καί B1 καί εἰδικώτερον τοῦ τύπου (A1.37) ἡ ἰδιόμορφος αὕτη ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις θά ἔχῃ τήν κατωτέρω διδομένην μορφήν μέ ἄγνωστον συνάρτησιν τήν g(x), ἕνθα χάριν ἁπλότητος ἐτέθησαν: τ, $t = x/\alpha$, ὥστε ἡ ρωγμή $-\alpha<x<\alpha$ νά ἐκφράζεται ὡς: $-1<\tau,t<1$:

$$\frac{\alpha}{\pi i}\int_{-1}^{1} g(\alpha\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha\tau-n\beta)-\alpha t}d\tau - \frac{\alpha}{\pi i}\int_{-1}^{1}\overline{g(\alpha\tau)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha\overline{\tau}-n\beta)-\alpha\overline{t}}\overline{d\tau}-$$

$$-\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{\alpha}{\pi i}\int_{-1}^{1}\overline{g(\alpha\tau)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha\tau-n\beta)-\alpha t}\overline{d\tau} + \right.$$

$$+ \frac{\alpha}{\pi i}\int_{-1}^{1} g(\alpha\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha\bar{\tau}-n\beta)-\alpha\bar{t}}{[(\alpha\tau-n\beta)-\alpha t]^2} d\tau \Bigg\} = -2\sigma. \qquad (1)$$

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν ὅτι: $\tau=\bar{\tau}$ καί $t=\bar{t}$ ἐπί τῆς ρωγμῆς ὡς καί τό γεγονός ὅτι ἐν προκειμένῳ ἡ συνάρτησις $g(\alpha\tau)$ εἶναι καθαρῶς φανταστική, ὅτε δυνάμεθα νά θέσωμεν:

$$\mu(\tau) = \frac{i}{\sigma} g(\alpha\tau), \qquad (2)$$

τῆς συναρτήσεως $\mu(\tau)$ οὔσης πραγματικῆς, γράφομεν τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (1) ὑπό τήν ἐξῆς ἁπλῆν μορφήν:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \mu(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau-t)-n\frac{\beta}{\alpha}} d\tau = 1. \qquad (3)$$

Λαμβάνοντες περαιτέρω ὑπ'ὄψιν τήν ταυτότητα {PHILLIPS, 1966, §7.6}:

$$\pi\cot\pi x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2-n^2}, \qquad (4)$$

εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau-t)-n\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\beta}\left\{\frac{1}{\frac{\alpha(\tau-t)}{\beta}} + 2\frac{\alpha(\tau-t)}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\frac{\alpha(\tau-t)}{\beta}\right]^2-n^2}\right\} =$$

$$= \frac{\pi\alpha}{\beta}\cot\frac{\pi\alpha(\tau-t)}{\beta}, \qquad (5)$$

ὁπότε ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (3) λαμβάνει τήν ἐξῆς μορφήν:

$$\int_{-1}^{1} \mu(\tau)\cot\frac{\pi\alpha(\tau-t)}{\beta} d\tau = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad (6)$$

περαιτέρω δέ, δεδομένου ὅτι ἡ συνάρτησις $\mu(\tau)$ εἶναι ἐν προκειμένῳ περιττή, τήν κάτωθι μορφήν:

$$\int_0^1 \mu(\tau) \left\{ \cot\frac{\pi\alpha(\tau-t)}{\beta} + \cot\frac{\pi\alpha(\tau+t)}{\beta} \right\} d\tau = \frac{\beta}{\alpha}. \qquad (7)$$

Ἡ συνάρτησις $\mu(\tau)$ παρουσιάζει ἰδιομορφίας παρά τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς τείνουσα εἰς τό ἄπειρον διά $\tau \to \pm 1$, διά τοῦτο δέ κατά τήν προσεγγιστικήν ἐπίλυσιν τῆς ἀνωτέρω ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως ἀντικαθίσταται ὑπό τῆς συναρτήσεως:

$$\nu(\tau) = \sqrt{1-\tau^2}\, \mu(\tau), \qquad (8)$$

ὅτε ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (7) γράφεται:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \nu(\tau) \left\{ \cot\frac{\pi\alpha(\tau-t)}{\beta} + \cot\frac{\pi\alpha(\tau+t)}{\beta} \right\} d\tau = \frac{\beta}{\alpha}. \qquad (9)$$

Ἡ συνάρτησις βάρους εἶναι ἡ $1/\sqrt{1-\tau^2}$, ὁπότε κατάλληλος τρόπος προσεγγιστικοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ ὁλοκληρώματος τοῦ πρώτου μέλους εἶναι διά τῆς μεθόδου GAUSS-CHEBYSHEV. Ἐν προκειμένῳ ὅμως θά χρησιμοποιήσωμεν τήν μέθοδον LOBATTO-CHEBYSHEV, καθ'ὅσον ἐνδιαφερόμεθα κυρίως διά τόν συντελεστήν ἐντάσεως τῶν τάσεων, ἀνάλογον τῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως $\nu(\tau)$ εἰς τό σημεῖον $\tau=1$.

Σημειοῦμεν ὡσαύτως ὅτι ἡ συνθήκη μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων :

$$\int_{-1}^1 \mu(\tau) d\tau = 0, \qquad (10)$$

δεδομένου ὅτι ἡ συνάρτησις $\mu(\tau)$ εἶναι ἐν προκειμένῳ περιττή, πληροῦται αὐτομάτως.

Κατά τήν μέθοδον ὁλοκληρώσεως LOBATTO-CHEBYSHEV ἀναπτυχθεῖσαν εἰς τό τμῆμα Γ9 τό διάστημα ὁλοκληρώσεως εἶναι ἀπό (-1) ἕως (+1) καί ἡ μέθοδος διά χρησιμοποιήσεως 2n σημείων εἶναι ἀκριβής δι'ὁλοκληρουμένην συνάρτησιν πολυώνυμον μέχρι (4n-3) βαθμοῦ. Ἵνα φανῇ καλύτερον ὅτι τό διάστημα ὁλοκληρώσεως εἰς τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (9) δύναται νά θεωρηθῇ ἀπό (-1) ἕως (+1), γράφομεν ταύτην ὑπό

τήν μορφήν:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \nu(\tau) \cot\frac{\pi\alpha(\tau-t)}{\beta}\, d\tau = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{11}$$

Κατά τήν χρησιμοποίησιν τῆς μεθόδου ὁλοκληρώσεως LOBATTO-CHEBYSHEV τά βάρη A_i καί αἱ τετμημέναι τ_i καί t_k εὑρίσκονται ὡς ἀνεπτύχθη εἰς τό τμῆμα Γ9, ἡ δέ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (11) προσεγγίζεται διά τοῦ κάτωθι γραμμικοῦ συστήματος ἐξισώσεων, λαμβανομένου πάλιν ὑπ'ὄψιν ὅτι ἡ συνάρτησις $\nu(\tau)$ εἶναι περιττή, ὁπότε κατ'οὐσίαν ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (11) ἀνάγεται εἰς τήν (9):

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \left\{ \cot\frac{\pi\alpha(\tau_i-t_k)}{\beta} + \cot\frac{\pi\alpha(\tau_i+t_k)}{\beta} \right\} \nu(\tau_i) =$$

$$= \frac{\beta}{\alpha}, \quad k=1,2,\ldots,n. \tag{12}$$

Δέον νά τονισθῇ ὅτι ἡ κατά τά ἀνωτέρω ἀντικατάστασις ἑνός ὁλοκληρώματος εἰς τό διάστημα $[-1,1]$, ὡς εἰς τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (11), δι'ἀθροίσματος n ὅρων τῇ χρήσει τῆς μεθόδου LOBATTO-CHEBYSHEV εἶναι ἀκριβής δι' ὁλοκληρουμένην περιττήν συνάρτησιν πολυώνυμον βαθμοῦ μέχρι $(4n-3)$, ἐνῷ, ἐάν ἐγίνετο ἀνάλογος ἀντικατάστασις ἑνός ὁλοκληρώματος εἰς τό διάστημα $[0,1]$, μέ βάσιν τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (9), τῇ χρήσει τῆς τροποποιημένης μεθόδου LOBATTO-LEGENDRE μέ n πάλιν ὅρους, αὕτη θά ἦτο ἀκριβής δι'ὁλοκληρουμένην συνάρτησιν πολυώνυμον μόνον μέχρι $(2n-3)$ βαθμοῦ. Τό φαινόμενον τοῦτο ὀφείλεται εἰς τό γεγονός ὅτι ἡ συνάρτησις $\nu(\tau)$ εἶναι περιττή, τό ὁποῖον καί ἐξεμεταλλεύθημεν κατά τόν σχηματισμόν τοῦ γραμμικοῦ συστήματος ἐξισώσεων (12) χρησιμοποιήσαντες τήν μέθοδον ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως LOBATTO-CHEBYSHEV ἀντί τῆς τροποποιημένης μεθόδου LOBATTO-LEGENDRE.

Ἡ προσεγγιστική ἐπίλυσις τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (11) δι'ἐπιλύσεως τοῦ προσεγγίζοντος ταύτην συ-

στήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων (12) ἐγένετο μέ n=5 σημεῖα διά χρήσεως ὑπολογιστοῦ. Ἐξητάσθησαν τρεῖς τιμαί τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ ἤτοι: $\frac{\alpha}{\beta}$=0,01 , 0,25 καί 0,45. Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν αἱ ρωγμαί εἶναι λίαν ἀπομεμακρυσμέναι ἀλλήλων, εἰς τήν δευτέραν τό διάστημα μεταξύ δύο ἐγγύς κειμένων ἄκρων δύο διαδοχικῶν ρωγμῶν ἰσοῦται μέ τό μῆκος μιᾶς ρωγμῆς, εἰς δέ τήν τρίτην αἱ ρωγμαί κεῖνται πολύ πλησίον ἀλλήλων.

Τά χρησιμοποιηθέντα σημεῖα t_k καί τ_i ὡς καί αἱ τιμαί τῆς συναρτήσεως $\nu(\tau)$ εἰς τά σημεῖα τ_i δίδονται εἰς τόν κάτωθι Πίνακα 1.

ΠΙΝΑΞ 1

Τιμαί τῆς συναρτήσεως $\nu(\tau)$ προκύψασαι ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (11).

n=5	$\frac{\alpha}{\beta}$	0,01	0,25	0,45
t_k	τ_i	$\nu(\tau_i)$		
0,98481	1,00000	1,00015	1,12838	2,11334
0,86603	0,93969	0,93985	1,05816	1,82457
0,64279	0,76604	0,76617	0,85839	1,28513
0,34202	0,50000	0,50008	0,55737	0,75582
0,00000	0,17365	0,17368	0,19296	0,25001

Ἀφ' ἑτέρου ὁ συντελεστής ἐντάσεως τῶν τάσεων k_1 συνδέεται μετά τῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως $\nu(\tau)$ εἰς τό σημεῖον τ=1 διά τοῦ τύπου:

$$k_1 = \sigma\sqrt{\alpha}\nu(1), \tag{13}$$

δίδεται δέ εἰς τήν ἐξεταζομένην περίπτωσιν καί ἀναλυτικῶς βάσει τοῦ τύπου {SNEDDON and LOWENGRUB, 1969, §2.9}

$$k_1 = \sigma\sqrt{\frac{\beta}{\pi}\tan\frac{\pi\alpha}{\beta}}\ , \tag{14}$$

ὁπότε προκύπτει ὅτι:

$$\nu(1) = \frac{k_1}{\sigma\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{\beta}{\pi\alpha}\tan\frac{\pi\alpha}{\beta}} \ . \qquad (15)$$

Εἰς τόν κάτωθι Πίνακα 2 συγκρίνονται τά εὑρεθέντα ἀποτελέσματα διά τῆς προσεγγιστικῆς ἐπιλύσεως τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (11) μέ τά θεωρητικά τοιαῦτα τά προκύπτοντα βάσει τοῦ τύπου (15).

ΠΙΝΑΞ 2

Σύγκρισις τῶν ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (11) προκυψασῶν τιμῶν τοῦ ἀνηγμένου συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων $k_1/(\sigma\sqrt{\alpha})$ πρός τάς θεωρητικάς τιμάς του.

$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{k_1}{\sigma\sqrt{\alpha}}=\nu(1)$ (Προσεγγιστικῶς)	$\frac{k_1}{\sigma\sqrt{\alpha}}$ (Θεωρητικῶς)
0,01	1,00015	1,00016
0,25	1,12838	1,12838
0,45	2,11334	2,11331

Ἡ συμφωνία τῶν θεωρητικῶν ἀποτελεσμάτων μετά τῶν προκυψάντων ἐνταῦθα ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (11) τῇ χρήσει τῆς μεθόδου LOBATTO-CHEBYSHEV μέ n=5 μόνον σημεῖα εἶναι ἄκρως ἱκανοποιητική καί ἐνδεικτική τῶν δυνατοτήτων τῶν εἰς τήν παροῦσαν διατριβήν προτεινομένων μεθόδων ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων.

Πρέπει νά ἀναφερθῇ ὡσαύτως ὅτι ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (6) δύναται νά θεωρηθῇ προκύπτουσα καί ἐκ τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (B4.21), εἰς τήν ὁποίαν εἴχομεν καταλήξει εἰς τό τμῆμα B4 ἐξετάζοντες τό γενικόν πρόβλημα τῶν περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν, τοῦ ὁποίου εἰδική περίπτωσις εἶναι τό ἐνταῦθα ἐξετασθέν πρόβλημα τῶν

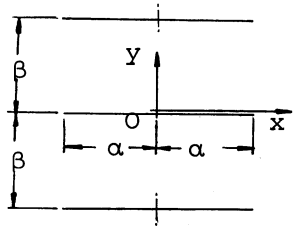
συγγραμμικῶν περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν, τό ὁποῖον λόγῳ τῆς ἀπλότητός του ἐμελετήσαμεν ἐνταῦθα μή λαβόντες ὑπ' ὄψιν τήν ἀνάπτυξιν τοῦ τμήματος B4.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Τό ἐξετασθέν εἰς τήν παροῦσαν ἐφαρμογήν πρόβλημα τῆς σειρᾶς συγγραμμικῶν,περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν μέ σταθεράν κάθετον φόρτισιν ἐπ'ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν των εἶναι ἐκ τῶν προβλημάτων τῶν ἐπιδεχομένων λύσιν κλειστῆς μορφῆς διά τῶν μεθόδων τῆς Θεωρίας τῆς Ἐλαστικότητος. Λύσεις τοῦ προβλήματος τούτου ἐδόθησαν ὑπό τοῦ WESTERGAARD {1939}καί τοῦ IRWIN {1957} διά τῆς μεθόδου τῆς μιγαδικῆς συναρτήσεως Z(z) τοῦ WESTERGAARD, ὑπό τοῦ KOITER {1959A} διά τῆς μεθόδου τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων Φ(z) καί Ω(z) τοῦ MUSKHELISHVILI, ὑπό τῶν ENGLAND and GREEN {1963} δι'εἰδικῆς μεθόδου στηριζομένης εἰς τάς μιγαδικάς συναρτήσεις Φ(z) καί Ψ(z) τοῦ MUSKHELISHVILI, ὑπό τοῦ ISIDA {1973,§2.3} διά τῆς μεθόδου τοῦ ἀναπτύγματος τῶν ἀγνώστων μιγαδικῶν συναρτήσεων τοῦ MUSKHELISHVILI εἰς σειράς, ὑπό τοῦ BUECKNER {1973, §5.4} δι'ἀναγωγῆς τοῦ προβλήματος εἰς ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν καί ἀκριβοῦς ἐπιλύσεως τῆς τελευταίας,ὑπό τῶν BENTHEM and KOITER {1973, §3.6} διά τῆς χρήσεως ἀσυμπτωτικῶν προσεγγιστικῶν μεθόδων καί ὑπό τῶν SNEDDON and SRIVASTAV {1965}, τῶν SNEDDON καί LOWENGRUB {1969,§2.9} καί τοῦ SNEDDON {1973, §6.3} διά χρήσεως τῆς μεθόδου τῶν σειρῶν FOURIER. Τέλος προσφάτως οἱ DATSYSHIN and SAVRUK {1974} ἀνήγαγον τό πρόβλημα τῶν περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν εἰς τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (6) διά μεθόδου ἀρκετά ἀναλόγου τῆς ἐνταῦθα χρησιμοποιηθείσης. Τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἔδωσαν περαιτέρω τήν θεωρητικήν λύσιν διά περιοδικῶς ἐπ'εὐθείας διατεταγμένας ρωγμάς. Αἱ λύσεις διαφόρων προβλημάτων περιοδικῶς ἐπ' εὐθείας διατεταγμένων ρωγμῶν μέ ποικίλας φορτίσεις δίδονται ὑπό τῶν TADA, PARIS and IRWIN {1973, §7}.

