Γ5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΙΑΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΕΙΣ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΝ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Διά τόν προσεγγιστικόν ὑπολογισμόν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων, πέραν τῆς ἀναπτυχθείσης εἰς τό προηγούμενον τμῆμα Γ4 μεθόδου GAUSS, δυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν καί ἄλλας μεθόδους ἀναλόγως τῆς παρουσιαζομένης περιπτώσεως. Ἄς θεωρήσωμεν γενικῶς ὅτι ἔχομεν πρός ὑπολογισμόν τό ὁλοκλήρωμα I τῆς μορφῆς (4.2) καί ὅτι ἐπιθυμοῦμεν νά προσεγγίσωμεν τοῦτο δι'ἐκφράσεως τῆς μορφῆς (4.5), ἔνθα t_k ($k = 1,2,\ldots,n$) καθωρισμένα σημεῖα. Ἐργαζόμενοι ὡς καί εἰς τό τμῆμα Γ4 ὑποθέτομεν τήν συνάρτησιν $f(z)$ ἔχουσαν m ἁπλοῦς πόλους εἰς τά σημεῖα z_m ἐντός τῆς καμπύλης C τοῦ Σχήματος 4.1 τῆς περιβαλλούσης τό διάστημα ὁλοκληρώσεως L, ὁριζόμενον ὡς : $\alpha \leqq x \leqq \beta, y = 0$.

Θεωροῦμεν ἤδη τό ὁλοκλήρωμα :

$$I_o = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\tau)}{(\tau-z)\sigma_n(\tau)}d\tau, \tag{1}$$

ἔνθα ἐτέθη :

$$\sigma_n(z) = k\prod_{k=1}^{n}(z-t_k) \tag{2}$$

μέ τήν σταθεράν k αὐθαίρετον. Ἐφαρμόζοντες διά τό ὁλοκλήρωμα I_o τῆς ἐκφράσεως (1) τό θεώρημα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων τοῦ CAUCHY λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τούς ἁπλοῦς πόλους τῆς συναρτήσεως $f(z)$ καί τάς ρίζας τῆς συναρτήσεως $\sigma_n(z)$ καί θεωροῦντες ὅτι δέν ὑπάρχει καμμία σύμπτωσις τῶν μέν μετά τῶν δέ, συνάγομεν ὅτι:

$$I_o = \frac{f(z)}{\sigma_n(z)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{f(t_k)}{(t_k-z)\sigma_n'(t_k)}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\rho_k}{(z_k-z)\sigma_n(z_k)}, \tag{3}$$

ἔνθα ρ_k τά ὁλοκληρωτικά ὑπόλοιπα τῆς συναρτήσεως $f(z)$ εἰς τούς πόλους αὐτῆς z_k ($k = 1,2,\ldots,m$). Ὁ τύπος οὗτος εἶναι ἀντίστοιχος τοῦ (4.7) μέ τήν διαφοράν ὅτι τά σημεῖα t_k

$(k = 1,2,\ldots,n)$ θεωροῦνται ἐνταῦθα αὐθαιρέτως καθωρισμένα ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως $[\alpha,\beta]$.

Διά συγκρίσεως τῶν ἐκφράσεων (1) καί (3) τοῦ ὁλοκληρώματος I_o συνάγομεν τόν κάτωθι τύπον, ἀνάλογον τοῦ (4.8), τόν δίδοντα τήν πρός ὁλοκλήρωσιν συνάρτησιν $f(z)$ ἐπί τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως L :

$$f(t) = \sigma_n(t)\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{f(t_k)}{(t-t_k)\sigma_n'(t_k)}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\rho_k}{(t-z_k)\sigma_n(z_k)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\tau)d\tau}{(\tau-t)\sigma_n(\tau)}\right\}. \tag{4}$$

Ἐάν ἐθέτομεν z ἀντί t εἰς τόν τύπον τοῦτον, θά εἴχομεν γενικήν ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως $f(z)$ ἐντός τῆς καμπύλης C, ἥτις ὅμως δέν μᾶς ἐνδιαφέρει ἐν προκειμένῳ.

Τήν ἔκφρασιν (4) τῆς συναρτήσεως $f(t)$ εἰσάγοντες ἐντός τοῦ ὁλοκληρώματος (4.2) λαμβάνομεν :

$$I = \int_\alpha^\beta w(t)f(t)dt = \sum_{k=1}^{n}A_k f(t_k)-2\sum_{k=1}^{m}\frac{\rho_k q_n(z_k)}{\sigma_n(z_k)}+E_n, \tag{5}$$

ἔνθα ἐτέθησαν :

$$q_n(z) = -\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\frac{w(t)\sigma_n(t)}{t-z}dt, \tag{6}$$

$$A_k = \frac{1}{\sigma_n'(t_k)}\int_\alpha^\beta\frac{w(t)\sigma_n(t)}{t-t_k}dt = -2\frac{q_n(t_k)}{\sigma_n'(t_k)}, \tag{7}$$

$$E_n = \frac{1}{\pi i}\int_C\frac{q_n(\tau)}{\sigma_n(\tau)}f(\tau)d\tau. \tag{8}$$

Σημειωτέον ὅτι ὁ τύπος (6) ἰσχύει ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐάν τό σημεῖον z κεῖται ἐπί ἤ ἐκτός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως L κατά τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Γ4.

Τό μέγεθος E_n διδόμενον ὑπό τοῦ τύπου (8) εἶναι τό σφάλμα τῆς ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως, τῆς ὁποίας τό πρῶτον ἄθροισμα τοῦ δεξιοῦ μέλους τοῦ τύπου (5) ἀποτελεῖ τόν κύριον ὅρον, τό δέ δεύτερον ἄθροισμα τόν ὀφειλόμενον εἰς τούς ἁπλοῦς πόλους τῆς συναρτήσεως $f(z)$ ὅρον. Τό σφάλμα E_n δέν ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ n τῶν χρησιμοποιουμένων ση-

μείων, ἀλλ'ἐπίσης ἐκ τῆς ἐκλογῆς τούτων καί ὡσαύτως ἐκ τῆς συμπεριφορᾶς τῆς συναρτήσεως f(z) ἐπί καί ἐντός τῆς καμπύλης C.