Κατά ταῦτα ἡ ἐνταῦθα παρουσιασθεῖσα μέθοδος ἐπιλύσεως

τοῦ προβλήματος τῶν περιοδικῶς ἐπ'εὐθείας διατεταγμένων ρωγμῶν θά ἠδύνατο νά θεωρηθῇ ὡς μία ἀκόμη μέθοδος ἐπιλύσεως ἑνός διά τόσων μεθόδων ἔχοντος ἤδη ἐπιλυθῆ προβλήματος. Ἐν τούτοις πρέπει νά ληφθῇ ὑπ'ὄψιν ὅτι ἅπασαι αἱ προαναφερθεῖσαι μέθοδοι δέν δύνανται νά ἐφαρμοσθοῦν εἰς περιπτώσεις καμπύλων περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν, ἐνῷ ἡ μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος τῶν περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ἡ ἀναπτυχθεῖσα εἰς τό τμῆμα Β4 δύναται νά ἐφαρμοσθῇ διά κάθε περίπτωσιν περιοδικῆς διατάξεως ρωγμῶν καί μέ φόρτισιν τυχούσης κατανομῆς ἐφ'ἑκάστης τούτων, πιθανῶς δέ καί διαφέρουσαν ἀπό τῆς μιᾶς εἰς τήν ἄλλην πλευράν της, ἀρκεῖ βεβαίως ὅλαι αἱ ρωγμαί νά εἶναι φορτισμέναι μέ τόν αὐτόν τρόπον. Πέραν τῶν δυνατοτήτων της τούτων ἡ ἀναπτυχθεῖσα εἰς τό τμῆμα Β4 μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος τῶν περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν δι'ἀναγωγῆς του εἰς μίαν μιγαδικήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν τυγχάνει ἁπλουστάτη τόσον κατά τήν σύλληψιν ὅσον καί κατά τήν ἐφαρμογήν της εἰς συγκεκριμένον τι πρόβλημα. Ἡ ἐνταῦθα δοθεῖσα ἐφαρμογή της εἰς τό ἁπλοῦν πρόβλημα τῶν συγγραμμικῶν περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ἀπέβλεπε κατά βάσιν εἰς τήν ἐπίδειξιν τοῦ τρόπου ἐφαρμογῆς της καί εἰς τήν σύγκρισιν τῶν ἀποτελεσμάτων της μέ τά θεωρητικῶς ἀναμενόμενα ἀποτελέσματα, τά ὁποῖα εἰς οὐδεμίαν ἄλλην ἐφαρμογήν ἐπί περιοδικῶς διατεταγμένων, ἀλλά μή συγγραμμικῶν,ρωγμῶν θά ἦσαν διαθέσιμα. Πρέπει νά σημειωθῇ ὡσαύτως ὅτι λύσις κλειστῆς μορφῆς τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (6) θά ἠδύνατο νά δοθῇ εὐχερῶς, πλήν ὅμως προετιμήθη ἐνταῦθα ἡ ἀριθμητική ἐπίλυσίς της πρός ἐπίδειξιν τῶν εἰς τό Κεφάλαιον Γ ἀναπτυχθεισῶν μεθόδων ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων.

Δ2. ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2α: ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΡΩΓΜΑΙ



Σχῆμα 1

Θεωροῦμεν σύστημα παραλλήλων καί περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν μέ τά μέσα των κείμενα έπ' εύθείας καθέτου έπί τήν διεύθυνσιν τῶν ρωγμῶν ὡς εἰς τό παραπλεύρως Σχῆμα 1. Τό μῆκος ἑκάστης ρωγμῆς εἶναι 2α καί ἡ ἀπόστασις δύο διαδοχικῶν ρωγμῶν εἶναι β. Ὡς καί εἰς τήν προηγουμένην έφαρμογήν ἅπασαι αἱ ρωγμαί θεωροῦνται φορτιζόμεναι καθέτως διά φορτίσεως (-σ) έπ' ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν αὐτῶν. Θά εὕρωμεν τόν συντελεστήν έντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν. Ἀναλόγως πρός ὅσα ἀνεφέρθησαν εἰς τήν προηγουμένην έφαρμογήν Δ1 τό πρόβλημά μας ἀνάγεται εἰς τήν έπίλυσιν τῆς κάτωθι ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς έξισώσεως μέ ἄγνωστον συνάρτησιν τήν πυκνότητα τῶν μεταστάσεων g(x), έν προκειμένῳ συνάρτησιν καθαρῶς φανταστικήν, καί μέ μεταβλητάς: $\tau, t = x/\alpha$ μεταβαλλομένας εἰς τό διάστημα: $-1<\tau,\ t<1$:

$$\frac{\alpha}{\pi i}\int_{-1}^{1} g(\alpha\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\alpha\tau-in\beta)-\alpha t}\,d\tau-$$

$$-\frac{\alpha}{\pi i}\int_{-1}^{1}\overline{g(\alpha\tau)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\alpha\bar{\tau}+in\beta)-\alpha\bar{t}}\,d\bar{\tau}-$$

$$-\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{\alpha}{\pi i}\int_{-1}^{1}\overline{g(\alpha\tau)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\alpha\tau-in\beta)-\alpha t}\,\overline{d\tau}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha}{\pi i}\int_{-1}^{1} g(\alpha\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(\alpha\bar{\tau}+in\beta)-\alpha\bar{t}}{[(\alpha\tau-in\beta)-\alpha t]^2}\,d\tau\right\}=-2\sigma. \qquad (1)$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι: $\tau=\bar{\tau}$, $t=\bar{t}$ έπί τῆς ρωγμῆς καί θεωροῦντες ὡς ἄγνωστον συνάρτησιν τήν ὁρισθεῖσαν εἰς τήν έ-

φαρμογήν Δ1 καί κατά τόν τύπον (1.2) πραγματικήν περιττήν συνάρτησιν μ(τ), γράφομεν τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (1) ὑπό τήν ἐξῆς ἁπλουστέραν μορφήν:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\mu(\tau)\left\{2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\tau-t)-in\frac{\beta}{\alpha}}-(\tau-t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left[(\tau-t)-in\frac{\beta}{\alpha}\right]^2}\right\}d\tau =$$

$$= 1. \qquad (2)$$

Λαμβάνοντες περαιτέρω ὑπ'ὄψιν τήν ταυτότητα {PHILLIPS, 1966, Examples 7}:

$$\pi\coth\pi x = \frac{1}{x} + 2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2} \qquad (3)$$

καί τήν διά παραγωγίσεως ταύτης προκύπτουσαν:

$$\pi^2\operatorname{csch}^2\pi x = \frac{1}{x^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2} + 4x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x^2+n^2)^2}, \qquad (4)$$

εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\tau-t)-in\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\beta}\left\{\frac{1}{\frac{\alpha(\tau-t)}{\beta}} + 2\frac{\alpha(\tau-t)}{\beta}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\frac{\alpha(\tau-t)}{\beta}\right]^2+n^2}\right\} = \frac{\pi\alpha}{\beta}\coth\frac{\pi\alpha(\tau-t)}{\beta} \qquad (5)$$

καί ἐπίσης ὅτι:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left[(\tau-t)-in\frac{\beta}{\alpha}\right]^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\left\{\frac{1}{\left[\frac{\alpha(\tau-t)}{\beta}\right]^2} + \right.$$

$$\left. +2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\frac{\alpha(\tau-t)}{\beta}\right]^2-n^2}{\left\{\left[\frac{\alpha(\tau-t)}{\beta}\right]^2+n^2\right\}^2}\right\} =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\left\{\frac{1}{\left[\frac{\alpha(\tau-t)}{\beta}\right]^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\frac{\alpha(\tau-t)}{\beta}\right]^2+n^2} + \right.$$

$$+ 4\left[\frac{\alpha(\tau-t)}{\beta}\right]^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left\{\left[\frac{\alpha(\tau-t)}{\beta}\right]^2+n^2\right\}^2}\Bigg\} =$$

$$= \left(\frac{\pi\alpha}{\beta}\right)^2 \operatorname{csch}^2\frac{\pi\alpha(\tau-t)}{\beta}. \qquad (6)$$

Ἡ σχέσις (6) προκύπτει κατ'ἄλλον τρόπον δι'ἀπ' εὐθείας παραγωγίσεως τῆς σχέσεως (5) ὡς πρός $(\tau-t)$, χωρίς νά ληφθῇ ὑπ'ὄψιν τό ἀνάπτυγμα (4) τῆς ὑπερβολικῆς συντεμνούσης.

Ἤδη ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (2) λαμβάνει τήν ἐξῆς μορφήν:

$$\int_{-1}^{1} \mu(\tau)\Bigg\{2\coth\frac{\pi\alpha(\tau-t)}{\beta} - \frac{\pi\alpha(\tau-t)}{\beta}\cdot$$

$$\cdot\operatorname{csch}^2\frac{\pi\alpha(\tau-t)}{\beta}\Bigg\}\, d\tau = \frac{\beta}{\alpha}. \qquad (7)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι πλέον πολύπλοκος τῆς (1.6) τῆς ἰσχυούσης διά τάς ἐπ'εὐθείας περιοδικῶς διατεταγμένας ρωγμάς καί ἀκριβῆς ἐπίλυσίς της δέν εἶναι δυνατή. Δεδομένου ὅτι ἡ συνάρτησις $\mu(\tau)$ εἶναι περιττή, ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (7) δύναται νά λάβῃ τήν ἐξῆς μορφήν:

$$\int_{0}^{1} \mu(\tau)\Bigg\{2\left(\coth\frac{\pi\alpha(\tau-t)}{\beta} + \coth\frac{\pi\alpha(\tau+t)}{\beta}\right) -$$

$$-\left(\frac{\pi\alpha(\tau-t)}{\beta}\operatorname{csch}^2\frac{\pi\alpha(\tau-t)}{\beta} + \frac{\pi\alpha(\tau+t)}{\beta}\operatorname{csch}^2\frac{\pi\alpha(\tau+t)}{\beta}\right)\Bigg\}\, d\tau =$$

$$= \frac{\beta}{\alpha}. \qquad (8)$$

Διά τήν προσεγγιστικήν ἐπίλυσιν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (7) ἤ (8) εἰσάγομεν τήν συνάρτησιν $\nu(\tau)$ κατά τήν σχέσιν (1.8) καί χρησιμοποιοῦμεν, ἀκριβῶς ὡς καί διά τήν περίπτωσιν τῆς προηγουμένης ἐφαρμογῆς διά τάς περιοδικῶς ἐπ'εὐθείας διατεταγμένας ρωγμάς, τήν μέθοδον ἀναγωγῆς τῆς πρός ἐπίλυσιν ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως

εἰς γραμμικόν σύστημα ἐξισώσεων διά προσεγγιστικῆς ἐκφράσεως τῶν ὁλοκληρωμάτων διά τῆς μεθόδου LOBATTO-CHEBYSHEV συμφώνως πρός τά ἐκτεθέντα εἰς τό τμῆμα Γ9. Τό προκῦπτον σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων εἶναι τό κάτωθι:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \left\{ 2\left(\coth\frac{\pi\alpha(\tau_i-t_k)}{\beta} + \coth\frac{\pi\alpha(\tau_i+t_k)}{\beta}\right) - \right.$$

$$-\left(\frac{\pi\alpha(\tau_i-t_k)}{\beta}\operatorname{csch}^2\frac{\pi\alpha(\tau_i-t_k)}{\beta} + \frac{\pi\alpha(\tau_i+t_k)}{\beta}\cdot\right.$$

$$\left.\left.\cdot\operatorname{csch}^2\frac{\pi\alpha(\tau_i+t_k)}{\beta}\right)\right\} \nu(\tau_i) = \frac{\beta}{\alpha}, \quad k=1,2,\ldots,n. \qquad (9)$$

Ἡ προσεγγιστική ἐπίλυσις τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (7) ἤ (8) δι'ἐπιλύσεως τοῦ προσεγγίζοντος ταύτην συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων (9) ἐγένετο μέ n=5 σημεῖα διά χρήσεως τοῦ ὑπολογιστοῦ. Ἐξητάσθησαν δύο τιμαί τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$, ἤτοι: $\frac{\alpha}{\beta}$=0,25 καί 0,33. Τά χρησιμοποιηθέντα σημεῖα t_k καί τ_i ὡς καί αἱ τιμαί τῆς συναρτήσεως $\nu(\tau)$ εἰς τά σημεῖα τ_i δίδονται εἰς τόν κάτωθι Πίνακα 1.

ΠΙΝΑΞ 1

Τιμαί τῆς συναρτήσεως $\nu(\tau)=\sqrt{1-\tau^2}\mu(\tau)$ προκύψασαι ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (7).

n=5	$\frac{\alpha}{\beta}$	0,25	0,33
t_k	τ_i	$\nu(\tau_i)$	
0,98481	1,00000	0,78968	0,70376
0,86603	0,93969	0,73812	0,65307
0,64279	0,76604	0,59346	0,51425
0,34202	0,50000	0,38078	0,32076
0,00000	0,17365	0,13066	0,10771

Ἀφ'ἑτέρου ὁ συντελεστής ἐντάσεως τῶν τάσεων k_1 δίδε-

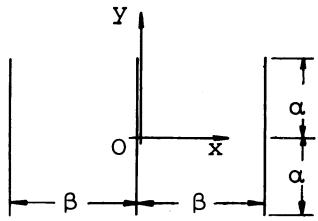
ται πάλιν ὑπό τοῦ τύπου (1.13). Εἰς τόν κάτωθι Πίνακα 2 συγκρίνονται τά εὑρεθέντα ἀποτελέσματα διά τῆς προσεγγιστικῆς ἐπιλύσεως τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (7) ἤ (8) μέ τά εὑρεθέντα δι'ἄλλων μεθόδων ἀποτελέσματα {ISIDA, 1973, §2.7, §2.9, BENTHEM and KOITER, 1973, §3.6, TADA, PARIS and IRWIN, 1973, p.14.1}. Παρατηροῦμεν ὅτι τά διά τῆς παρούσης μεθόδου εὑρεθέντα ἀποτελέσματα συμφωνοῦν μέ τά δι'ἄλλων μεθόδων εὑρεθέντα, πιστεύεται δέ ὅτι εἶναι πλέον ἀκριβῆ.

ΠΙΝΑΞ 2

Σύγκρισις τῶν ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (7) προκυπτουσῶν τιμῶν τοῦ ἀνηγμένου συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων $k_1/(\sigma\sqrt{\alpha})$ πρός τάς εὑρεθείσας δι' ἄλλων μεθόδων τιμάς του.