Τήν καμπύλην C δυνάμεθα νά διαμορφώσωμεν καί μετακινήσωμεν καταλλήλως, ὥστε ἀφ'ἑνός μέν νά συμπεριληφθοῦν ὅσον τό δυνατόν περισσότεροι ἁπλοῖ πόλοι τῆς συναρτήσεως f(z) ἐντός αὐτῆς, ἀφ'ἑτέρου δέ ὁ ὑπολογισμός τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος (8) νά εἶναι σχετικῶς ἁπλοῦς. Διά νά εὕρωμεν διά ποίαν κατηγορίαν συναρτήσεων f(z) τό σφάλμα E_n εἶναι μηδενικόν, ἐμφανίζομεν τήν συνάρτησιν f(z) ὑπό τήν μορφήν (4.19) καί ἀπομακρύνομεν τήν καμπύλην C ἀπό τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως L μέχρι συμπτώσεώς της μετά τοῦ ἀπείρου κύκλου λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν εἰς τήν ἔκφρασιν (19) ὅλους τούς ἁπλοῦς πόλους τῆς συναρτήσεως f(z), τούς ὁποίους θεωροῦμεν πεπερασμένους τόν ἀριθμόν καί εἰς πεπερασμένας ἀπό τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως L ἀποστάσεις.

Ἐάν ἤδη εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου θεωρήσωμεν τήν συμπεριφοράν :

$$\frac{q_n(z)}{\sigma_n(z)} = \mathcal{O}(z^{-p}) . \tag{9}$$

τῆς συναρτήσεως $q_n(z)/\sigma_n(z)$, ἔνθα p θετικός ἀριθμός μέ μεγίστην τιμήν (2n+1), τήν ὁποίαν λαμβάνει διά τήν περίπτωσιν ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως κατά GAUSS (ὅτε ἡ ἔκφρασις (9) συμπίπτει μετά τῆς (4.20)), τότε παρατηροῦμεν ὅτι τό σφάλμα E_n εἶναι μηδενικόν, ἐφ'ὅσον ἡ συνάρτησις g(z) τοῦ τύπου (4.19) εἶναι πολυώνυμον μέχρι (p+m-2) βαθμοῦ.

Ἐάν τά σημεῖα t_k (k = 1,2,...,n) ἐκλεγοῦν ὡς αἱ ρίζαι τοῦ πολυωνύμου $p_n(z)$ τῆς ἀκολουθίας τῶν ὀρθογωνίων πολυωνύμων εἰς τό διάστημα ὁλοκληρώσεως [α,β] καί μέ συνάρτησιν βάρους w(t), τότε ἡ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα μέθοδος προσεγγιστικῆς ὁλοκληρώσεως συμπίπτει μέ τήν μέθοδον GAUSS τήν ἐκτεθεῖσαν εἰς τό τμῆμα Γ4.

Ἐάν ἀντιθέτως τά σημεῖα t_k (k = 1,2,...,n) ἐκλεγοῦν αὐθαιρέτως ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως L, τότε λαμβα-

νομένου ὑπ'ὄψιν καί τοῦ τύπου (6) ὁ θετικός ἀκέραιος ἀριθμός p θά ἔχῃ ἐν γένει τήν τιμήν (n+1), ἥτις εἶναι ἡ ἐλαχίστη δυνατή τιμή αὐτοῦ.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Ἡ ἐξετασθεῖσα εἰς τό τμῆμα τοῦτο γενική μέθοδος ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων ἀποτελεῖ ἐπέκτασιν τῆς εἰς τό προηγούμενον τμῆμα Γ4 μελετηθείσης μεθόδου GAUSS διά τόν ὑπολογισμόν τοιούτων ὁλοκληρωμάτων.

Ὁ ἐφαρμοσθείς εἰς τό τμῆμα τοῦτο τρόπος ἐργασίας ἀποτελεῖ ἐπίσης κατά βάσιν γενίκευσιν τῶν ἐκτιθεμένων μεθόδων εἰς τά ἄρθρα τῶν TAKAHASI and MORI {1970,1971} καί τῶν DONALDSON and ELLIOTT {1972}, οἵτινες θεωροῦν τό γενικόν πρόβλημα τῆς ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως δεχόμενοι μάλιστα πρός ὁλοκλήρωσιν συναρτήσεις παρουσιαζούσας ἁπλοῦς πόλους, ὅμως ἐκτός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, καίτοι, ὡς ἔχει ἤδη ἀναφερθῆ εἰς τό προηγούμενον τμῆμα Γ4, ὁ τρόπος ἀντιμετωπίσεως ἁπλῶν πόλων τῆς πρός ὁλοκλήρωσιν συναρτήσεως οὐδόλως διαφέρει εἴτε οὗτοι εὑρίσκονται ἐκτός εἴτε ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, μέ συνέπειαν νά καθίσταται δυνατή ἡ ἐπέκτασις τῶν διαφόρων περιγραφομένων εἰς τά προαναφερθέντα ἄρθρα μεθόδων ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως καί εἰς τήν περίπτωσιν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων.

Γ6. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ RADAU ΚΑΙ LOBATTO ΕΙΣ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΝ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Διά τόν ἀριθμητικόν ὑπολογισμόν ὁλοκληρωμάτων συνήθως χρησιμοποιούμεναι μέθοδοι εἶναι πέραν τῆς μεθόδου GAUSS καί αἱ μέθοδοι RADAU καί LOBATTO. Ἐκ τούτων τήν μέθοδον GAUSS ἐπεξετείναμεν, ὥστε νά δύναται νά ἐφαρμοσθῇ καί δι' ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα, εἰς τό τμῆμα Γ4. Ἐνταῦθα θά πράξωμεν τό αὐτό καί διά τάς μεθόδους RADAU καί LOBATTO στηριζόμενοι εἰς τά ἐκτεθέντα εἰς τό προηγούμενον τμῆμα Γ5 διά τάς ἀριθμητικάς ὁλοκληρώσεις εἰς ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα.