$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{k_1}{\sigma\sqrt{\alpha}}=\nu(1)$ (Διά τῆς παρούσης μεθόδου)	$\frac{k_1}{\sigma\sqrt{\alpha}}$ (Δι'ἄλλων μεθόδων)
0,25	0,78968	0,7896
0,33	0,70376	0,7043

Δυνάμεθα εἰς τό σημεῖον τοῦτο νά παρατηρήσωμεν ὅτι εἰς τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (7) δυνάμεθα νά καταλήξωμεν καί βάσει τῆς ἀναπτυχθείσης εἰς τό τμῆμα B4 μεθόδου, ἀρκεῖ νά θεωρήσωμεν τάς ρωγμάς παραλλήλους πρός τόν ἄξονα Oy, ὡς εἰς τό Σχῆμα 2, κατά τρόπον, ὥστε ἡ περίοδος β νά δύναται νά θεωρηθῇ πραγματική. Τότε ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (B4.21) λαμβάνει διά τό πρόβλημά μας τήν μορφήν (7) ἀρκεῖ νά ληφθοῦν ὑπ'ὄψιν αἱ προφανεῖς σχέσεις:



Σχῆμα 2

$$\cot(ix) = -i\coth(x), \quad \csc^2(ix) = -\operatorname{csch}^2 x. \tag{10}$$

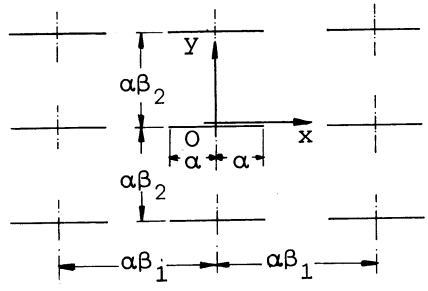
ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ-ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Τό ἐξετασθέν εἰς τήν παροῦσαν ἐφαρμογήν πρόβλημα τῆς σειρᾶς παραλλήλων, περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν μέ σταθεράν κάθετον φόρτισιν ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν των δέν ἐπιδέχεται λύσιν κλειστῆς μορφῆς διά τῶν μεθόδων τῆς Θεωρίας τῆς Ἐλαστικότητος. Προσεγγιστικαί λύσεις τοῦ προβλήματος τούτου ἐδόθησαν ὑπό τῶν ENGLAND and GREEN {1963} δι' εἰδικῆς μεθόδου στηριζομένης εἰς τάς μιγαδικάς συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ τοῦ MUSKHELISHVILI καί καταληγούσης εἰς ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις τύπου FREDHOLM, ὑπό τοῦ ISIDA {1971, 1973, §2.3} διά τῆς μεθόδου τοῦ ἀναπτύγματος τῶν ἀγνώστων μιγαδικῶν συναρτήσεων τοῦ MUSKHELISHVILI εἰς σειράς, ὑπό τοῦ BUECKNER {1973, §5.3-4} δι' ἀναγωγῆς τοῦ προβλήματος εἰς ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν παρομοίας μορφῆς κατά τήν ἐμφάνισιν μέ τήν (7), ὑπό τῶν BENTHEM and KOITER {1973, §3.6} διά χρήσεως ἀσυμπτωτικῶν προσεγγιστικῶν μεθόδων καί ὑπό τοῦ LOWENGRUB {1966} τῇ χρήσει τῆς μεθόδου τῶν μετασχηματισμῶν FOURIER. Ἡ λύσις αὕτη τοῦ LOWENGRUB δίδεται καί ὑπό τῶν SNEDDON and LOWENGRUB {1969, §2.10}, ὁμοῦ μετά τῆς προαναφερθείσης λύσεως τῶν ENGLAND and GREEN, ὡς καί ὑπό τοῦ SNEDDON {1973, §6.3}. Τέλος οἱ DATSYSHIN and SAVRUK {1974} ἔδωσαν τήν γενικήν μορφήν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως τῆς διεπούσης τό πρόβλημα τῶν περιοδικῶς διατεταγμένων εὐθυγράμμων ρωγμῶν, ἥτις διά τήν διάταξιν ρωγμῶν τοῦ Σχήματος 1 συμπίπτει μετά τῆς (7), ἀκολουθήσαντες μέθοδον ἀρκετά ἀνάλογον τῆς εἰς τήν ἐφαρμογήν ταύτην ἀκολουθηθείσης. Ἡ δοθεῖσα ὑπό τῶν DATSYSHIN and SAVRUK κατά τά ἀνωτέρω ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις δύναται νά θεωρηθῇ ὡς εἰδική περίπτωσις τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (B4.21) ἀφορῶσα εἰς σύστημα εὐθυγράμμων περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν. Πρέπει νά ἀναφέρωμεν ὡσαύτως τήν διά τῆς μεθόδου τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν τοῦ MUSKHELISHVILI προσεγγιστικήν λύσιν

τοῦ προβλήματος τῶν παραλλήλων περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν, ἀλλά μέ φόρτισιν διατμητικήν, δοθεῖσαν ὑπό τοῦ KOITER {1961} καί ὡσαύτως τάς ἀναφερομένας ὑπό τῶν TADA, PARIS and IRWIN {1973, §14} λύσεις διαφόρων προβλημάτων παραλλήλων περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν μέ ποικίλας φορτίσεις.

Ὡς ἐτονίσθη καί εἰς τήν ἐφαρμογήν Δ1, ἡ ἐνταῦθα ἐφαρμοσθεῖσα μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος τῶν παραλλήλων περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν μέ κάθετον φόρτισιν ἀποτελεῖ ἁπλοῦν παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου ἐπιλύσεως τοῦ γενικοῦ προβλήματος τῶν περιοδικῶς διατεταγμένων καί μέ τυχοῦσαν φόρτισιν λείων ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου, ὡς ἐξετέθη αὕτη εἰς τό τμῆμα Β4, ἕτερον παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῆς ὁποίας ἦτο ἡ ἐφαρμογή Δ1. Ἐπελέγησαν δέ τά παραδείγματα τῶν ἐφαρμογῶν Δ1 καί Δ2, καθ' ὅσον ἀφ' ἑνός μέν ἦσαν ἁπλᾶ, ἀφ' ἑτέρου δέ ὑφίστανται δι' αὐτά ἀριθμητικά ἀποτελέσματα καί δι' ἄλλων μεθόδων, ἐκ τῶν ὁποίων οὐδεμία δύναται νά ἐφαρμοσθῇ ἐπιτυχῶς εἰς πολυπλοκώτερα προβλήματα.

Ἀξίζει νά σημειωθῇ ὅτι ὑπό τοῦ ISIDA {1973, §2.7} χρησιμοποιοῦνται διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ εἰς τήν ἐφαρμογήν ταύτην ἐξετασθέντος προβλήματος σειραί μέ 50-70 ὅρους διά $\alpha/\beta>0,3$, ἵνα ἐπιτευχθῇ ἀκρίβεια ἴση περίπου μέ τήν ἐπιτευχθεῖσαν ἐνταῦθα μέ ἐφαρμοσθείσας ἀριθμητικάς ὁλοκληρώσεις μέ $n=5$ μόνον ὅρους. Πιστεύεται κατά ταῦτα ὅτι ἡ ἐνταῦθα ἐφαρμοζομένη μέθοδος τυγχάνει ὄχι μόνον ἡ ἁπλουστέρα ἀλλά καί ἡ ἐξ ἀπόψεως ὑπολογισμῶν εὐκολωτέρα διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ παρόντος προβλήματος μέ ὡρισμένην ἀκρίβειαν.

Δ3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η: ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΡΩΓΜΩΝ



Σχῆμα 1

Θεωροῦμεν σύστημα δίς περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ὡς εἰς τό παραπλεύρως Σχῆμα 1 δυνάμενον νά θεωρηθῇ ὡς προερχόμενον ἐκ μιᾶς βασικῆς ρωγμῆς μήκους 2α, ὅταν αὕτη μετατοπισθῇ κατά τά διανύσματα $\alpha(m\beta_1 + in\beta_2)$ καθ'ὅλους τούς δυνατούς τρόπους, ἔνθα m καί n ὅλοι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί καί β_1 καί β_2 πραγματικαί σταθεραί παριστῶσαι τάς περιόδους κατά τούς ἄξονας Ox τῆς διευθύνσεως τῶν ρωγμῶν καί Oy τῆς καθέτου ἐπί τάς ρωγμάς διευθύνσεως τοῦ σχηματιζομένου συστήματος ρωγμῶν. Ἡ ἐνταῦθα ἐξεταζομένη περίπτωσις τοῦ δίς περιοδικοῦ συστήματος ρωγμῶν δύναται ὡσαύτως νά θεωρηθῇ ὡς ἐπαλληλία τῶν ἐξετασθεισῶν εἰς τάς ἐφαρμογάς Δ1 καί Δ2 προβλημάτων τῶν περιοδικῶς ἐπ'εὐθείας διατεταγμένων καί τῶν παραλλήλων περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν. Αἱ ρωγμαί θεωροῦνται πάλιν φορτιζόμεναι ἅπασαι ὁμοιομόρφως διά φορτίσεως (-σ) καθέτως ἐπ'ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν αὐτῶν. Θά εὕρωμεν τόν συντελεστήν ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν.

Ἀναλόγως πρός ὅσα ἀνεφέρθησαν εἰς τάς προηγουμένας ἐφαρμογάς Δ1 καί Δ2 τό πρόβλημά μας ἀνάγεται εἰς τήν ἐπίλυσιν τῆς κάτωθι ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως μέ ἄγνωστον συνάρτησιν τήν πυκνότητα τῶν μεταστάσεων g(x), ἐν προκειμένῳ συνάρτησιν καθαρῶς φανταστικήν, μέ φανταστικόν μέρος $[-\sigma\mu(x/\alpha)]$ συνάρτησιν περιττήν λόγῳ καί τῆς σχέσεως (1.2):

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} g(\alpha\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau-\beta)-t}\, d\tau \; -$$

$$- \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \overline{g(\alpha\tau)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\overline{\tau}-\overline{\beta})-\overline{t}} \, \overline{d\tau} -$$

$$- \frac{dt}{\overline{dt}} \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \overline{g(\alpha\tau)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau-\beta)-t} \, \overline{d\tau} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} g(\alpha\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\overline{\tau}-\overline{\beta})-\overline{t}}{[(\tau-\beta)-t]^2} \, d\tau \right\} = -2\sigma, \qquad (1)$$

ἔνθα ἐτέθη:

$$\beta = m\beta_1 + in\beta_2. \qquad (2)$$

Ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (1) προκύπτει κατά βάσιν ἐκ τῆς (A1.37).

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν ὅτι: $\tau=\overline{\tau}$ καί $t=\overline{t}$ ἐπί τῆς θεμελιώδους ρωγμῆς καί θεωροῦντες ὡς ἄγνωστον συνάρτησιν τήν προαναφερθεῖσαν πραγματικήν περιττήν συνάρτησιν $\mu(\tau)$, γράφομεν τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (1) ὑπό τήν ἐξῆς ἁπλουστέραν μορφήν λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν καί τῆς σχέσεως (1.2):

$$\frac{3}{\pi} \int_{-1}^{1} \mu(\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau-t)-\beta} \, d\tau -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \mu(\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\tau-t)-\overline{\beta}}{[(\tau-t)-\beta]^2} \, d\tau = 2 \qquad (3)$$

καί περαιτέρω, δεδομένου ὅτι ἡ συνάρτησις $\mu(\tau)$ εἶναι περιττή, ὡς κάτωθι:

$$\frac{3}{\pi} \int_{0}^{1} \mu(\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(\tau-t)-\beta} + \frac{1}{(\tau+t)+\beta} \right\} d\tau -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} \mu(\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\tau-t-\overline{\beta}}{[(\tau-t)-\beta)]^2} + \frac{\tau+t+\overline{\beta}}{[(\tau+t)+\beta)]^2} \right\} d\tau =$$

$$= 2. \qquad (4)$$

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τήν ἔκφρασιν (2) τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ β δυνάμεθα νά γράψωμεν τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (3) ὑπό τήν κάτωθι μορφήν:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\mu(\tau)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{2}{\tau-t-m\beta_1-in\beta_2}-\frac{\tau-t-m\beta_1}{(\tau-t-m\beta_1-in\beta_2)^2}\right\}d\tau=1. \quad (5)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (5) διά $\beta_1\to\infty$ συμπίπτει μέ τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (2.2) τήν ἀφορῶσαν εἰς σειράν παραλλήλων περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν, ἐνῷ διά $\beta_2\to\infty$ συμπίπτει μέ τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (1.3) τήν ἀφορῶσαν εἰς σειράν συγγραμμικῶν περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν, ἐάν βεβαίως ληφθοῦν ὑπ'ὄψιν καί οἱ χρησιμοποιούμενοι συμβολισμοί τῶν περιόδων οἱ ἐμφαινόμενοι εἰς τά Σχήματα 1.1, 2.1 καί 1.

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τούς τύπους (2.5) καί (2.6) δυνάμεθα νά ἀπλοποιήσωμεν τήν γραφήν τῆς ἐξισώσεως (5) ὡς κάτωθι:

$$\int_{-1}^{1}\mu(\tau)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{2\coth\frac{\pi(\tau-t-m\beta_1)}{\beta_2}-\frac{\pi(\tau-t-m\beta_1)}{\beta_2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\operatorname{csch}^2\frac{\pi(\tau-t-m\beta_1)}{\beta_2}\right\}d\tau=\beta_2. \quad (6)$$

Τώρα πλέον ἔχομεν ἀπλῆν σειράν ὡς πρός m μόνον, ἡ δέ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (6) ὁμοιάζει μέ τήν (2.7), εἰς τήν ὁποίαν ὅμως δέν ἐμφανίζεται σειρά ὡς πρός m. Ἡ ἐξίσωσις (6) ἐμφανίζει τό πρόβλημα τοῦ συστήματος δίς περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν, μήκους 2α, μέ περιόδους $(\alpha\beta_1)$ καί $(i\alpha\beta_2)$, ὡς εἰς τό Σχῆμα 1, συντιθέμενον ἐκ σειρᾶς περιοδικῶς διατεταγμένων, μέ περίοδον $(\alpha\beta_1)$, στηλῶν ἀποτελουμένων ἐκ διατάξεως παραλλήλων περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν μέ περίοδον $(i\alpha\beta_2)$. Ἄλλως τό Σχῆμα 1 δύναται νά θεωρηθῇ προκῦπτον ἐκ τοῦ Σχήματος 1.1, εἰς τό ὁποῖον ἑκάστη

ρωγμή ἀντικαθίσταται ὑπό τῆς διατάξεως ρωγμῶν τοῦ Σχήματος 2.1.

Ἤδη θά τροποποιήσωμεν τήν μορφήν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (6), ἵνα ἀφ'ἑνός μέν καταστήσωμεν ταύτην εὔχρηστον διά τήν ἀριθμητικήν ἐπίλυσιν, ἀφ'ἑτέρου δέ βεβαιωθῶμεν διά τήν σύγκλισιν τῶν σειρῶν. Οὕτω λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν ὅτι:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \coth(x-my)-\coth x = \sum_{m=1}^{\infty} \{\coth(x-my)+\coth(x+my)\} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^{x-my}+e^{-x+my}}{e^{x-my}-e^{-x+my}} + \frac{e^{x+my}+e^{-x-my}}{e^{x+my}-e^{-x-my}} \right\} =$$

$$=2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{(e^{2x}+e^{-2x})-(e^{2my}+e^{-2my})} =$$

$$=2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x-\cosh 2my} \tag{7}$$

καί ὡσαύτως ὅτι:

$$\operatorname{csch}^2 x = \frac{1}{\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}-1} = \frac{2}{\cosh 2x-1}, \tag{8}$$

δυνάμεθα νά γράψωμεν τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (6) ὑπό τήν κάτωθι μορφήν:

$$\int_{-1}^{1} \mu(\tau) \left\{ \coth\frac{\pi(\tau-t)}{\beta_2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sinh\frac{2\pi(\tau-t)}{\beta_2}}{\cosh\frac{2\pi(\tau-t)}{\beta_2} - \cosh\frac{2\pi m\beta_1}{\beta_2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{\beta_2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tau-t-m\beta_1}{\cosh\frac{2\pi(\tau-t-m\beta_1)}{\beta_2} - 1} \right\} = \frac{\beta_2}{2}. \tag{9}$$

Αἱ παρουσιαζόμεναι σειραί ἀπείρων ὅρων συγκλίνουν τα-

χύτατα δεδομένου ὅτι οἱ παρονομασταί των συμπεριφέρονται ἀπό τινος m καί πέραν ὡς ἡ συνάρτησις:

$$\cosh\frac{2\pi m\beta_1}{\beta_2} \simeq \frac{1}{2}e^{\frac{2\pi m\beta_1}{\beta_2}}, \tag{10}$$

ἥτις τείνει ταχύτατα πρός τό ἄπειρον αὐξανομένου τοῦ m, τούτου ἐξαρτωμένου βεβαίως καί ἐκ τῆς τιμῆς τῆς παραστάσεως $2\pi\beta_1/\beta_2$. Σημειοῦται ὡσαύτως ὅτι ἐκ τῆς γεωμετρίας τοῦ Σχήματος 1 εἶναι προφανές ὅτι ὁ ἀριθμός β_1 ὁ ἐμφανιζόμενος εἰς τόν ἀριθμητήν τῆς προαναφερθείσης παραστάσεως εἶναι ὁπωσδήποτε μεγαλύτερος τοῦ 2. Ἀρκεῖ συνεπῶς ὁ ὑπολογισμός τῶν σειρῶν μέ ὀλίγους μόνον ὅρους, ἵνα ἐπιτύχωμεν λίαν ἱκανοποιητικήν ἀκρίβειαν, ὁ δέ ἀριθμός τῶν ἀπαιτουμένων ὅρων μειοῦται μετά τοῦ λόγου β_2/β_1.