Ἡ μέθοδος RADAU, ἀκριβής δι' ὁλοκληρουμένας συναρτήσεις πολυώνυμα μέχρι (2n-2) βαθμοῦ, ἔνθα n ὁ ἀριθμός τῶν χρησιμοποιουμένων σημείων, χαρακτηρίζεται ἐκ τοῦ ὅτι μεταξύ τῶν σημείων t_k τοῦ τύπου (5.2) περιλαμβάνεται καί τό ἕν ἐκ τῶν δύο ἄκρων α καί β τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως $[\alpha,\beta]$, ὁπότε τό πολυώνυμον $\sigma_n(z)$ θά εἶναι τῆς μορφῆς { BOUZITAT, 1952, § 3.1 } :

$$\sigma_n(z) = k\left\{ p_n(z)+cp_{n-1}(z) \right\}, \tag{1}$$

ἔνθα $p_n(z)$ καί $p_{n-1}(z)$ τά πολυώνυμα βαθμῶν n καί (n-1) ἀντιστοίχως τοῦ συστήματος τῶν ὀρθογωνίων πολυωνύμων διά τό διάστημα ὁλοκληρώσεως $[\alpha,\beta]$ καί διά τήν ὑφισταμένην συνάρτησιν βάρους, k αὐθαίρετος σταθερά καί c σταθερά τοιαύτη, ὥστε τό πολυώνυμον $\sigma_n(z)$ νά περιλαμβάνῃ μεταξύ τῶν ριζῶν του καί τό ἄκρον τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως α ἤ β, ὁπότε προκύπτει ἀντιστοίχως :

$$c_\alpha = -\frac{p_n(\alpha)}{p_{n-1}(\alpha)}, \qquad c_\beta = -\frac{p_n(\beta)}{p_{n-1}(\beta)} . \tag{2}$$

Ἤδη λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν σχέσεων (1) καί (2) δύνανται νά ἐφαρμοσθοῦν πλήρως τά ἀναφερόμενα εἰς τό τμῆμα Γ5

ἐπεκτεινομένης οὕτω τῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως RADAU καί διά τόν ἀριθμητικόν ὑπολογισμόν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων.

Διά νά ἐκτιμήσωμεν τέλος τήν ἀκρίβειαν τῆς μεθόδου ὁλοκληρώσεως RADAU, λαμβάνομεν ὑπ'ὄψιν τήν ταυτότητα { CODY, PACIOREK and THACHER Jr., 1970 } :

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z}\left\{\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{t}{z}\right)^k + \frac{(t/z)^{n-1}}{1-t/z}\right\}, \tag{3}$$

διαπιστοῦντες ὅτι λόγῳ καί τῆς ἐκφράσεως (1) τοῦ πολυωνύμου $\sigma_n(z)$ καί τῶν σχέσεων ὀρθογωνιότητος (4.3) τοῦ συστήματος τῶν πολυωνύμων $p_n(z)$, ἡ συνάρτησις $q_n(z)$ τοῦ τύπου (5.6) παρουσιάζει διά $z \to \infty$ συμπεριφοράν τῆς μορφῆς :

$$q_n(z) = O(z^{-n}). \tag{4}$$

Ἤδη παρατηροῦμεν βάσει τοῦ τύπου (5.8) ὅτι τό σφάλμα E_n τῆς μεθόδου RADAU καθίσταται μηδενικόν διά συναρτήσεις $f(z)$ τῆς μορφῆς (4.19) τοιαύτας, ὥστε ἡ συνάρτησις $g(z)$ νά εἶναι πολυώνυμον τό πολύ $(2n+m-2)$ βαθμοῦ, τῆς σταθερᾶς p τοῦ τύπου (5.9) ἐχούσης τήν τιμήν $2n$ διά τήν ἐξεταζομένην μέθοδον ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως RADAU. Διά $m = 0$, ἤτοι διά κοινά ὁλοκληρώματα, προκύπτει περαιτέρω ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι ἀκριβής δι'ὁλοκληρουμένας συναρτήσεις πολυώνυμα μέχρι καί $(2n-2)$ βαθμοῦ, ὡς εἶναι βεβαίως γνωστόν.

Θά ἐξετάσωμεν ἤδη καί τήν μέθοδον LOBATTO. Αὕτη εἶναι ἀκριβής, εἰς τήν περίπτωσιν κοινῶν ὁλοκληρωμάτων, δι ὁλοκληρουμένας συναρτήσεις πολυώνυμα μέχρι $(2n-3)$ βαθμοῦ, ἔνθα n ὁ ἀριθμός τῶν χρησιμοποιουμένων σημείων, χαρακτηρίζεται δέ ἐκτοῦ ὅτι μεταξύ τῶν σημείων t_k τοῦ τύπου (5.2) περιλαμβάνονται ἀμφότερα τά ἄκρα α καί β τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως $[\alpha,\beta]$, ὁπότε τό πολυώνυμον $\sigma_n(z)$ θά εἶναι τῆς μορφῆς { BOUZITAT, 1952, § 3.1 } :

$$\sigma_n(z) = k\left\{p_n(z)+cp_{n-1}(z)+dp_{n-2}(z)\right\}, \tag{5}$$

ἔνθα $p_n(z)$, $p_{n-1}(z)$ καί $p_{n-2}(z)$ τά πολυώνυμα βαθμῶν n, (n-1) καί (n-2) τοῦ προαναφερθέντος συστήματος ὀρθογωνίων πολυωνύμων, k αὐθαίρετος σταθερά καί c καί d σταθεραί τοιαῦται, ὥστε τό πολυώνυμον $\sigma_n(z)$ νά περιλαμβάνῃ μεταξύ τῶν ριζῶν του καί τά ἄκρα τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως α καί β, ὁπότε πρέπει νά πληροῦνται αἱ συνθῆκαι :

$$p_n(\alpha)+cp_{n-1}(\alpha)+dp_{n-2}(\alpha) = 0, \tag{6α}$$

$$p_n(\beta)+cp_{n-1}(\beta)+dp_{n-2}(\beta) = 0, \tag{6β}$$

ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτουν αἱ κάτωθι τιμαί τῶν σταθερῶν c καί d :

$$c = -\frac{p_n(\alpha)p_{n-2}(\beta)-p_n(\beta)p_{n-2}(\alpha)}{p_{n-1}(\alpha)p_{n-2}(\beta)-p_{n-1}(\beta)p_{n-2}(\alpha)}, \tag{7α}$$

$$d = +\frac{p_n(\alpha)p_{n-1}(\beta)-p_n(\beta)p_{n-1}(\alpha)}{p_{n-1}(\alpha)p_{n-2}(\beta)-p_{n-1}(\beta)p_{n-2}(\alpha)}. \tag{7β}$$

Ἤδη λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν σχέσεων (5) καί (7) δύνανται νά ἐφαρμοσθοῦν πλήρως τά ἀναφερόμενα εἰς τό τμῆμα Γ5 ἐπεκτεινομένης οὕτω τῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως LOBATTO καί διά τόν ἀριθμητικόν ὑπολογισμόν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων.

Διά νά ἐκτιμήσωμεν τέλος τήν ἀκρίβειαν τῆς μεθόδου ὁλοκληρώσεως LOBATTO, λαμβάνομεν ὑπ'ὄψιν τήν ταυτότητα (3), ὡς καί διά τήν μέθοδον RADAU ἐπράξαμεν, ἀλλ'ἀφοῦ ἀντικαταστήσωμεν τόν ἀκέραιον ἀριθμόν n διά τοῦ (n-1). Διαπιστοῦμεν περαιτέρω ὅτι, λόγῳ καί τῆς ἐκφράσεως (5) τοῦ πολυωνύμου $\sigma_n(z)$ καί τῶν σχέσεων ὀρθογωνιότητος (4.3) τοῦ συστήματος τῶν πολυωνύμων $p_n(z)$, ἡ συνάρτησις $q_n(z)$ τοῦ τύπου (5.6) παρουσιάζει διά $z \to \infty$ συμπεριφοράν τῆς μορφῆς :

$$q_n(z) = \mathcal{O}(z^{-n+1}). \tag{8}$$

Ἤδη παρατηροῦμεν βάσει τοῦ τύπου (5.8) ὅτι τό σφάλμα E_n τῆς μεθόδου LOBATTO καθίσταται μηδενικόν διά συναρτήσεις

f(z) τῆς μορφῆς (4.19) τοιαύτας, ὥστε ἡ συνάρτησις g(z) νά εἶναι πολυώνυμον τό πολύ (2n+m-3) βαθμοῦ, τῆς σταθερᾶς p τοῦ τύπου (5.9) ἐχούσης τήν τιμήν (2n-1) διά τήν ἐξεταζο - μένην μέθοδον ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως LOBATTO. Διά m = 0, ἤτοι διά κοινά ὁλοκληρώματα, προκύπτει περαιτέρω ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι ἀκριβής δι'ὁλοκληρουμένας συναρτήσεις πολυώνυμα μέχρι καί (2n-3) βαθμοῦ, ὡς εἶναι βεβαίως γνωστόν.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Αἱ ἐξετασθεῖσαι εἰς τό τμῆμα τοῦτο μέθοδοι ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως RADAU καί LOBATTO διά τυχόν διάστημα ὁλοκληρώσεως [α,β] καί ὡς ἐφαρμογαί τῆς ἀναπτυχθείσης εἰς τό προηγούμενον τμῆμα Γ5 γενικῆς μεθόδου ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων ἔχουν πλήρως μελετηθῆ διά τήν περίπτωσιν κοινῶν ὁλοκληρωμάτων. Μεταξύ τῶν σχετικῶν ἐργασιῶν δυνάμεθα νά ἀναφέρωμεν τό ἄρθρον τοῦ KAMBO {1971}, ὅστις ἀναπτύσσει τάς μεθόδους ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως RADAU καί LOBATTO καί προσδιορίζει τά σφάλματα τούτων μέ διάστημα ὁλοκληρώσεως τό [-1,1] καί κατά τρόπον ἐντελῶς ἀνάλογον τῆς ἐκτεθείσης εἰς τό τμῆμα Γ5 γενικωτέρας μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως. Ἐν τούτοις ὁ KAMBO δέν ἐξετάζει τήν περίπτωσιν, ὅπου ἡ πρός ὁλοκλήρωσιν συνάρτησις ἔχει ἁπλοῦς πόλους εἴτε ἐντός εἴτε ἐκτός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως [-1,1].

Δυνάμεθα τέλος νά παρατηρήσωμεν ὅτι αἱ μέθοδοι RADAU καί LOBATTO ἀποτελοῦν εἰδικάς περιπτώσεις τοῦ προβλήματος ἀναπτύξεως μεθόδων ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως μέ προκαθωρισμένας μίαν ἤ δύο τῶν χρησιμοποιουμένων τετμημένων. Τό γενικώτερον τοῦτο πρόβλημα μελετᾶται ὑπό τοῦ BOUZITAT {1952, §3}, τόν τρόπον ἐργασίας τοῦ ὁποίου ἐφηρμόσαμεν κατά τήν γενομένην εἰς τό τμῆμα τοῦτο καί ἀφορῶσαν εἰς τάς μεθόδους RADAU καί LOBATTO ἀνάπτυξιν.

Γ7. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Θεωρήσωμεν πρός έπίλυσιν τό σύστημα τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων :

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} w_i(t) K_{ik}(t,x) \varphi_i(t) dt = f_k(x), \quad \alpha_k < x < \beta_k,$$

$$k = 1,2,\ldots,m, \tag{1}$$

μέ δεδομένας τάς συναρτήσεις $f_k(x)$ καί ἀγνώστους τάς συναρτήσεις $\varphi_i(t)$ $(k,i = 1,2,\ldots,m)$, ἔνθα οἱ πυρῆνες $K_{ik}(t,x)$ θεωροῦνται μή παρουσιάζοντες ἰδιομορφίας τύπου CAUCHY ἐντός τῶν διαστημάτων ὁλοκληρώσεως. Αἱ ἄγνωστοι συναρτήσεις $\varphi_i(t)$ δυνατόν νά ὀφείλουν νά πληροῦν ὡσαύτως συνθήκας τῆς μορφῆς:

$$\sum_{i=1}^{m} c_{il} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} w_i(t) \varphi_i(t) dt = C_l, \quad l = 1,2,\ldots,o \quad 0 \leqq o \leqq m, \tag{2}$$

ἔνθα c_{il} καί C_l σταθεραί.

Πρός προσεγγιστικήν ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (1) ὑπό τάς συνθήκας (2) ἀντικαθιστῶμεν τά παρουσιαζόμενα ὁλοκληρώματα δι'ἀθροισμάτων κατά τήν μέθοδον ὁλοκληρώσεως GAUSS ἤ RADAU ἤ LOBATTO ἤ κατ'ἄλλην μέθοδον ὁλοκληρώσεως. Ἐάν A_{ji} εἶναι τά βάρη καί t_{ji} αἱ τετμημέναι κατά τήν ἐφαρμοζομένην μέθοδον μέ $i = 1,2,\ldots,m$ καί $j = 1,2,\ldots,n$, ἐξαρτώμεναι βεβαίως ἐκ τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως $[\alpha_i,\beta_i]$, τότε δυνάμεθα νά ἀντικαταστήσωμεν τό σύστημα τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (1) καί τάς συνθήκας (2) ὡς κάτωθι :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} A_{ji} K_{ik}(t_{ji},x) \varphi_i(t_{ji}) = f_k(x), \quad \alpha_k < x < \beta_k,$$

$$k = 1,2,\ldots,m, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_{il} \sum_{j=1}^{n_i} A_{ji} \varphi_i(t_{ji}) = C_l, \quad l = 1,2,\ldots,o. \tag{4}$$

Προκύπτει οὕτως ἕν σύστημα ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, τό ὁ-