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ συνάρτησις $\mu(\tau)$ εἶναι περιττή καί ὅτι διά τοῦτο προκύπτει ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (4), δυνάμεθα νά γράψωμεν τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (9) ὡς ἑξῆς:

$$\int_0^1 \mu(\tau)\cdot\left\{\coth\frac{\pi(\tau-t)}{\beta_2} + \coth\frac{\pi(\tau+t)}{\beta_2} + \right.$$

$$+ 2\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\sinh\frac{2\pi(\tau-t)}{\beta_2}}{\cosh\frac{2\pi(\tau-t)}{\beta_2} - \cosh\frac{2\pi m\beta_1}{\beta_2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sinh\frac{2\pi(\tau+t)}{\beta_2}}{\cosh\frac{2\pi(\tau+t)}{\beta_2} - \cosh\frac{2\pi m\beta_1}{\beta_2}}\right] -$$

$$- \frac{\pi}{\beta_2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\tau-t-m\beta_1}{\cosh\frac{2\pi(\tau-t-m\beta_1)}{\beta_2} - 1} + \right.$$

$$+ \frac{\tau+t+m\beta_1}{\cosh\frac{2\pi(\tau+t+m\beta_1)}{\beta_2} - 1}\Bigg]\Bigg\} d\tau = \frac{\beta_2}{2} . \qquad (11)$$

Ἡ ἀνωτέρω ἀντιμετώπισις τοῦ προβλήματος τοῦ συστήματος δίς περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν εἶναι ἡ συνήθως ἐνδεδειγμένη. Ἐν τούτοις, ὁσάκις ὁ λόγος β_1/β_2 καθίσταται μικρότερος τῆς μονάδος, ἀντιθέτως πρός ὅτι συμβαίνει εἰς τό Σχῆμα 1, εἶναι προτιμότερον νά θεωρήσωμεν τό σύστημα τῶν δίς περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν προκύπτον οὐχί ἐκ τοῦ Σχήματος 1.1, ἔνθα ἀντί τῶν ἁπλῶν συγγραμμικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν θεωροῦνται στῆλαι παραλλήλων περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ὡς εἰς τό Σχῆμα 2.1, ὡς ἐγένετο προηγουμένως, ἀλλ' ἀντιστρόφως προκύπτον ἐκ τοῦ Σχήματος 2.1, ἔνθα ἀντί ἁπλῶν παραλλήλων περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν θεωροῦνται σειραί συγγραμικῶν περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ὡς εἰς τό Σχῆμα 1.1. Κατά τήν θεώρησιν ταύτην θά προκύψῃ μία ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις, ἀνάλογος τῆς (11), μέ δείκτην εἰς τάς ἀπείρους σειράς τό n ἀντί τοῦ m.

Οὕτω κατ' ἀρχήν γράφομεν τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (3) ὑπό τήν μορφήν:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \mu(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{\tau-t-in\beta_2-m\beta_1} - \frac{in\beta_2}{(\tau-t-in\beta_2-m\beta_1)^2}\right\} d\tau =$$

$$= 1. \qquad (12)$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τόν τύπον (1.5) καί τόν διά παραγωγίσεως τούτου ὡς πρός $(\tau-t)$ προκύπτοντα:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left[(\tau-t)-n\frac{\beta}{\alpha}\right]^2} = \left(\frac{\pi\alpha}{\beta}\right)^2 \csc^2\frac{\pi\alpha(\tau-t)}{\beta} , \qquad (13)$$

δυνάμεθα νά ἀπλοποιήσωμεν τήν γραφήν τῆς ἐξισώσεως (12) ὡς κάτωθι:

$$\int_{-1}^{1} \mu(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \cot\frac{\pi(\tau-t-in\beta_2)}{\beta_1} - in\frac{\pi\beta_2}{\beta_1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \csc^2\frac{\pi(\tau-t-in\beta_2)}{\beta_1} \right\} d\tau = \beta_1 . \tag{14}$$

Ἤδη ἔχομεν πλέον ἀπλῆν σειράν ὡς πρός n μόνον. Λαμβάνοντες δέ ὑπ'ὄψιν ὅτι:

$$\cot(x-iy) = \frac{\sin 2x + i\sinh 2y}{\cosh 2y - \cos 2x} \tag{15}$$

καί ἐπίσης ὅτι:

$$\csc^2(x-iy) = \frac{2}{1-\cos 2(x-iy)} = \frac{2}{1-\cos 2x\cosh 2y - i\sin 2x\sinh 2y} =$$

$$= 2\frac{1-\cos 2x\cosh 2y + i\sin 2x\sinh 2y}{(\cosh 2y - \cos 2x)^2} , \tag{16}$$

δυνάμεθα νά γράψωμεν τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (14) ὑπό τήν κάτωθι ἁπλουστέραν καί καθαρῶς πραγματικήν μορφήν:

$$\int_{-1}^{1} \mu(\tau) \left\{ \cot\frac{\pi(\tau-t)}{\beta_1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{2\pi(\tau-t)}{\beta_1}}{\cosh\frac{2\pi n\beta_2}{\beta_1} - \cos\frac{2\pi(\tau-t)}{\beta_1}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(1 + 2n\frac{\pi\beta_2}{\beta_1} \frac{\sinh\frac{2\pi n\beta_2}{\beta_1}}{\cosh\frac{2\pi n\beta_2}{\beta_1} - \cos\frac{2\pi(\tau-t)}{\beta_1}} \right) \right\} d\tau = \beta_1 . \tag{17}$$

Ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (17) ὡς καί ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (9) εἶναι οὐσιαστικῶς δύο μορφαί τῆς αὐτῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (3). Πρακτικῶς συνιστᾶται ἡ χρῆσις τῆς (17), ὅταν ὁ λόγος β_2/β_1 εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος, τῆς δέ (9), ὅταν ὁ λόγος β_2/β_1 εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, ὥστε ἡ σύγκλισις τῶν εἰς αὐτάς ἀπαντωμένων σειρῶν νά εἶναι ταχεῖα.

Διά τήν άριθμητικήν έπίλυσιν τῶν ίδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν έξισώσεων (9) ἤ (17) λόγῳ τῶν ίδιομορφιῶν τῆς συναρτήσεως $\mu(\tau)$ εἰς τά ἄκρα: $\tau=\pm 1$ τῆς θεωρουμένης ὡς θεμελιώδους ρωγμῆς εἰσάγεται ἀντ'αὐτῆς κατά τήν σχέσιν (1.8) ἡ συνάρτησις $\nu(\tau)$, ἡ δέ περαιτέρω έπίλυσις τοῦ προβλήματος γίνεται διά τῆς μεθόδου LOBATTO-CHEBYSHEV, ὡς αὐτη ἀνεπτύχθη εἰς τό τμῆμα Γ9 καί έφηρμόσθη εἰς τάς έφαρμογάς Δ1 καί Δ2, λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι ἡ συνάρτησις $\nu(\tau)$, ὡς καί ἡ $\mu(\tau)$, εἶναι περιττή καί ὡσαύτως ὅτι ἡ συνθήκη (1.10) μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων πληροῦται ἀφ'ἑαυτῆς.

Κατά τάς ἀριθμητικάς έφαρμογάς ένδιαφερόμεθα κατά βάσιν διά τήν τιμήν τοῦ συντελεστοῦ έντάσεως τῶν τάσεων k_1 εἰς τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν διδομένου βάσει τοῦ τύπου (1.13). Τιμάς τοῦ συντελεστοῦ τούτου έντάσεως τῶν τάσεων εὑρομεν διά διαφόρους περιπτώσεις περιοδικῶν διατάξεων ρωγμῶν στηριζόμενοι εἰς τήν ίδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν έξίσωσιν (9) καί εἰς τήν προαναφερθεῖσαν μέθοδον ἀριθμητικῆς έπιλύσεώς της έφαρμοσθεῖσαν μέ $n=5$ σημεῖα. Αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαί τοῦ συντελεστοῦ έντάσεως τῶν τάσεων k_1 δίδονται εἰς τόν κάτωθι Πίνακα 1, συμφωνοῦν δέ μέ τάς εὑρεθείσας τιμάς τούτου ὑπό τῶν DELAMETER, HERRMANN and BARNETT {1975} διά παρομοίας δίς περιοδικάς διατάξεις ρωγμῶν. Πρέπει νά σημειωθῇ ὡσαύτως ὅτι διά τήν εὕρεσιν τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς στήλης μέ $\beta_1=3$ τοῦ Πίνακος 1 έλήφθησαν ὑπ'ὄψιν μόνον οἱ ὅροι μέ $|m|\leq 2$ εἰς τάς σειράς τῆς ίδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς έξισώσεως (9), ένῷ διά τήν εὕρεσιν τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν σειρῶν μέ $\beta_1=4$ καί $\beta_1=6$ τοῦ αὐτοῦ Πίνακος 1 έλήφθησαν ὑπ'ὄψιν μόνον οἱ ὅροι μέ $|m|\leq 1$, χωρίς ἡ παράλειψις τῶν ὑπολοίπων ὅρων τῶν σειρῶν νά έπηρεάζῃ αἰσθητῶς τά ἀποτελέσματα, ίδίως ὅταν $\beta_2/\beta_1<1$.

Εἰς τό σημεῖον τοῦτο πρέπει νά παρατηρήσωμεν ὅτι διά τήν έπίλυσιν τοῦ εἰς τήν έφαρμογήν ταύτην έξετασθέντος προβλήματος τῆς δίς περιοδικῆς διατάξεως εὐθυγράμμων ρωγμῶν θά ἠδυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν τήν εἰς τό τμῆμα Β5 ἀναπτυχθεῖσαν γενικήν θεωρίαν περί συστημάτων δίς περιοδικῶς δια-

ΠΙΝΑΞ 1

Ἀνηγμέναι τιμαί τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων $k_1/(\sigma\sqrt{a})$ εἰς δίς περιοδικάς διατάξεις ρωγμῶν.

β_2 \ β_1	3	4	6
2,5	0,6263	0,6375	0,6407
3,0	0,6833	0,6942	0,7003
3,5	0,7320	0,7401	0,7490
4,0	0,7738	0,7772	0,7882
5,0		0,8327	0,8442
6,0		0,8730	0,8804

τεταγμένων ρωγμῶν καί εἰδικώτερον τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (B5.38), εἰς τήν ὁποίαν εἴχομεν ἐκεῖ καταλήξει. Δέν ἐπράξαμεν ὅμως τοῦτο, ἵνα ἀφ'ἑνός μέν δώσωμεν εἰς τήν ἐφαρμογήν ταύτην μίαν ἑτέραν καί ὁπωσδήποτε ἁπλουστέραν εἰς τήν κατανόησιν ἄποψιν τοῦ προβλήματος τῶν δίς περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν, ἀφ'ἑτέρου δέ ἀποφύγωμεν τόν ἀριθμητικόν ὑπολογισμόν τῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων ζ(z) καί p(z) τῶν ἐμφανιζομένων εἰς τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (B5.38). Πρέπει νά τονισθῇ ἐν τούτοις ὅτι αἱ ἐνταῦθα δοθεῖσαι ἰδιόμορφοι ὁλοκληρωτικαί ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι τῆς (B5.38), ἐάν αὕτη ἐφαρμοσθῇ διά τό σύστημα δίς περιοδικῶν ρωγμῶν τοῦ Σχήματος 1, ἐφ'ὅσον καί μόνον ἐφ'ὅσον ληφθῇ ὑπ'ὄψιν ἡ συνθήκη μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων (B5.25) ἤ (1.10). Ἐπί τῆς συνθήκης μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων ὡσαύτως κατά βάσιν στηρίζεται καί ὁ χρησιμοποιηθείς εἰς τάς ἐφαρμογάς Δ1, Δ2 καί ἰδίως εἰς τήν παροῦσαν ἐφαρμογήν Δ3 τύπος:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m = \lim_{m_o \to \infty} \sum_{m=-m_o}^{m_o} \alpha_m , \qquad (18)$$

τόν ὁποῖον πρακτικῶς ἐχρησιμοποιήσαμεν διά τόν ὑπολογισμόν

τῶν παρουσιασθεισῶν σειρῶν ἀπείρων ὅρων, χωρίς τελικῶς νά καταλήγωμεν εἰς ἐσφαλμένα ἀποτελέσματα.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Τό ἐξετασθέν εἰς τήν παροῦσαν ἐφαρμογήν πρόβλημα τῆς δίς περιοδικῆς διατάξεως εὐθυγράμμων ρωγμῶν μέ σταθεράν κάθετον φόρτισιν λόγῳ τῶν παρουσιαζομένων κατά τήν ἐπίλυσίν του δυσχερειῶν μόλις προσφάτως ἐμελετήθη. Οὕτως οἱ DATSYSHIN and SAVRUK {1974} ἐργαζόμενοι κατ'ἀνάλογον τρόπον τοῦ ἐνταῦθα ἀκολουθηθέντος διά τήν εὕρεσιν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (1) ἐπροχώρησαν εἰς τήν τροποποίησίν της, ὥστε αὕτη νά λάβῃ μορφήν ἀνάλογον τῆς (B5.38) λαβόντες ὑπ'ὄψιν τούς ὁρισμούς τῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων ζ(z) καί p(z) τοῦ WEIERSTRASS καί χρησιμοποιήσαντες ὡσαύτως μίαν εἰσέτι εἰδικήν ψευδο-δίς περιοδικήν συνάρτησιν, ἥτις ὑπεισέρχεται εἰς τήν τελικῶς διαμορφωθεῖσαν ὑπ'αὐτῶν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν, τήν ὁποίαν ἐν τούτοις δέν προσεπάθησαν νά ἐπιλύσουν ἀριθμητικῶς. Περαιτέρω ὁ FIL'SHTINSKII {1974} μελετήσας ὡσαύτως τό πρόβλημα τῆς δίς περιοδικῆς διατάξεως εὐθυγράμμων ρωγμῶν μέ βάσιν τάς συναρτήσεις Φ(z) καί Ω(z), τάς ὁποίας ἐχρησιμοποίησεν ὁ MUSKHELISHVILI {1953, §120} διά τό πρόβλημα τῆς ἁπλῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς, καί ἀκολουθήσας μέθοδον ἀνάλογον τῆς ἀναπτυχθείσης εἰς τό τμῆμα B5 πλήν μή γενικευομένην διά δίς περιοδικήν διάταξιν μή εὐθυγράμμων ρωγμῶν κατέληξεν εἰς τήν αὐτήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν, εἰς τήν ὁποίαν κατέληξαν καί οἱ DATSYSHIN and SAVRUK, τήν ὁποίαν καί ἐπέλυσε δι'ἀναπτύξεως τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως, ἀντιστοίχου τῆς μ(τ), εἰς σειράν ἀπείρων ὅρων πολυωνύμων CHEBYSHEV πρώτου εἴδους καί προσδιορισμοῦ τῶν συντελεστῶν τῆς σειρᾶς ἀριθμητικῶς.