ποῖον ἔχει $\sum_{i=1}^{m} n_i$ ἀγνώστους, τάς τιμάς τῶν συναρτήσεων $\varphi_i(t_{ji})$ μέ $i = 1,2,\ldots,m$ καί $j = 1,2,\ldots,n_i$, τῆς τιμῆς τοῦ n_i δυναμένης νά μεταβάλλεται μετά τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως $[\alpha_i,\beta_i]$. Πρός ἐξασφάλισιν ἐπαρκοῦς ἀριθμοῦ γραμμικῶν ἐξισώσεων δι'εὕρεσιν τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τάς ἐξισώσεις (3), ἰσχυούσας ὁπωσδήποτε διά πᾶσαν τιμήν τῆς μεταβλητῆς x ἐντός τῶν διαστημάτων $[\alpha_k,\beta_k]$, διά συγκεκριμένους ἀριθμούς h_k τῆς μεταβλητῆς x, x_{kh} $(h = 1,2,\ldots,h_k)$, ἐξαρτωμένους ἐκ τῶν διαστημάτων ὁλοκληρώσεως $[\alpha_k,\beta_k]$, ὁπότε τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (3) καί (4) ἀντικαθίσταται ὑπό τοῦ κάτωθι συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} A_{ji} K_{ik}(t_{ji},x_{kh})\varphi_i(t_{ji}) = f_k(x_{kh}),\ h = 1,2,\ldots,h_k,$$

$$k = 1,2,\ldots,m, \tag{5α}$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_{il} \sum_{j=1}^{n_i} A_{ji}\varphi_i(t_{ji}) = C_l,\quad l = 1,2,\ldots,o. \tag{5β}$$

Προκύπτει οὕτως ἓν σύστημα $(\sum_{k=1}^{m} h_k+o)$ γραμμικῶν ἐξισώσεων μέ $\sum_{i=1}^{m} n_i$ ἀγνώστους. Ἐάν οὕτω δέν ὑπάρχουν πρός πλήρωσιν αἱ ο συνθῆκαι (5β) ἐκλέγοντες : $h_k = n_k$ $(k = 1,2,\ldots,m)$ ἔχομεν τόν αὐτόν ἀριθμόν ἐξισώσεων καί ἀγνώστων καί δυνάμεθα ἐν γένει νά ἐπιλύσωμεν τό σύστημα τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων (5α). Ἐάν ὑφίστανται πρός πλήρωσιν καί αἱ συνθῆκαι (5β), δύνανται π.χ. νά ληφθοῦν : $h_k = (n_k-1)$ $(k = 1,2,\ldots,o)$ καί $h_k = n_k$ $(k = o+1, o+2,\ldots,m)$, ἵνα σχηματισθῇ πάλιν ὁ ὀρθός ἀριθμός ἐξισώσεων. Ἐν γένει εὐχερῶς δυνάμεθα νά ἐξασφαλίσωμεν τόν ἀπαιτούμενον ἀριθμόν γραμμικῶν ἐξισώσεων, ὥστε νά προσδιορίσωμεν τάς τιμάς τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων εἰς τά συγκεκριμένα σημεῖα τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς ἑκάστην τούτων διαστήματος ὁλοκληρώσεως.

Ἐάν ἤδη οἱ πυρῆνες $K_{ik}(t,x)$ θεωρηθοῦν παρουσιάζοντες ἰδιομορφίας τύπου CAUCHY τῆς μορφῆς (2.2) ἐντός τῶν διαστημάτων ὁλοκληρώσεως, τότε κατά τήν προσεγγιστικήν ἔκφρασιν

τῶν ὁλοκληρωμάτων πρέπει πλήν τῶν τεθέντων εἰς τάς ἐξισώσεις (3) καί (4) ὅρων νά εἰσαχθοῦν καί πρόσθετοι ὅροι ὀφειλόμενοι εἰς τάς ἰδιομορφίας τῶν πυρήνων $K_{ik}(t,x)$ διά $t = x$, οἵτινες κατά τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Γ5 θά εἶναι τῆς μορφῆς :

$$-\frac{2K_{1ik}(x,x)\varphi_i(x)q_i(x)}{\prod_{j=1}^{n_i}(x-t_{ji})}, \tag{6}$$

λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς θεωρηθείσης συμπεριφορᾶς (2.2) τῶν πυρήνων $K_{ik}(t,x)$. Ἡ ἔκφρασις (6) προϋποθέτει ἐπίσης ὅτι ἡ μεταβλητή x δέν συμπίπτει μέ τινα τῶν τετμημένων t_{ji} ($j = 1,2,\ldots,n_i$) εἰς τό διάστημα ὁλοκληρώσεως $[\alpha_i,\beta_i]$ ($i = 1,2,\ldots,m$), ὁπότε ἡ ἔκφρασις (6) καθίσταται ἔτι πολυπλοκωτέρα. Κατά ταῦτα δέν ἐπιτρέπεται νά ἐκλέξωμεν τά σημεῖα x_{kh} εἰς τό σύστημα τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων (5) τά αὐτά μέ τά σημεῖα t_{ji}. Ἐφαρμόζοντες ὅμως τάς ἐξισώσεις ταύτας δι' ἄλλας τιμάς τῆς μεταβλητῆς x οὐδέν ἐπιτυγχάνομεν, διότι εἰσάγομεν πέραν τῶν ἀγνώστων $\varphi_i(t_{ji})$ ($i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n_i$) ὡς νέους ἀγνώστους τάς τιμάς $\varphi_i(x)$ τῶν συναρτήσεων $\varphi_i(t)$ εἰς τά ἐκλεγόμενα σημεῖα x ἐντός τῶν διαστημάτων $[\alpha_i,\beta_i]$ ἑκάστην φοράν, ὅτε ἐφαρμόζομέν τινα τῶν ἐκ τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (1) προκυψασῶν διά τῶν μεθόδων τῆς προσεγγιστικῆς ὁλοκληρώσεως γραμμικῶν ἐξισώσεων (5α). Μόνη λύσις θά ἦτο νά ἐκφράσωμεν διά παρεμβολῆς τάς συναρτήσεις $\varphi_i(t)$ καθ' ὅλον τό μῆκος τῶν διαστημάτων $[\alpha_i,\beta_i]$ συναρτήσει τῶν ὑπό προσδιορισμόν τιμῶν των εἰς τά σημεῖα t_{ji}, ὁπότε αἱ τιμαί των $\varphi_i(x)$ θά ἠδύναντο νά ἐκφρασθοῦν συναρτήσει τῶν τιμῶν των $\varphi_i(t_{ji})$, χωρίς νά εἰσάγεται νέον ἄγνωστον μέγεθος μεθ' ἑκάστην ἐφαρμογήν μιᾶς τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων διά συγκεκριμένον σημεῖον x.