Τέλος τό πρόβλημα τῆς δίς περιοδικῆς διατάξεως εὐθυγράμμων ρωγμῶν ἀντεμετώπισαν οἱ DELAMETER, HERRMANN and BARNETT {1975} τῇ χρήσει τῆς μεθόδου τῶν μεταστάσεων, ἰσοδυνάμου τῆς ἐνταῦθα ἀκολουθηθείσης, καί κατέληξαν εἰς τήν ἰδιό-

μορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (6), τήν ὁποίαν καί ἐπέλυσαν ἀριθμητικῶς δι'ἀναπτύξεως τῶν παρουσιαζομένων συναρτήσεων εἰς σειράς πολυωνύμων CHEBYSHEV. Τά ἀποτελέσματα, εἰς τά ὁποῖα κατέληξαν, συμφωνοῦν, ὡς ἔχει ἤδη ἀναφερθῆ, μέ τά ἐνταῦθα εὑρεθέντα.

Τό μόνον πλεονέκτημα, τό ὁποῖον παρουσιάζει ἡ ἐνταῦθα ἀκολουθηθεῖσα μέθοδος διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τῆς δίς περιοδικῆς διατάξεως εὐθυγράμμων ρωγμῶν ἔναντι τῆς ἀκολουθηθείσης ὑπό τῶν DELAMETER, HERRMANN and BARNETT μεθόδου, ἔγκειται εἰς τήν χρησιμοποίησιν εἰς τήν παροῦσαν ἐφαρμογήν τῆς λίαν ἀκριβοῦς μεθόδου LOBATTO-CHEBYSHEV διά τόν προσδιορισμόν τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων. Τό αὐτό ἰσχύει καί ἔναντι τῆς ἀκολουθηθείσης ὑπό τοῦ FIL'SHTINSKII μεθόδου, ἥτις μειονεκτεῖ καί κατά τό ὅτι ἀπαιτεῖ ἀριθμητικούς προσδιορισμούς τῶν συναρτήσεων ζ(z) καί p(z) τοῦ WEIERSTRASS ὡς καί μιᾶς εἰδικῆς ψευδο-δίς περιοδικῆς καί οὐδόλως πινακοποιημένης συναρτήσεως εἰσαχθείσης ὑπ' αὐτοῦ τούτου τοῦ FIL'SHTINSKII.

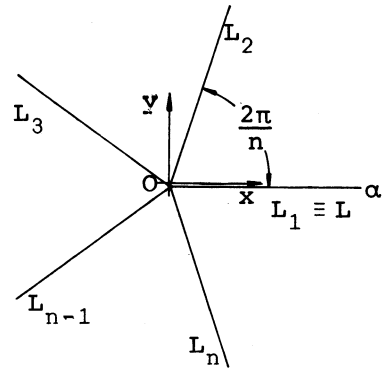
Πέραν τούτων δέν πρέπει νά λησμονῆται ὅτι ἡ δοθεῖσα εἰς τό τμῆμα B5 μέθοδος ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος τῶν δίς περιοδικῶν διατάξεων ρωγμῶν εἶναι γενικωτάτη ἀφορῶσα καί εἰς μή εὐθυγράμμους ρωγμάς ὡς καί εἰς διαφόρους φορτίσεις ἐπί τῶν δύο πλευρῶν ἑκάστης τούτων. Ἐδῶ ἀντεμετωπίσθη μία ἁπλῆ δίς περιοδική διάταξις ρωγμῶν ὑπό μορφήν παραδείγματος ἐφαρμογῆς τόσον τῆς γενικῆς θεωρίας ἀντιμετωπίσεως προβλημάτων ρωγμῶν, ἥτις ἀνεπτύχθη εἰς τήν ἐργασίαν ταύτην, ὅσον καί τῆς μεθόδου LOBATTO-CHEBYSHEV διά τήν ἀριθμητικήν ἐπίλυσιν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων.

Δυνάμεθα τέλος νά ἀναφέρωμεν ὅτι τό συγγενές πρός τό ἐνταῦθα ἐξετασθέν πρόβλημα δύο παραλλήλων στηλῶν παραλλήλων περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ἐμελετήθη ὑπό τοῦ SNEDDON {1973, §6.3} τῇ χρήσει τῆς μεθόδου τῶν μετασχηματισμῶν FOURIER. Ἡ μέθοδος τῶν μετασχηματισμῶν FOURIER παρουσιάζει τό μειονέκτημα ὅτι δυσκόλως δύναται νά ἐπεκταθῇ εἰς

σύνθετα προβλήματα ρωγμῶν καί ἰδίως εἰς προβλήματα καμπύλων ρωγμῶν.

Δ4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η: ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΑΙ ΑΚΤΙΝΙΚΩΣ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΡΩΓΜΑΙ

Θεωροῦμεν σύστημα ἀκτινικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ἐκκινουσῶν ἐκ κοινοῦ σημείου O θεωρουμένου καί κέντρου συστήματος συντεταγμένων μέ ἄξονα Ox συμπίπτοντα μετά τῆς διευθύνσεως τῆς πρώτης καί θεωρουμένης θεμελιώδους ρωγμῆς $L_1 \equiv L$. Αἱ ρωγμαί εἶναι ὅλαι μήκους α, συμμετρικῶς δέ διατεταγμέναι. Ἡ μεταξύ τῶν ρωγμῶν γωνία εἶναι $2\pi/n$, ἔνθα n ὁ ἀριθμός τῶν ρωγμῶν. Αἱ ρωγμαί θεωροῦνται ὡσαύτως φορτιζόμεναι ἄπασαι καθέτως μέ φόρτισιν (−σ) ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν αὐτῶν. Θά εὕρωμεν τήν συνάρτησιν μεταστάσεων κατά μῆκος τῶν ρωγμῶν ὡς καί τόν συντελεστήν ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά μή κοινά ἄκρα τῶν ρωγμῶν, δεδομένου ὅτι λόγῳ τῆς ὁμοιομορφίας τῆς φορτίσεως ἐφ' ὅλων τῶν ρωγμῶν δέν ὑπάρχει συγκέντρωσις τάσεων παρά τό σημεῖον O.



Σχῆμα 1

Ἡ συνάρτησις μεταστάσεων g(x) εἶναι ἡ αὐτή ἐφ' ὅλων τῶν ρωγμῶν καί συμφώνως πρός ὅσα ἀνεφέρθησαν εἰς τό τμῆμα B6 δύναται νά εὑρεθῇ δι' ἐπιλύσεως τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (B6.45), ἥτις διά τάς ἐν προκειμένῳ θεωρηθείσας συνθήκας φορτίσεως τῶν ρωγμῶν ἁπλοποιεῖται ὡς κάτωθι:

$$\frac{n}{\pi i}\int_0^{\alpha} g(x)\frac{x}{x^n-x_o^n}\left\{x^{n-2}+x_o^{n-2}-\frac{nx^{n-2}x_o^{n-2}(x^2-x_o^2)}{2(x^n-x_o^n)}\right\}dx = -\sigma \quad (1)$$

Δεδομένου ὅτι ἡ συνάρτησις g(x) εἶναι προφανῶς καθαρῶς φανταστική, δύναται νά χρησιμοποιηθῇ ἀντί ταύτης ἡ συνάρτησις μ(τ) ὁριζομένη κατά τόν τύπον (1.2), εἰσαγομένων ἐπίσης τῶν ἀδιαστάτων μεταβλητῶν:

$$\tau = \frac{x}{\alpha}\ ,\ t = \frac{x_0}{\alpha}\ . \tag{2}$$

Ἤδη ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (1) λαμβάνει τήν μορφήν:

$$\frac{n}{\pi}\int_0^1 \mu(\tau)\frac{\tau}{\tau^n-t^n}\left\{\tau^{n-2}+t^{n-2}-\frac{n\tau^{n-2}t^{n-2}(\tau^2-t^2)}{2(\tau^n-t^n)}\right\}d\tau = 1. \tag{3}$$

Ἡ συνάρτησις $\mu(\tau)$, ἥτις εἶναι καθαρῶς πραγματική, παρουσιάζει ἰδιομορφίαν παρά τό ἄκρον $\tau = 1$ τῆς ρωγμῆς L τείνουσα εἰς τό ἄπειρον διά $\tau \to 1$, ἐνῷ εἶναι ἀντιθέτως ὁμαλή παρά τό ἄκρον $\tau = 0$ τῆς ρωγμῆς L. Διά ταῦτα κατά τήν προσεγγιστικήν ἐπίλυσιν τῆς ἀνωτέρω ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως ἀντικαθίσταται ὑπό τῆς συναρτήσεως:

$$\nu(\tau) = \sqrt{1-\tau}\,\mu(\tau), \tag{4}$$

ὅτε ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (3) γράφεται:

$$\frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau}}\nu(\tau)\frac{\tau}{\tau^n-t^n}\left\{\tau^{n-2}+t^{n-2}-\right.$$
$$\left.-\frac{n\tau^{n-2}t^{n-2}(\tau^2-t^2)}{2(\tau^n-t^n)}\right\}d\tau = 1. \tag{5}$$

Ἡ συνάρτησις βάρους εἶναι ἡ $1/\sqrt{1-\tau}$, ὁπότε κατάλληλος τρόπος προσεγγιστικοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ ὁλοκληρώματος τοῦ πρώτου μέλους εἶναι διά τῆς τροποποιημένης μεθόδου GAUSS - LEGENDRE μέ τήν προαναφερθεῖσαν συνάρτησιν βάρους.

Σημειοῦμεν ὡσαύτως ὅτι, ὡς ἀνεφέρθη καί εἰς τό τέλος τοῦ τμήματος B6, ἡ συνθήκη μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων ἐπί τῆς συνθέτου ρωγμῆς πληροῦται αὐτομάτως.

Κατά τήν τροποποιημένην μέθοδον ὁλοκληρώσεως GAUSS-LEGENDRE μέ συνάρτησιν βάρους τήν $1/\sqrt{1-\tau}$, τό διάστημα ὁλοκληρώσεως εἶναι τό $[0,1]$ καί ἡ μέθοδος διά χρησιμοποιήσεως n_0 σημείων εἶναι ἀκριβής δι' ὁλοκληρουμένην συνάρτησιν πολυώνυμον μέχρι $(2n_0 - 1)$ βαθμοῦ.

Ἐάν A_i εἶναι τά βάρη καί τ_i καί t_k αἱ τετμημέναι, τάς ὁποίας προβλέπει ἡ προαναφερθεῖσα μέθοδος ὁλοκληρώσεως, περί τῆς ὁποίας ἔχομεν ἀναφέρει εἰς τό τμῆμα Γ9, ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (4) ἀνάγεται εἰς τό κάτωθι σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων:

$$\sum_{i=1}^{n_o} A_i \nu(\tau_i) \frac{\tau_i}{\tau_i^n - t_k^n} \left\{ \tau_i^{n-2} + t_k^{n-2} - \frac{n\tau_i^{n-2} t_k^{n-2} (\tau_i^2 - t_k^2)}{2(\tau_i^n - t_k^n)} \right\} = \frac{\pi}{n} . \qquad (6)$$

Ἡ προσεγγιστική ἐπίλυσις τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (4) δι' ἐπιλύσεως τοῦ προσεγγίζοντος ταύτην συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων ἐγένετο μέ $n_o = 5$ διά χρήσεως τοῦ ὑπολογιστοῦ. Ἐξητάσθησαν διάφοροι περιπτώσεις ἀκτινικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν, ἤτοι διάφοροι τιμαί τοῦ n.

Τά χρησιμοποιηθέντα βάρη A_i, σημεῖα τ_i καί t_k ὡς καί αἱ τιμαί τῆς συναρτήσεως $\nu(\tau)$ εἰς τά σημεῖα τ_i δίδονται εἰς τόν κάτωθι Πίνακα 1.

Ἐπί τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ Πίνακος 1 καί δι' ἕκαστον σχηματισμόν ἀκτινικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ἔλαβεν ἀκολούθως χώραν παρεμβολή, ὥστε νά δύναται νά εὑρίσκεται ἡ συνάρτησις $\nu(\tau)$ εἰς κάθε σημεῖον κάθε ρωγμῆς. Πρός τοῦτο ἐγένετο ἀνάπτυξις τῆς συναρτήσεως $\nu(\tau)$ εἰς σειράν μέ $n_o = 5$ ὅρους τά πρῶτα τροποποιημένα πολυώνυμα LEGENDRE, ἅτινα εἶναι ἐν προκειμένῳ τά χρησιμοποιηθέντα ὀρθογώνια πολυώνυμα συμφώνως πρός τά ἀναφερθέντα εἰς τά τμήματα Γ8 καί Γ9. Οὕτως ἔχομεν:

$$\nu(\tau) = \sum_{k=1}^{n_o} c_k \tilde{P}_{k-1}(\tau) \ , \ n_o = 5 \ , \ 0 \leq \tau \leq 1 , \ \tilde{P}_k(\tau) = P_{2k}(\sqrt{1-\tau}) \qquad (7)$$

Διά τάς ἐξετασθείσας περιπτώσεις τοῦ ἀριθμοῦ n τῶν ἀκτινικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν τόν κάτωθι Πίνακα 2 τόν δίδοντα τάς ἀριθμητικάς τιμάς τῶν συντελεστῶν c_k $(k = 1,2,\ldots n_o$, $n_o = 5)$ τοῦ ἀναπτύγματος τῆς συναρτήσεως $\nu(\tau)$ εἰς σειράν τροποποιημένων πολυωνύμων LEGENDRE. Αἱ τιμαί αὗται τῶν συντελεστῶν c_k εὑρέθησαν συμφώνως

ΠΙΝΑΞ 1

Τιμαί τῆς συναρτήσεως $\nu(\tau)$ εἰς τά σημεῖα τ_i ὡς καί τιμαί τῶν σημείων t_k καί τῶν βαρῶν A_i.

A_i	0,13334	0,29890	0,43818	0,53854	0,59104
t_k	0,007226	0,13538	0,39009	0,68338	0,91332
τ_i	0,05150	0,25167	0,53840	0,81216	0,97784
n	$\nu(\tau_i)$				
2	0,04928	0,22463	0,43401	0,60328	0,69525
3	-0,02470	0,07862	0,32834	0,54079	0,65190
4	-0,00737	-0,01089	0,19486	0,45246	0,59313
5	-0,00067	-0,02301	0,09949	0,37461	0,54267
6	0,00021	-0,01518	0,04094	0,30931	0,50069
8	0,00004	-0,00315	-0,00642	0,20859	0,43549
10	0,00000	-0,00018	-0,01351	0,13759	0,38737
15	0,00000	0,00006	-0,00497	0,04294	0,30595
20	0,00000	0,00000	-0,00095	0,00913	0,25113
30	0,00000	0,00000	0,00003	-0,00518	0,17889
100	0,00000	0,00000	0,00000	-0,00014	0,05213

πρός τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Γ8 καί βάσει τῶν διδομένων εἰς τόν Πίνακα 1 τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\nu(\tau)$.