Τήν ἀνωτέρω μέθοδον ἐπιθυμοῦμεν νά ἀποφύγωμεν ὡς εἰσάγουσαν διά τῆς παρεμβολῆς σφάλματα ἀνωτέρας τάξεως τῶν ὀφειλομένων εἰς τάς προσεγγιστικάς ὁλοκληρώσεις κατά τάς μεθόδους GAUSS, RADAU ἤ LOBATTO, αἵτινες εἶναι ἀκριβεῖς διά πολυώνυμα ($2n_i-1$), ($2n_i-2$) καί ($2n_i-3$) βαθμῶν ἀντιστοίχως, τῆς

παρεμβολῆς οὔσης ἀκριβοῦς διά πολυώνυμα μέχρι (n_i-1) βαθμοῦ μόνον. Ἀφ' ἑτέρου ἡ μέθοδος τῆς παρεμβολῆς ἀπαιτεῖ πολυπλόκους ὑπολογισμούς κατά τήν ἐφαρμογήν της, ἐπίσης δέ ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν συναρτήσεων δευτέρου εἴδους $q_i(x)$ εἰς τάς θέσεις x πρός εἰσαγωγήν των εἰς τάς ἐκφράσεις (6) δέν εἶναι πολλάκις τόσον ἁπλῆ.

Κατά ταῦτα ἀπομένει ὡς μόνη δυνατή καί εὐχερής λύσις νά ἐξαφανίσωμεν τούς ὅρους τῆς μορφῆς (6) προκαλοῦντες μηδενισμόν τῶν συναρτήσεων $q_i(x)$ μέ τήν ἐκλογήν ὡς σημείων x_{ih} εἰς τά διαστήματα ὁλοκληρώσεως $[\alpha_i,\beta_i]$ τῶν ριζῶν τῶν συναρτήσεων $q_i(x)$ ἐντός τῶν διαστημάτων τούτων, αἵτινες ἐν γένει εἶναι ἐπαρκοῦς ἀριθμοῦ, ἤτοι (n_i-1) ἤ n_i, ὥστε νά μᾶς δώσουν τόν ἀριθμόν τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (5α), τόν ὁποῖον χρειαζόμεθα, ἵνα προσδιορίσωμεν τάς ζητουμένας τιμάς $\varphi_i(t_{ji})$ τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων. Κατ' αὐτόν τόν τρόπον αἱ ἰδιομορφίαι τῶν πυρήνων τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (1) οὐδόλως ἐνοχλοῦν, τοῦ προσεγγίζοντος τάς ἐξισώσεις ταύτας συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων (5α) μή ἐπηρεαζομένου εἰ μή κατά τήν ἐκλογήν τῶν τιμῶν x_{kh} ὡς :

$$q_k(x_{kh}) = 0. \tag{7}$$

Διά τῆς μεθόδου ταύτης ἡ ἐπίλυσις τοῦ συστήματος τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (1) γίνεται, ὡς ἐάν αὗται ἦσαν ἐξισώσεις ἄνευ ἰδιομορφιῶν τύπου CAUCHY. Τήν μέθοδον ταύτην θά ἐφαρμόσωμεν εἰς ὅλας τάς διδομένας εἰς τό Κεφάλαιον Δ ἐφαρμογάς ἐπί προβλημάτων ρωγμῶν, ἀξίζει δέ νά σημειωθῇ ὅτι αὕτη, καθ' ὅσον γνωρίζομεν, δέν ἔχει ἐφαρμοσθῆ μέχρι σήμερον, εἰ μή διά τήν ἐπίλυσιν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων μέ μέθοδον ὁλοκληρώσεως GAUSS - CHEBYSHEV, χωρίς ἐν τούτοις ἡ ἀπόδειξις τῶν χρησιμοποιουμένων τύπων, ἔστω καί διά τήν εἰδικήν ταύτην περίπτωσιν, οἵτινες τύποι εἶναι ἰσοδύναμοι τῶν ἐνταῦθα διδομένων, νά ἔχῃ στηριχθῇ εἰς τήν μέθοδον ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως τοῦ GAUSS.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Ἡ ἀναπτυχθεῖσα εἰς τό τμῆμα τοῦτο μέθοδος ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων δι' ἀναγωγῆς των κατόπιν προσεγγιστικῆς ἐκφράσεως τῶν ὁλοκληρωμάτων εἰς σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων παρουσιάζει ἔναντι τῶν ἀναφερθεισῶν εἰς τό τμῆμα Γ2 μεθόδων τά ἑξῆς πλεονεκτήματα:

Πρῶτον μέν εἶναι γενικωτάτου χαρακτῆρος δυναμένη νά ἐφαρμοσθῇ δι' οἱασδήποτε συναρτήσεις βάρους καί χρησιμοποιοῦσα τά σημεῖα καί τά βάρη τά προσδιορισθέντα διά τήν ἀντίστοιχον μέθοδον ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως διά κοινά ὁλοκληρώματα καί διά τήν αὐτήν συνάρτησιν βάρους. Δέν ἀπαιτεῖται οὕτως εἰδική ἀντιμετώπισις ἑκάστης παρουσιαζομένης περιπτώσεως.

Δεύτερον δέ εἶναι λίαν ἀκριβής, καθ' ὅσον ὁ ἀριθμητικός ὑπολογισμός τῶν ὁλοκληρωμάτων δύναται νά γίνῃ διά τῶν μεθόδων ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS, RADAU ἤ LOBATTO, χαρακτηριστικόν τῶν ὁποίων εἶναι ἡ λίαν ὑψηλή ἀκρίβειά των.

Τρίτον τέλος δέν ἀπαιτεῖ τήν χρῆσιν τῆς μεθόδου τῆς παρεμβολῆς διά τόν προσδιορισμόν τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων εἰς συγκεκριμένα σημεῖα, ὡς π.χ. εἰς τά ἄκρα τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως. Πρέπει βεβαίως νά χρησιμοποιοῦνται πρός τοῦτο αἱ κατάλληλοι μέθοδοι ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως αἱ περιλαμβάνουσαι μεταξύ τῶν σημείων των καί τά σημεῖα, εἰς τά ὁποῖα εἶναι ἐπιθυμητή ἡ εὕρεσις τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων. Τούτου χρῆσις γίνεται εἰς τάς εἰς τό Κεφάλαιον Δ διδομένας ἐφαρμογάς, ὅπου ζητοῦνται οἱ συντελεσταί ἐντάσεως τῶν τάσεων παρά τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν, ἀνάλογοι τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων εἰς τά ἄκρα ταῦτα. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν χρησιμοποιοῦνται κυρίως αἱ μέθοδοι ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως RADAU καί LOBATTO, αἵτινες περιλαμβάνουν μεταξύ τῶν σημείων των τό ἕν ἤ ἀμφότερα τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς ἀντιστοίχως μέ ἀποτέλεσμα νά μή ἀπαιτῆται κατά τά προαναφερθέντα παρεμβολή, ἤ μᾶλλον προεκβολή, πρός προσδιορισμόν τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων. Μόνον εἰς τάς περιπτώσεις, εἰς τάς ὁποίας εἶναι

ἐπιθυμητή ἡ ἐπίδειξις τῆς μεθόδου τῆς παρεμβολῆς, χρησιμοποιεῖται ἡ μέθοδος ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS.