Ὅσον ἀφορᾷ περαιτέρω εἰς τόν προσδιορισμόν τοῦ μιγαδικοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά μή συμπίπτοντα ἄκρα τῶν κλάδων τῆς ἀστεροειδοῦς ρωγμῆς, παρατηροῦμεν ὅτι οὗτος εἶναι ἐν προκειμένῳ πραγματικός ἀριθμός ἤ ἄλλως ἰσχυει: $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$, προκύπτει δέ ἐκ τῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως $\nu(\tau)$ διά $\tau = 1$ βάσει τοῦ τύπου:

$$k_1(\alpha) = \sigma\sqrt{2\alpha}\,\nu(1) \tag{8}$$

λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν ἀναφερομένων εἰς τό τμῆμα Β9 r

ΠΙΝΑΞ 2

Συντελεσταί c_k τῶν ἀναπτυγμάτων τῶν συναρτήσεων ν(τ) εἰς σειράς τροποποιημένων πολυωνύμων LEGENDRE.

n	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
2	0,49985	0,22282	-0,01757	0,00223	-0,00029
3	0,42031	0,25516	-0,00117	-0,01340	0,00637
4	0,33769	0,25414	0,03956	-0,02462	0,00367
5	0,27955	0,23714	0,06805	-0,01661	-0,00756
6	0,23797	0,21728	0,08470	-0,00393	-0,01457
8	0,18299	0,18222	0,09652	0,01795	-0,01164
10	0,14853	0,15526	0,09595	0,03302	0,00000
15	0,10090	0,11232	0,08445	0,04952	0,02027
20	0,07646	0,08804	0,07249	0,04997	0,02501
30	0,05147	0,06092	0,05328	0,03974	0,02134
100	0,01536	0,01795	0,01531	0,01110	0,00583

ρί εὑρέσεως τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων καί τοῦ ὁρισμοῦ (4) τῆς συναρτήσεως ν(τ).

Οὕτως εἰς τάς δύο πρώτας στήλας τοῦ Πίνακος 3 δίδονται αἱ προκύψασαι βάσει τῶν τύπων (7) καί (8) καί τῶν διδομένων εἰς τόν Πίνακα 2 τιμῶν τῶν συντελεστῶν c_k τιμαί τοῦ ἀνηγμένου συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων $k_1/(\sigma\sqrt{2a})$ καί $k_1/(\sigma\sqrt{a})$ εἰς τά ἄκρα τῶν κλάδων τῆς ἀστεροειδοῦς ρωγμῆς διά διαφόρους τιμάς τοῦ ἀριθμοῦ n τῶν κλάδων ταύτης. Εἰς τήν τρίτην στήλην τοῦ αὐτοῦ Πίνακος δίδονται αἱ ἀντίστοιχοι θεωρητικαί τιμαί πρός σύγκρισιν.

Αἱ θεωρητικαί αὗται τιμαί προέκυψαν διά $n \geqq 10$ ἐκ τοῦ προσεγγιστικοῦ τύπου:

$$\frac{k_1}{\sigma\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \tag{9}$$

Ἡ θεωρητική τιμή διά $n = 2$ εἶναι ἀκριβής, διά $n = 4$ προεκυψεν ἐκ τῆς προσεγγιστικῆς ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος δύο ἴ-

ΠΙΝΑΞ 3

Ἀνηγμέναι τιμαί τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα ἀκτινικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν εὑρεθεῖσαι τῇ χρήσει τῆς τροποποιημένης μεθόδου GAUSS-LEGENDRE (ἰσοδυναμούσης μέ μέθοδον GAUSS-LEGENDRE εἴτε μέ μέθοδον RADAU-LEGENDRE).

	Μέθοδος GAUSS-LEGENDRE		Θεωρητικαί τιμαί	Μέθοδος RADAU-LEGENDRE	
n	$\frac{k_1}{\sigma\sqrt{2a}}$	$\frac{k_1}{\sigma\sqrt{a}}$	$\frac{k_1}{\sigma\sqrt{a}}$	$\frac{k_1}{\sigma\sqrt{a}}$	$\frac{k_1}{\sigma\sqrt{2a}}$
2	0,70702	0,99988	1,00000	0,99989	0,70703
3	0,66726	0,94365	0,942	0,94178	0,66594
4	0,61045	0,86330	0,8636	0,86366	0,61070
5	0,56057	0,79277	0,798	0,79733	0,56379
6	0,52145	0,73744	0,742	0,74286	0,52528
8	0,46806	0,66194	0,659	0,65889	0,46591
10	0,43277	0,61203	0,63246	0,59741	0,42243
15	0,36748	0,51970	0,51640	0,49906	0,35289
20	0,31200	0,44123	0,44721	0,43965	0,31088
30	0,22677	0,32070	0,36515	0,36179	0,25582
100	0,06557	0,09274	0,20000	0,13952	0,09866

σων καθέτως διχοτομουμένων ρωγμῶν ὑπό τοῦ STALLYBRASS {1969}, διά δέ $n = 3,5,6$ καί 8 εὑρέθη ὑπό τοῦ WILLIAMS {1971}. Παρατηροῦμεν οὕτω ὅτι αἱ ἐνταῦθα προκύψασαι τιμαί τοῦ ἀνηγμένου συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων συμφωνοῦν κατά βάσιν, πλήν τῶν περιπτώσεων, ὅτε $n \geq 30$, μέ τάς ἀναμενομένας τιμάς των.

Πλέον ἀκριβεῖς τιμαί τοῦ ἀνηγμένου συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων, καί ἰδίως διά μεγάλας τιμάς τοῦ n, δύνανται νά προκύψουν, ἐάν ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (5) ἐπιλυθῇ διά τῆς τροποποιημένης μεθόδου GAUSS - LEGENDRE τῆς περιλαμβανούσης μεταξύ τῶν σημείων τ_i καί τό σημεῖον

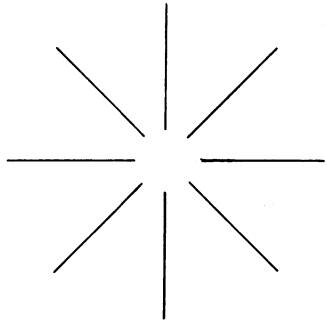
$\tau_i = 1$ καί ἰσοδυναμούσης οὕτω κατά τά ἀναφερθέντα καί εἰς τό τμῆμα Γ9 μέ μέθοδον RADAU-LEGENDRE. Δι' ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου ταύτης ἡ τιμή $\nu(1)$ τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως $\nu(\tau)$ διά $\tau = 1$ προσδιορίζεται ἀπ' εὐθείας ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων (6), εἰς τό ὁποῖον ἀνάγεται ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (5), χωρίς νά ἀπαιτῆται παρεμβολή εἰσάγουσα πρόσθετα σημαντικά σφάλματα. Αἱ οὕτω προκύπτουσαι βάσει καί τοῦ τύπου (8) τιμαί τοῦ ἀνηγμένου συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων διά διαφόρους τιμάς τοῦ n δίδονται εἰς τήν τετάρτην καί πέμπτην στήλην τοῦ Πίνακος 3, παρατηροῦμεν δέ πολύ καλήν συμφωνίαν αὐτῶν μέ τάς θεωρητικάς τιμάς τῆς τρίτης στήλης τοῦ αὐτοῦ Πίνακος. Αἰσθητή ἀπόκλισις παρουσιάζεται μόνον διά $n = 100$, πρέπει δέ νά σημειωθῇ ὅτι αἱ τιμαί τῆς τρίτης στήλης διά $n \geqq 10$ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ἀληθῶν, διότι ὁ προσεγγιστικός τύπος (9) ἰσχύει διά $n \to \infty$, δίδει δέ ἀποτελέσματα ἀρκετά μεγαλύτερα τῶν ἀληθῶν διά σχετικῶς μικράς τιμάς τοῦ n, ὡς παρατηροῦμεν καί εἰς τό σχετικόν ἄρθρον τοῦ WESTMANN {1964,Fig.3}.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Τό ἐξετασθέν εἰς τήν παροῦσαν ἐφαρμογήν πρόβλημα τῶν συντρεχουσῶν ἀκτινικῶς καί συμμετρικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ἔχει ἤδη διερευνηθῇ διά διαφόρων μεθόδων. Οὕτως ὁ WESTMANN {1964} ἐπέλυσε τό ἀνωτέρω πρόβλημα εἰς τήν περίπτωσιν σταθερᾶς πιέσεως κατά μῆκος τῶν κλάδων τῆς ρωγμῆς, οἱ δέ SRIVASTAV and NARAIN{1965} διά τυχοῦσαν κατανομήν τῆς πιέσεως κατά μῆκος τῶν κλάδων τῆς ρωγμῆς. Ὁ WESTMANN ἐχρησιμοποίησε τήν τεχνικήν WIENER-HOPF πρός προσδιορισμόν τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων k_1 εἰς τά μή συντρέχοντα ἄκρα τῶν ρωγμῶν, ἐνῷ οἱ SRIVASTAV and NARAIN ἀνήγαγον τό ὅλον πρόβλημα εἰς τήν ἐπίλυσιν μιᾶς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως FREDHOLM δεύτερου εἴδους. Τάς δοθείσας κατά ταῦτα λύσεις τοῦ προβλήματος τῶν συντρεχουσῶν ἀκτινικῶς καί συμμετρικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ὑπό τῶν WESTMANN καί SRIVASTAV and NARAIN

εὑρίσκομεν καί εἰς τό βιβλίον τῶν SNEDDON and LOWENGRUB {1969} ὡς καί εἰς σχετικόν ἄρθρον τοῦ SNEDDON {1973}. Εἰς τήν περίπτωσιν σταθερᾶς φορτίσεως κατά μῆκος τῶν συντρεχουσῶν ρωγμῶν, ὁ συντελεστής ἐντάσεως τῶν τάσεων δίδεται καί εἰς τό ἐγχειρίδιον τῶν TADA, PARIS and IRWIN {1973}.

Ἡ περίπτωσις τυχούσης κατανομῆς τῆς φορτίσεως κατά μῆκος ἑκάστης τῶν συντρεχουσῶν ρωγμῶν ἀντεμετωπίσθη καί ὑπό τοῦ WILLIAMS {1971} τῇ χρήσει τῆς τεχνικῆς WIENER-HOPF. Ὡσαύτως ὁ KUTTER {1970} ἐξετάζων τό πρόβλημα ἀκτινικῶς ἐκκινουσῶν ἐκ κυκλικῆς ὀπῆς ρωγμῶν καί χρησιμοποιῶν τήν μέθοδον τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν τοῦ MUSKHELISHVILI {1953A} ἐν συνδυασμῷ μέ σύμμορφον ἀπεικόνισιν τοῦ ὅλου σχήματος ἐπί τοῦ μοναδιαίου κύκλου ἐπισημαίνει τήν δυνατότητα ἐπιλύσεως τοῦ ἐνταῦθα ἐξετασθέντος προβλήματος τῶν συντρεχουσῶν ἀκτινικῶς καί συμμετρικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν δι' ἀναγωγῆς του κατόπιν τριῶν διαδοχικῶν συμμόρφων ἀπεικονίσεων εἰς τό πρόβλημα τοῦ μοναδιαίου κύκλου ἐντός ἀπείρου μέσου καί προσεγγιστικήν ἐπίλυσιν τοῦ τελευταίου.

Δύναται νά σημειωθῇ ὡσαύτως ὅτι τό πρόβλημα τῆς συμμετρικῆς ἀκτινικῆς διατάξεως ρωγμῶν, ὡς εἰς τό Σχῆμα 2, μή συντρεχουσῶν ἐν τούτοις, ὡς εἰς τό Σχῆμα 1, ἐμελετήθη ὑπό τῶν TWEED and ROOKE {1974} τῇ χρήσει τῆς μεθόδου τοῦ μετασχηματισμοῦ MELLIN καί ὑπό τοῦ BUECKNER {1973} τῇ χρήσει τῆς προαναφερθείσης μεθόδου τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν.



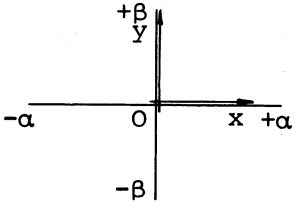
Σχῆμα 2

Παρατηρεῖται ἐπίσης ὅτι ἰδιαιτέρα ἔμφασις ἔχει δοθῇ εἰς τό πρόβλημα τῶν καθέτως διχοτομουμένων ρωγμῶν, τό ὁποῖον ἀποτελεῖ εἰδικήν περίπτωσιν τοῦ ἐνταῦθα ἐξετασθέντος προβλήματος τῶν συντρεχουσῶν ἀκτινικῶς καί συμμετρικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ($n = 4$). Τό πρόβλημα τοῦτο ἐπελύθη ὑπό τοῦ

STALLYBRASS {1969} καί ὑπό τῶν ROOKE and SNEDDON {1969}. Περί τοῦ προβλήματος τούτου θά ἀναφέρωμεν περισσότερα εἰς τήν ἐπομένην ἐφαρμογήν Δ5.

Ἐνταῦθα δυνάμεθα νά παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ χρησιμοποιηθεῖσα εἰς τήν ἐφαρμογήν ταύτην μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος τῶν συντρεχουσῶν ἀκτινικῶς καί συμμετρικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν πλεονεκτεῖ ὅλων τῶν προαναφερθεισῶν μεθόδων ἀντιμετωπίσεως τοῦ αὐτοῦ προβλήματος, καθ' ὅσον ἀφ' ἑνός μέν δέν ἀπαιτεῖ τήν χρῆσιν τῶν σχετικῶς πολυπλόκων μαθηματικῶν ἐκφράσεων τῶν ὁλοκληρωτικῶν μετασχηματισμῶν καί τῶν συμμόρφων ἀπεικονίσεων, ἀφ' ἑτέρου δέ δίδει ὡς λύσιν τῆς προκυπτούσης ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως συνάρτησιν ἀνάλογον τῆς συναρτήσεως μεταστάσεων, ἤτοι ἔχουσαν σαφῆ φυσικήν σημασίαν. Πέραν τούτων ἡ ἐνταῦθα χρησιμοποιουμένη μέθοδος ἀναγωγῆς τοῦ προβλήματος τῶν συντρεχουσῶν ἀκτινικῶς καί συμμετρικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν εἰς μίαν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν δύναται εὐχερῶς νά ἐπεκταθῇ καί εἰς τήν περίπτωσιν μή εὐθυγράμμων ρωγμῶν, πρᾶγμα τό ὁποῖον δέν δύναται νά ἐπιτευχθῇ, ἐάν χρησιμοποιηθοῦν αἱ ἄλλαι μέθοδοι ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος τούτου.

Δ5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5η: ΔΥΟ ΚΑΘΕΤΩΣ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥΜΕΝΑΙ ΡΩΓΜΑΙ



Σχῆμα 1

Θεωροῦμεν δύο εὐθυγράμμους καθέτως διχοτομουμένας ρωγμάς ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου, ὡς εἰς τό παραπλεύρως Σχῆμα 1, μέ τούς ἄξονας τοῦ συστήματος συντεταγμένων συμπίπτοντας μέ τάς διευθύνσεις τῶν ρωγμῶν καί τήν ἀρχήν τῶν συντεταγμένων συμπίπτουσαν μέ τό σημεῖον διχοτομήσεως τῶν ρωγμῶν. Ἔστωσαν 2α καί 2β τά μήκη τῶν ἐπί τῶν ἀξόνων Ox καί Oy ἀντιστοίχως ρωγμῶν. Αἱ ρωγμαί θεωροῦνται φορτιζόμεναι ἀμφότεραι ὁμοιομόρφως μέ σταθεράν φόρτισιν (-σ) κατ'ἀμφοτέρας τάς πλευράς αὐτῶν.

Τό πρόβλημα τοῦτο εἶναι παρόμοιον τοῦ ἐξετασθέντος εἰς τήν προηγουμένην ἐφαρμογήν Δ4, ὅτε εἴχομεν σύστημα n συντρεχουσῶν συμμετρικῶς καί ἀκτινικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν, καί ἀποτελεῖ ἀφ'ἑνός μέν εἰδικήν περίπτωσιν ἐκείνου, διότι ἐνταῦθα εἶναι n=4, ἀφ'ἑτέρου δέ γενίκευσιν ἐκείνου,διότι αἱ οὕτως εἰπεῖν ἀκτῖνες εἶναι αἱ μέν δύο μήκους α,αἱ δ'ἕτεραι δύο μήκους β, καί ὄχι ὅλαι τοῦ αὐτοῦ μήκους α, ὡς εἰς τήν προηγουμένην ἐφαρμογήν εἶχε θεωρηθῆ.

Καίτοι ἐνταῦθα αἱ δύο ρωγμαί διχοτομοῦνται, οὐδείς περιορισμός ὑφίσταται διά τήν ἐφαρμογήν τοῦ συστήματος τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (Β1.3), αἵτινες μάλιστα ἁπλοποιοῦνται σημαντικῶς ἐν προκειμένῳδεδομένου ὅτι, λόγῳ τῆς συμμετρίας τοῦ προβλήματος καί τῆς φορτίσεως, αἱ συναρτήσεις $\tilde{\varphi}(x_k)$ (k=1,2) τοῦ τύπου(Β1.4) συμπίπτουσαι ἐν προκειμένῳ μετά τῶν συναρτήσεων μεταστάσεων $\tilde{g}_k(x_k)$, ἔνθα μέ k=1 δηλοῦται ἡ ρωγμή κατά μῆκος τοῦ ἄξονος Ox καί μέ k=2 ἡ ρωγμή κατά μῆκος τοῦ ἄξονος Oy, εἶναι καθαρῶς πραγματικαί . Ὡσαύτως ἀφ'ἑαυτῆς πληροῦται ἡ συνθήκη μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων διά τήν παροῦσαν διάταξιν ρωγμῶν. Ἔτι περαιτέρω ἁπλοποιεῖται τό σύστημα τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώ-

σεων (Β1.3), δεδομένου ὅτι:

$$d_1 = d_2 = 0, \quad \vartheta_1 = 0, \ \vartheta_2 = \frac{\pi}{2} . \tag{1}$$

Κατόπιν ὅλων τῶν προαναφερθεισῶν ἁπλοποιήσεων καί ὡσαύτως τοῦ γεγονότος ὅτι αἱ ρωγμαί εἶναι εὐθύγραμμοι καί αἱ συναρτήσεις $\tilde{g}_k(x_k)$ $(k=1,2)$ περιτταί προκύπτει τό κάτωθι σύστημα ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων:

$$\int_0^{\alpha} \tilde{g}_1(x_1) \frac{x_1}{x_1^2-x_{o1}^2} dx_1 + \int_0^{\beta} \tilde{g}_2(x_2) \frac{x_2(x_2^2-x_{o1}^2)}{(x_2^2+x_{o1}^2)^2} dx_1 = -\frac{\pi\sigma}{2}, \tag{2α}$$

$$\int_0^{\alpha} \tilde{g}_1(x_1) \frac{x_1(x_1^2-x_{o2}^2)}{(x_1^2+x_{o2}^2)^2} dx_1 + \int_0^{\beta} \tilde{g}_2(x_2) \frac{x_2}{x_2^2-x_{o2}^2} dx_2 = -\frac{\pi\sigma}{2} . \tag{2β}$$

Εἰσάγοντες τάς ἀδιαστάτους μεταβλητάς:

$$\tau_1 = \frac{x_1}{\alpha}, \quad t_1 = \frac{x_{o1}}{\alpha}, \quad \tau_2 = \frac{x_2}{\beta}, \quad t_2 = \frac{x_{o2}}{\beta}, \quad (x_1 \equiv x, \ x_2 \equiv y) \tag{3}$$

καί τάς συναρτήσεις:

$$\nu_1(\tau_1) = -\sqrt{1-\tau_1} \frac{\tilde{g}_1(\alpha\tau_1)}{\sigma}, \quad \nu_2(\tau_2) = -\sqrt{1-\tau_2} \frac{\tilde{g}_2(\beta\tau_2)}{\sigma}, \tag{4}$$

ἵνα ἀποφύγωμεν τάς ἰδιομορφίας τῶν συναρτήσεων $\tilde{g}_1(x_1)$ καί $\tilde{g}_2(x_2)$ εἰς τάς θέσεις α καί β ἀντιστοίχως, δεδομένου μαλιστα ὅτι παρά τό σημεῖον Ο αἱ ἀνωτέρω συναρτήσεις λόγῳ τῆς ὁμοιομόρφου φορτίσεως δέν παρουσιάζουν ἰδιομορφίας συμφώνως καί πρός τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Β7, καταλήγομεν εἰς τήν κάτωθι μορφήν τοῦ συστήματος τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (2):

$$\int_0^1 \frac{\nu_1(\tau_1)}{\sqrt{1-\tau_1}} \cdot \frac{\tau_1}{\tau_1^2-t_1^2} d\tau_1 + \int_0^1 \frac{\nu_2(\tau_2)}{\sqrt{1-\tau_2}} \cdot \frac{\tau_2\{\tau_2^2-(\frac{\alpha}{\beta}t_1)^2\}}{\{\tau_2^2+(\frac{\alpha}{\beta}t_1)^2\}^2} d\tau_2 = \frac{\pi}{2}, \tag{5α}$$

$$\int_0^1 \frac{\nu_1(\tau_1)}{\sqrt{1-\tau_1}}\cdot\frac{\tau_1\{\tau_1-(\frac{\beta}{\alpha}t_2)^2\}}{\{\tau_1+(\frac{\beta}{\alpha}t_2)^2\}^2}d\tau_1+\int_0^1 \frac{\nu_2(\tau_2)}{\sqrt{1-\tau_2}}\cdot\frac{\tau_2}{\tau_2^2-t_2^2}d\tau_2=\frac{\pi}{2}. \quad (5\beta)$$

Ἡ συνάρτησις βάρους εἶναι ἡ $1/\sqrt{1-\tau}$, ὁπότε κατάλληλος τρόπος προσεγγιστικοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ὁλοκληρωμάτων τῶν πρώτων μελῶν τῶν ἀνωτέρω ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων εἶναι, ὡς καί εἰς τήν προηγουμένην ἐφαρμογήν, ἡ τροποποιημένη μέθοδος GAUSS-LEGENDRE μέ τήν προαναφερθεῖσαν συνάρτησιν βάρους. Χάριν ἀπλότητος δυνάμεθα νά γράψωμεν τό σύστημα τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (5) παραλείποντες τούς δείκτας τῶν μεταβλητῶν τ καί t ὡς κάτωθι:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau}}\left\{\nu_1(\tau)\frac{\tau}{\tau^2-t^2}+\nu_2(\tau)\frac{\tau\{\tau^2-(\frac{\alpha}{\beta}t)^2\}}{\{\tau^2+(\frac{\alpha}{\beta}t)^2\}^2}\right\}d\tau=\frac{\pi}{2}, \quad (6\alpha)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau}}\left\{\nu_1(\tau)\frac{\tau\{\tau^2-(\frac{\beta}{\alpha}t)^2\}}{\{\tau^2+(\frac{\beta}{\alpha}t)^2\}^2}+\nu_2(\tau)\frac{\tau}{\tau^2-t^2}\right\}d\tau=\frac{\pi}{2}. \quad (6\beta)$$

Δυνάμεθα ἐπίσης νά εἰσαγάγωμεν ἀντί τῶν συναρτήσεων $\nu_1(\tau)$ καί $\nu_2(\tau)$ κατά τούς τύπους (4) τάς συναρτήσεις $\xi_1(\tau)$ καί $\xi_2(\tau)$ μέ συνάρτησιν βάρους τήν $1/\sqrt{1-\tau^2}$ ὡς κάτωθι:

$$\xi_1(\tau_1) = -\sqrt{1-\tau_1^2}\,\frac{\tilde{g}_1(\alpha\tau_1)}{\sigma}, \quad \xi_2(\tau_2) = -\sqrt{1-\tau_2^2}\,\frac{\tilde{g}_2(\beta\tau_2)}{\sigma}, \quad (7)$$

τούτου ὄντος ἄλλως τε ἀπολύτως δικαιολογημένου, καθ' ὅσον αἱ συναρτήσεις $\tilde{g}_1(\alpha\tau_1)$ καί $\tilde{g}_2(\beta\tau_2)$ ἐπί τῶν δύο ρωγμῶν παρουσιάζουν ἰδιομορφίας εἰς ἀμφότερα τά ἄκρα $\tau_{1,2}=\pm 1$ τῶν ρωγμῶν οὖσαι ταύτοχρόνως περιτταί ἐπί τῶν ρωγμῶν πρᾶγμα, τό ὁποῖον ἐπιτρέπει τόν περιορισμόν τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως εἰς τό ἥμισυ μῆκος ρωγμῆς ἤτοι εἰς τό διάστημα [0,1] Τό σύστημα τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων τό ἀντίστοιχον τοῦ (6) μέ ἀγνώστους συναρτήσεις τάς $\xi_1(\tau)$ καί $\xi_2(\tau)$, ἐάν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν καί τό περιττόν τῶν συναρτήσεων τούτων, εἶ-

ναι τό ἐξῆς:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left\{ \xi_1(\tau)\frac{\tau}{\tau^2-t^2} + \xi_2(\tau)\frac{\tau\left\{\tau^2-(\frac{\alpha}{\beta}t)^2\right\}}{\left\{\tau^2+(\frac{\alpha}{\beta}t)^2\right\}^2} \right\} d\tau = \frac{\pi}{2}, \qquad (8\alpha)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left\{ \xi_1(\tau)\frac{\tau\left\{\tau^2-(\frac{\beta}{\alpha}t)^2\right\}}{\left\{\tau^2+(\frac{\beta}{\alpha}t)^2\right\}^2} + \xi_2(\tau)\frac{\tau}{\tau^2-t^2} \right\} d\tau = \frac{\pi}{2} \qquad (8\beta)$$

Σημειοῦται ὅτι τό διάστημα ὁλοκληρώσεως εἰς τό σύστημα (6) εἶναι τό [0,1] , ἐνῷ εἰς τό σύστημα (8) τό [-1,1], καίτοι λόγῳ τοῦ περιττοῦ τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων ἐμφανίζεται ὡς διάστημα ὁλοκληρώσεως τό [0,1]. Διά τήν ἐπίλυσιν συνεπῶς τοῦ συστήματος τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (8) δύναται νά χρησιμοποιηθῇ ἡ μέθοδος τῆς προσεγγιστικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS-CHEBYSHEV ἤ καί ἡ μέθοδος προσεγγιστικῆς ὁλοκληρώσεως LOBATTO-CHEBYSHEV, ἵνα ἀποφευχθῇ ἡ παρεμβολή διά τήν εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων εἰς τό σημεῖον τ=1 καί ἐκ τούτων τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν.

Προφανῶς οἱ μιγαδικοί συντελεσταί ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν εἶναι ἀριθμοί καθαρῶς πραγματικοί ἤ ἄλλως ἰσχύει: $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$, οὗτοι δέ προκύπτουν ἐκ τῶν τιμῶν τῶν συναρτήσεων $\nu_{1,2}(\tau)$ ἤ $\xi_{1,2}(\tau)$ διά τ=1 βάσει τῶν τύπων:

$$k_1(\alpha) = \sigma\sqrt{2\alpha}\nu_1(1), \quad k_1(\beta) = \sigma\sqrt{2\beta}\nu_2(1), \qquad (9\alpha)$$

$$k_1(\alpha) = \sigma\sqrt{\alpha}\ \xi_1(1), \quad k_1(\beta) = \sigma\sqrt{\beta}\ \xi_2(1), \qquad (9\beta)$$

λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν ἀναφερομένων εἰς τό τμῆμα Β9 περί εὑρέσεως τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων καί τῶν λόγῳ τῶν σχέσεων (4) καί (7) ἰσχυουσῶν σχέσεων:

$$\xi_1(1) = \sqrt{2}\nu_1(1), \quad \xi_2(1) = \sqrt{2}\ \nu_2(1). \qquad (10)$$

Ἐάν A_i εἶναι τά βάρη καί τ_i καί t_k αἱ τετμημέναι τῆς τροποποιημένης μεθόδου GAUSS-LEGENDRE διά τήν προσεγγιστικήν ἐπίλυσιν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων, περί τῆς ὁποίας ἔχομεν ἀναφέρει εἰς τό τμῆμα Γ9 , τό σύστημα τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (6) ἀνάγεται εἰς τό κάτωθι σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \left\{ \nu_1(\tau_i) \frac{\tau_i}{\tau_i^2 - t_k^2} + \nu_2(\tau_i) \frac{\tau_i \left\{ \tau_i^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} t_k\right)^2 \right\}}{\left\{ \tau_i^2 + \left(\frac{\alpha}{\beta} t_k\right)^2 \right\}^2} \right\} = \frac{\pi}{2} , \tag{11α}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \left\{ \nu_1(\tau_i) \frac{\tau_i \left\{ \tau_i^2 - \left(\frac{\beta}{\alpha} t_k\right)^2 \right\}}{\left\{ \tau_i^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha} t_k\right)^2 \right\}^2} + \nu_2(\tau_i) \frac{\tau_i}{\tau_i^2 - t_k^2} \right\} = \frac{\pi}{2}, \tag{11β}$$

ἔνθα n ὁ ἀριθμός τῶν χρησιμοποιουμένων σημείων κατά τάς προσεγγιστικάς ὁλοκληρώσεις. Σημειωτέον ἐπίσης ὅτι λόγῳ τοῦ περιττοῦ τῶν συναρτήσεων $\tilde{g}_1(\alpha\tau_1)$ καί $\tilde{g}_2(\beta\tau_2)$ ἤ τῶν $\nu_{1,2}(\tau)$ ἤ τῶν $\xi_{1,2}(\tau)$ ἡ συνθήκη μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων (A1.29) πληροῦται ἀφ' ἑαυτῆς.

Ἀναλόγως, ἐάν τ_i καί t_k εἶναι αἱ τετμημέναι κατά τήν μέθοδον ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων GAUSS-CHEBYSHEV, περί τῆς ὁποίας ἔχομεν ἀναφέρει ἐπίσης εἰς τό τμῆμα Γ9, τό σύστημα τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (8) ἀνάγεται εἰς τό κάτωθι σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \xi_1(\tau_i) \frac{\tau_i}{\tau_i^2 - t_k^2} + \xi_2(\tau_i) \frac{\tau_i \left\{ \tau_i^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} t_k\right)^2 \right\}}{\left\{ \tau_i^2 + \left(\frac{\alpha}{\beta} t_k\right)^2 \right\}^2} \right\} = n , \tag{12α}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \xi_1(\tau_i) \frac{\tau_i \left\{ \tau_i^2 - \left(\frac{\beta}{\alpha} t_k\right)^2 \right\}}{\left\{ \tau_i^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha} t_k\right)^2 \right\}^2} + \xi_2(\tau_i) \frac{\tau_i}{\tau_i^2 - t_k^2} \right\} = n , \tag{12β}$$

ἔνθα πλέον n εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν χρησιμοποιουμένων σημείων κατά τάς προσεγγιστικάς ὁλοκληρώσεις εἰς τό διάστημα [0,1], λαμβάνεται δέ ὑπ' ὄψιν ὅτι ὅλα τά βάρη εἶναι ἴσα μεταξύ των καί δίδονται ὑπό τοῦ τύπου:

$$A_i = \frac{\pi}{2n} , \quad i = 1, 2, \ldots, n , \tag{13}$$

ἔνθα ἐτέθη 2n εἰς τόν παρονομαστήν, διότι τό ἀρχικόν διάστημα ὁλοκληρώσεως ἦτο τό [-1,1] μέ 2n σημεῖα τ_i εὑρισκόμενα ἐντός αὐτοῦ, καίτοι ἀκολούθως, λόγῳ τοῦ ὅτι αἱ συναρτήσεις $\xi_{1,2}(\tau)$ εἶναι περιτταί, παρουσιάζεται ὡς διάστημα ὁλοκληρώσεως τό [0,1] μέ n μόνον σημεῖα περιεχόμενα ἐντός αὐτοῦ.

Ἐάν τέλος χρησιμοποιηθῇ διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ συστηματος τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (8) ἡ μέθοδος ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων LOBATTO-CHEBYSHEV, περί τῆς ὁποίας ἔχομεν ἐπίσης ἀναφέρει εἰς τό τμῆμα Γ9, θά προκύψῃ πάλιν ἓν σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων ἀνάλογον τοῦ (12) μέ διαφόρους βεβαίως τιμάς τῶν τετμημένων τ_i καί t_k καί δεύτερα μέλη ἴσα μέ (2n-1)/2.