Βεβαίως πρέπει νά σημειωθῇ ὅτι, ἐάν εἶναι ἐπιθυμητός ὁ προσδιορισμός τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων καθ' ὅλον τό μῆκος τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, τότε ἡ χρῆσις τῆς μεθόδου τῆς παρεμβολῆς, ἥτις καί ἀναπτύσσεται εἰς τό ἑπόμενον τμῆμα Γ8, καθίσταται ἀναπόφευκτος. Τό αὐτό ἐπίσης ἰσχύει καί διά τήν περίπτωσιν, ὅπου αἱ ἄγνωστοι συναρτήσεις ἑνός συστήματος ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων ἐμφανίζονται ὄχι μόνον ἐντός ὁλοκληρωμάτων, ὡς ἐθεωρήθη κατά τήν ἀνάπτυξιν τοῦ παρόντος τμήματος, ἀλλά καί ἐκτός τούτων. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην, ἥτις δέν εἶναι συνήθης κατά τήν ἀντιμετώπισιν προβλημάτων ρωγμῶν, παρουσιαζομένη μόνον εἰς προβλήματα συνθέτων μέσων ἤ εἰς μικτά θεμελιώδη προβλήματα, ἀπαιτεῖται ὁ προσδιορισμός τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων εἰς τά σημεῖα ἐφαρμογῆς x_{kh} τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων βάσει τῶν τιμῶν των εἰς τά σημεῖα t_{ji} τῆς χρησιμοποιουμένης μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως. Αἱ τελευταῖαι αὗται τιμαί θά εἶναι αἱ τελικῶς προκύπτουσαι ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων τοῦ προσεγγίζοντος τό σύστημα τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων.

Δύναται τέλος νά σημειωθῇ ὅτι, λόγῳ τοῦ τύπου (5.7), αἱ συναρτήσεις $\sigma_n(z)$ δέν δύνανται νά ἔχουν κοινήν ρίζαν t_k μέ τάς ἀντιστοίχους των συναρτήσεις $\sigma_n(z)$, πλήν ἐάν τό βάρος A_k τό ἀντιστοιχοῦν εἰς τό σημεῖον t_k εἶναι μηδέν. Τοῦτο ὅμως δέν συμβαίνει, ὡς δύναται νά διαπιστωθῇ ἐκ τῶν διδόντων τά βάρη τύπων, δι' ὅλας τάς θεωρουμένας εἰς τό τμῆμα Γ9 μεθόδους ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως, εἰς τάς ὁποίας ὅλα τά βάρη A_k εἶναι θετικοί ἀριθμοί. Περαιτέρω δέ, ἐάν ἡ συνάρτησις βάρους $w(t)$ δέν λαμβάνῃ ἀρνητικάς τιμάς ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, τά προκύπτοντα κατά τήν μέθοδον ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS βάρη A_k εἶναι ὁπωσδήποτε θετικοί ἀριθμοί καί οὐχί μηδέν, ὡς διεπιστώθη ὑπό τοῦ HILDEBRAND (1956).

Γ8. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΕΙΣ ΤΙ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΕΚ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΕΙΣ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ ΣΗΜΕΙΑ ΔΙΑ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Διά τῆς κατά τά ἀνωτέρω ἐκτεθείσης προσεγγιστικῆς ἐπιλύσεως μιᾶς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (ἤ ἑνός συστήματος ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων) δι' ἀναγωγῆς εἰς ἕν γραμμικόν σύστημα ἐξισώσεων προσδιορίζομεν τήν ἄγνωστον συνάρτησιν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως εἰς ἕν γενικῶς καθωρισμένον σύνολον σημείων ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως $[\alpha,\beta]$. Τά σημεῖα ταῦτα t_k $(k = 1, 2,\ldots,n)$ συμπίπτουν κατά τά προαναφερθέντα διά τήν μέθοδον προσεγγιστικοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ὁλοκληρωμάτων GAUSS μέ τάς ρίζας τοῦ πολυωνύμου $p_n(z)$, δηλαδή τοῦ n-στοῦ βαθμοῦ πολυωνύμου τοῦ συστήματος τῶν ὀρθογωνίων πολυωνύμων ὡς πρός τήν ὑπάρχουσαν συνάρτησιν βάρους $w(t)$ καί τό διάστημα ὁλοκληρώσεως $[\alpha,\beta]$. Εἰς περίπτωσιν χρησιμοποιήσεως τῆς μεθόδου προσεγγιστικοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ὁλοκληρωμάτων RADAU ἤ LOBATTO ἐπιτυγχάνομεν τό ἕν ἐκ τῶν δύο ἄκρων (α καί β) τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως ἤ ἀμφότερα τά ἄκρα ταῦτα ἀντιστοίχως νά περιλαμβάνωνται μεταξύ τῶν σημείων t_k, ἐφ' ὅσον ἐνδιαφερόμεθα διά τήν ἄμεσον εὕρεσιν τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως εἰς τό ἕν ἄκρον ἤ ἀμφότερα τά ἄκρα τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως. Ἐν πάσῃ περιπτώσει γενικῶς ἀντιμετωπίζεται τό πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως $f(t)$, τήν ὁποίαν θεωροῦμεν ὑπολογισθεῖσαν εἰς τά σημεῖα t_k, καθ' ὅλον τό μῆκος τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, ἵνα ἔχωμεν τήν δυνατότητα ὑπολογισμοῦ ταύτης εἰς οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως ἡμεῖς ἐπιθυμοῦμεν. Ταῦτα ἐπιτυγχάνονται διά χρησιμοποιήσεως τῆς μεθόδου τῆς παρεμβολῆς, ἀποτελοῦν δέ τό τελευταῖον στάδιον τῆς προσεγγιστικῆς ἐπιλύσεως τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως.