Εἰς τόν κάτωθι Πίνακα 1 δίδονται αἱ προκύπτουσαι ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων (6) τιμαί τῶν συναρτήσεων $\nu_1(\tau)$ καί $\nu_2(\tau)$ εἰς τά σημεῖα $\tau = \tau_i$ $(i = 1, 2,\ldots,n)$ μέ $n = 5$ διά χρήσεως τῆς τροποποιημένης μεθόδου ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων GAUSS-LEGENDRE. Ἔχουν θεωρηθῆ ὡσαύτως διάφοροι λόγοι μηκῶν τῶν ρωγμῶν α/β.

Εἰς τόν Πίνακα 2 δίδονται οἱ συντελεσταί c_k $(k = 1,2,\ldots,n)$, $n = 5$, τῶν ἀναπτυγμάτων (4.7) τῶν συναρτήσεων $\nu_{1,2}(\tau)$ εἰς σειράς τροποποιημένων πολυωνύμων LEGENDRE εὑρεθέντες συμφώνως πρός τά ἀναπτυχθέντα εἰς τό τμῆμα Γ8 καί βάσει τῶν τιμῶν τοῦ Πίνακος 1.

Εἰς τόν Πίνακα 3 ἐν συνεχείᾳ δίδονται αἱ προκύπτουσαι ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων (8) τιμαί τῶν συναρτήσεων $\xi_1(\tau)$ καί $\xi_2(\tau)$ εἰς τά σημεῖα $\tau = \tau_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ μέ $n = 5$ διά χρήσεως τῆς μεθόδου ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων GAUSS-CHEBYSHEV. Ἐθεωρήθησαν δύο τιμαί τοῦ λόγου α/β τῶν μηκῶν τῶν ρωγμῶν: $\alpha/\beta = 1$ καί 4.

Διά τήν εὕρεσιν τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων βάσει τῶν τύπων (9) πρέπει νά εἶναι γνωσταί αἱ τιμαί τῶν συναρτήσεων $\nu_{1,2}(\tau)$ καί $\xi_{1,2}(\tau)$ διά $\tau = 1$. Πρός τοῦτο διά

ΠΙΝΑΞ 1

Τιμαί τῶν συναρτήσεων $\nu_{1,2}(\tau)$ εἰς τά σημεῖα τ_i εὑρεθεῖσαι τῇ χρήσει τῆς τροποποιημένης μεθόδου GAUSS-LEGENDRE.

α/β	1	4	8	16
τ_i	$\nu_1(\tau)$			
0,05150	-0,0074	-0,0114	-0,0109	-0,0089
0,25167	-0,0109	0,0573	0,1150	0,1686
0,53840	0,1949	0,3530	0,4008	0,4234
0,81216	0,4525	0,5735	0,5934	0,6007
0,97784	0,5931	0,6798	0,6905	0,6942
τ_i	$\nu_2(\tau)$			
0,05150	-0,0074	-0,0016	-0,0006	-0,0003
0,25167	-0,0109	-0,0235	-0,0213	-0,0131
0,53840	0,1949	0,0814	0,0502	0,0302
0,81216	0,4525	0,2686	0,1947	0,1363
0,97784	0,5931	0,3999	0,3015	0,2190

τήν τροποποιημένην μέθοδον GAUSS-LEGENDRE, ὡς καί διά τήν μέθοδον GAUSS-CHEBYSHEV, ἀπαιτεῖται παρεμβολή βάσει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τό τμῆμα Γ8. Οὕτω διά τήν τροποποιημένην μέθοδον GAUSS-LEGENDRE ἔχομεν βάσει τοῦ τύπου (4.7):

$$\nu(1) = \sum_{k=1}^{n} c_k P_{2k-2}(0), \tag{14}$$

δεδομένου ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\tilde{P}_n(1) = P_{2n}(0), \tag{15}$$

τῶν συντελεστῶν c_k διδομένων ὑπό τοῦ Πίνακος 2 διά τάς θεωρηθείσας περιπτώσεις καθέτως διχοτομουμένων ρωγμῶν. Κατ' αὐτόν τόν τρόπον δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν τόν Πίνακα 4 πα-

ΠΙΝΑΞ 2

Συντελεσταί c_k τῶν ἀναπτυγμάτων τῶν συναρτήσεων $\nu_{1,2}(\tau)$ εἰς σειράς τροποποιημένων πολυωνύμων LEGENDRE.

α/β	1	4	8	16
c_k	$\nu_1(\tau)$			
c_1	0,33769	0,44049	0,46814	0,48430
c_2	0,25414	0,26992	0,25800	0,24518
c_3	0,03956	-0,00387	-0,01824	-0,02457
c_4	-0,02462	-0,02444	-0,01358	-0,00223
c_5	0,00367	0,01424	0,01193	0,00527
c_k	$\nu_2(\tau)$			
c_1	0,33769	0,20454	0,14931	0,10609
c_2	0,25414	0,17428	0,13235	0,09548
c_3	0,03956	0,04833	0,04137	0,03290
c_4	-0,02462	-0,01069	-0,00670	-0,00284
c_5	0,00367	0,00053	-0,00006	-0,00117

ΠΙΝΑΞ 3

Τιμαί τῶν συναρτήσεων $\xi_{1,2}(\tau)$ εἰς τά σημεῖα τ_i εὑρεθεῖσαι τῇ χρήσει τῆς μεθόδου GAUSS-CHEBYSHEV.

α/β	1		4	
τ_i	$\xi_1(\tau)$	$\xi_2(\tau)$	$\xi_1(\tau)$	$\xi_2(\tau)$
0,1564	-0,0219	-0,0219	-0,0533	0,0269
0,4540	0,1440	0,1440	0,3117	0,0744
0,7071	0,4653	0,4653	0,6420	0,2614
0,8910	0,7180	0,7180	0,8556	0,4615
0,9877	0,8481	0,8481	0,9622	0,5803

ρέχοντα τούς συντελεστάς έντάσεως τῶν τάσεων $k_1(\alpha)$ καί $k_1(\beta)$ εἰς τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν μηκῶν 2α καί 2β ἀντιστοίχως ὑπό ἀνηγμένην μορφήν:

ΠΙΝΑΞ 4

Ἀνηγμέναι τιμαί τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα καθέτως διχοτομουμένων ρωγμῶν εὑρεθεῖσαι τῇ χρήσει τῆς τροποποιημένης μεθόδου GAUSS-LEGENDRE.

α/β	1	4	8	16
$\frac{k_1(\alpha)}{\sigma\sqrt{\alpha}}$	0,86330	0,98479	0,99880	1,00120
$\frac{k_1(\beta)}{\sigma\sqrt{\beta}}$	0,86330	0,58974	0,44728	0,32592

Παρατηροῦμεν ἐκ τοῦ Πίνακος 4 ὅτι αὐξανομένου τοῦ λόγου α/β τό μέγεθος $k_1(\alpha)/(\sigma\sqrt{\alpha})$ αὐξάνεται, καίτοι ἡ τιμή του διά $\alpha/\beta = 16$ δύναται νά θεωρηθῇ ὑπερβολική ὡς ὑπερβαίνουσα τήν μονάδα, ἐνῷ τό μέγεθος $k_1(\beta)/(\sigma\sqrt{\beta})$ μειοῦται, ὡς πράγματι ἀνεμένετο.

Εἰς τόν Πίνακα 5 δίδονται αἱ τιμαί τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων k_1 διά δύο καθέτως διχοτομουμένας ἴσας ρωγμάς, ἤτοι διά τιμήν τοῦ λόγου $\alpha/\beta = 1$, εὑρεθεῖσαι διά τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (8) ἀφ' ἑνός μέν διά τῆς μεθόδου GAUSS-CHEBYSHEV καί ἐν συνεχείᾳ παρεμβολῆς κατά τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Γ8, ἀφ' ἑτέρου δέ διά τῆς μεθόδου LOBATTO-CHEBYSHEV, ὁπότε δέν ἀπαιτεῖται ἐν συνεχείᾳ παρεμβολή διά τήν βάσει τῶν τύπων (9β) εὕρεσιν τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων k_1 (ὄντος διά τήν ἐξεταζομένην περίπτωσιν τοῦ αὐτοῦ καί διά τάς δύο ρωγμάς), καθ ὅσον εὑρίσκεται ἀπ' εὐθείας ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τῆς κατά τά προαναφερθέντα τροποποιημένης μορφῆς τοῦ συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων (12) ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως ξ(τ) διά τ = 1. Ἐθεωρήθησαν αἱ τιμαί τοῦ ἀριθμοῦ τῶν λαμβανομένων

σημείων n ἀπό 2 μέχρι καί 11 καί διά τάς δύο χρησιμοποιηθείσας μεθόδους, παρατηρεῖται δέ ὅτι ἡ μέθοδος LOBATTO-CHEBYSHEV, καίτοι κατά τήν προσεγγιστικήν ὁλοκλήρωσιν ὀλιγώτερον ἀκριβής τῆς GAUSS-CHEBYSHEV, ἐν τούτοις, συμφώνως πρός τά ἀποτελέσματα τοῦ Πίνακος 5, ἐμφανίζεται ἀκριβεστέρα, τούτου ὀφειλομένου εἰς τήν ἔλλειψιν σφαλμάτων ἐκ παρεμβολῆς, τά ὁποῖα ὑπάρχουν ἀναγκαίως εἰς τήν μέθοδον GAUSS-CHEBYSHEV ὡς καί εἰς τήν προηγουμένως θεωρηθεῖσαν τροποποιημένην μέθοδον GAUSS-LEGENDRE.

ΠΙΝΑΞ 5

Ἀνηγμέναι τιμαί τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα καθέτως διχοτομουμένων ἴσων ρωγμῶν.

Μέθοδος	GAUSS--CHEBYSHEV	LOBATTO--CHEBYSHEV
n	$k_1/(\sigma\sqrt{a})$	
2	0,94445	0,83658
3	0,83635	0,85970
4	0,83882	0,86387
5	0,86289	0,86449
6	0,86381	0,86441
7	0,86528	0,86424
8	0,86282	0,86408
9	0,86503	0,86396
10	0,86283	0,86387
11	0,86464	0,86380

Σημειοῦμεν ἐξ ἄλλου ὅτι διά $n = 5$ καί $\alpha/\beta = 1$ ἐκ τοῦ Πίνακος 4 προκύπτει: $k_1/(\sigma\sqrt{a}) = 0,86330$ διά τήν ἀνηγμένην τιμήν τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων k_1 εἰς τά ἄκρα δύο καθέτως διχοτομουμένων ἴσων ρωγμῶν, ἐνῷ ἡ κατά προσέγγισιν ὀρθή τιμή τούτου εἶναι: $k_1/(\sigma\sqrt{a}) = 0,8636$, ὡς εὑρέθη ὑπό τῶν ROOKE and SNEDDON {1969}.

Δύναται νά παρατηρηθῇ τέλος ὅτι εἰς τό ἐνταῦθα ἐξεταζόμενον πρόβλημα ἡ τροποποιημένη μέθοδος GAUSS-LEGENDRE, ἥτις θεωρεῖ ὡς διάστημα ὁλοκληρώσεως τό [0,1] ἐμφανίζεται πλέον ἀκριβής, διά τόν αὐτόν ἀριθμόν σημείων n, τῆς μεθόδου LOBATTO-CHEBYSHEV, ἥτις θεωρεῖ βασικῶς ὡς διάστημα ὁλοκληρώσεως τό [-1,1], παρ' ὅλον ὅτι ἡ τελευταία δέν ἀπαιτεῖ παρεμβολήν, ὡς προανεφέρθη, διά τήν εὕρεσιν τῆς ἀνηγμένης τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων, τόν ὁποῖον καί χρησιμοποιοῦ-

μεν ὡς βάσιν συγκρίσεως τῶν μεθόδων τούτων. Τό γεγονός τοῦτο δύναται νά ἐξηγηθῇ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ συναρτησις μεταστάσεων ἐφ' ἑκάστης ρωγμῆς παρουσιάζει ἀσυνεχείας εἰς τάς παραγώγους της εἰς τό σημεῖον $\tau = 0$, ἤτοι τό σημεῖον διχοτομήσεως τῶν ρωγμῶν κατά τά ἀναφερθέντα καί εἰς τό τμῆμα Γ10.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Τό ἐξετασθέν εἰς τήν παροῦσαν ἐφαρμογήν πρόβλημα τῶν δύο καθέτως διχοτομουμένων ρωγμῶν ἐμελετήθη ὑπό τοῦ STALLYBRASS {1969} διά τήν εἰδικήν περίπτωσιν ἴσων ρωγμῶν δι' ἀναγωγῆς του εἰς μίαν ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν FREDHOLM δευτέρου εἴδους μέ περαιτέρω μετασχηματισμόν ταύτης εἰς ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν WIENER-HOPF. Μέ τήν αὐτήν περίπτωσιν καθέτως διχοτομουμένων ρωγμῶν ἠσχολήθησαν καί οἱ ROOKE and SNEDDON {1969}, ἐπιλύσαντες τό σχετικόν πρόβλημα τῇ χρήσει τοῦ μετασχηματισμοῦ FOURIER. Ἡ δοθεῖσα λύσις ὑπό τῶν ROOKE and SNEDDON περιγράφεται καί ὑπό τοῦ SNEDDON {1973}. Λύσιν τοῦ γενικοῦ προβλήματος τῶν δύο καθέτως διχοτομουμένων ρωγμῶν ἔδωσαν οἱ SNEDDON and DAS {1971} ἐφαρμόσαντες ἐπίσης τήν μέθοδον τῶν μετασχηματισμῶν FOURIER καί ἀναγαγόντες τό ὅλον πρόβλημα εἰς ἓν σύστημα δύο ἐξισώσεων FREDHOLM δευτέρου εἴδους, τό ὁποῖον καί ἐπέλυσαν ἀριθμητικῶς. Τά ἀποτελέσματα τῶν SNEDDON and DAS διά τάς τιμάς τῶν ἀνηγμένων συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων συμφωνοῦν μέ τά εὑρεθέντα διά τῆς ἐφαρμοσθείσης εἰς τό τμῆμα τοῦτο μεθόδου.

Ἡ χρησιμοποιηθεῖσα ἐνταῦθα μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ γενικοῦ προβλήματος τῶν καθέτως διχοτομουμένων ρωγμῶν πλεονεκτεῖ τῆς ἐφαρμοσθείσης ὑπό τῶν SNEDDON and DAS μεθόδου, καθ' ὅσον ἀφ' ἑνός μέν δέν ἀπαιτεῖ τήν χρῆσιν τῶν σχετικῶς πολυπλόκων ἐκφράσεων τῶν μετασχηματισμῶν FOURIER, ἀφ' ἑτέρου δέ δίδει ὡς λύσιν τοῦ προκύπτοντος συστήματος ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων συναρτήσεις ἀναλόγους τῶν συναρτήσεων μεταστάσεων, ἤτοι ἐχούσας σαφῆ φυσικήν σημασίαν, ἀντιθέτως πρός

ὅ,τι συμβαίνει, ἐάν χρησιμοποιηθῇ ἡ μέθοδος τῶν μετασχηματισμῶν FOURIER . Πέραν τούτων ἡ ἐνταῦθα χρησιμοποιουμένη μέθοδος ἀναγωγῆς τοῦ προβλήματος τῶν καθέτως διχοτομουμένων ρωγμῶν εἰς ἓν σύστημα ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων δύναται εὐχερῶς νά ἐπεκταθῇ καί εἰς τήν περίπτωσιν μή εὐθυγράμμων ρωγμῶν, πρᾶγμα τό ὁποῖον δέν δύναται νά γίνῃ, ἐάν χρησιμοποιηθῇ ὡς μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ παρόντος προβλήματος ἡ μέθοδος τῶν μετασχηματισμῶν FOURIER.