Κατά τά ἀνωτέρω ἐπιθυμοῦμεν προσέγγισιν τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως $f(t)$, τῆς ὁποίας γνωρίζομεν τάς τιμάς $f(t_k)$ εἰς

τά σημεῖα t_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ βάσει τοῦ τύπου :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k p_k(t), \tag{1}$$

ἔνθα c_k $(k = 0,1,\ldots,n-1)$ προσδιοριστέοι συντελεσταί καί $p_k(t)$ τά ὀρθογώνια πολυώνυμα ὡς πρός τό θεωρούμενον διάστημα ὁλοκληρώσεως $[\alpha,\beta]$ καί τήν συνάρτησιν βάρους $w(t)$ ὑπακούοντα εἰς τάς σχέσεις (4.3) καί (4.4). Οἱ συντελεσταί c_k διά τήν μέθοδον ὁλοκληρώσεως GAUSS προσδιορίζονται ἐκ τῶν σχέσεων :

$$c_k = \frac{1}{h_k}\sum_{i=1}^{n} A_i p_k(t_i) f(t_i), \quad k = 0,1,\ldots,n-1. \tag{2}$$

Αἱ σχέσεις αὗται δίδονται ὑπό τῶν PAGET and ELLIOTT {1972, §3 καί 4}. Ἀνωτέρω ἡ παρεμβολή γίνεται μέ βάσιν τό ἴδιον σύστημα ὀρθογωνίων πολυωνύμων, τό ὁποῖον ἐχρησιμοποιήθη καί διά τήν προσεγγιστικήν ὁλοκλήρωσιν. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἕν πολυώνυμον $p_k(t)$ δύναται νά τεθῇ ὑπό τήν μορφήν:

$$p_k(t) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} t^j, \tag{3}$$

ἔνθα α_{kj} γνωσταί σταθεραί, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἔκφρασις (1) λόγῳ τῆς (3) δύναται νά γραφῇ ὡς κάτωθι :

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \sum_{k=j}^{n-1} c_k \alpha_{kj} \right\} t^j, \tag{4}$$

δηλαδή ἡ συνάρτησις $f(t)$ ἐκφράζεται σαφέστερον ὡς πολυώνυμον βαθμοῦ $(n-1)$, ἐφ' ὅσον ἡ προσεγγιστική ὁλοκλήρωσις GAUSS ἔλαβε χώραν μέ n σημεῖα.

Ἀριθμητικάς ἐφαρμογάς τῶν ἀνωτέρω τύπων θά συναντήσωμεν κατά τόν ὑπολογισμόν τῶν συντελεστῶν συγκεντρώσεως τάσεων εἰς τά ἄκρα ρωγμῶν, ὁσάκις ὁ προσδιορισμός τῆς συναρτήσεως μεταστάσεων γίνεται διά τῆς μεθόδου GAUSS, ὅτε δέν ἔχομεν ἅμα τῇ ἐπιλύσει τοῦ συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων τάς τιμάς της εἰς τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς.

Εἰς περίπτωσιν χρησιμοποιήσεως τῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως RADAU, ὁπότε ἕν τῶν σημείων t_k $(k = 1,2,\ldots,n)$

συμπίπτει μέ ἕν τῶν ἄκρων α ἤ β τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, δεχόμενοι πάλιν τήν ἔκφρασιν (1) ἤ τήν ἰσοδύναμον ταύτης (4) διά τήν συνάρτησιν f(t), παρατηροῦμεν ὅτι ὁ τύπος (4.3) δι'ἀντικαταστάσεως τοῦ ὁλοκληρώματος ὑπό ἀθροίσματος κατά τήν μέθοδον ὁλοκληρώσεως RADAU δίδει :

$$\sum_{k=1}^{n} A_k p_j(t_k) p_m(t_k) = \begin{cases} 0, & \text{διά } j \neq m \\ h_j, & \text{διά } j = m \end{cases}, \qquad (5)$$

αἱ δέ ἐκφράσεις (5) εἶναι ἀκριβεῖς, ἐφ'ὅσον $j+m \leqq 2n-2$ καθ' ὅσον ἡ μέθοδος ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως RADAU εἶναι ἀκριβής διά πολυώνυμα μέχρι βαθμοῦ (2n-2). Θέτοντες ἀκολούθως εἰς τήν ἔκφρασιν (1) $t = t_i$, πολλαπλασιάζοντες καί τά δύο μέλη της ἐπί $A_i p_k(t_i)$ καί ἀκολούθως ἀθροίζοντες κατά μέλη ἀπό $i = 1$ ἕως $i = n$, λαμβάνοντες ταύτοχρόνως ὑπ'ὄψιν τάς σχέσεις (5), καταλήγομεν πάλιν εἰς τούς τύπους (2) ὡς καί εἰς τήν μέθοδον προσεγγιστικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS.

Τέλος εἰς περίπτωσιν χρησιμοποιήσεως τῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως LOBATTO, ὁπότε δύο τῶν σημείων t_k ($k = 1,2,\ldots,n$) συμπίπτουν μέ τά ἄκρα α καί β τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, δεχόμεθα πάλιν τήν ἔκφρασιν (1) ἤ τήν ἰσοδύναμον ταύτης (4) διά τήν συνάρτησιν f(t). Δεδομένου ὅμως ὅτι ἡ μέθοδος ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως LOBATTO εἶναι ἀκριβής δι'ὁλοκληρουμένας συναρτήσεις πολυώνυμα μέχρι βαθμοῦ (2n-3), ἕπεται ὅτι αἱ σχέσεις (5) ἰσχύουν, ἐφ' ὅσον $j+m \leqq 2n-3$. Ἐργαζόμενοι περαιτέρω ὡς καί εἰς τήν προηγουμένως ἐξετασθεῖσαν περίπτωσιν τῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως RADAU, καταλήγομεν καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως LOBATTO εἰς τόν τύπον (2) διά τόν προσδιορισμόν τῶν (n-1) πρώτων συντελεστῶν c_k ($k = 0,1,\ldots,n-2$), ὅστις ὅμως δέν ἰσχύει διά $k = n-1$, λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ μέθοδος LOBATTO δέν εἶναι ἀκριβής δι'ὁλοκληρουμένας συναρτήσεις πολυώνυμα 2(n-1) βαθμοῦ.

Τήν δυσχέρειαν ταύτην δυνάμεθα νά ὑπερνικήσωμεν ἐργαζόμενοι ὡς ἐξῆς : Γράφομεν τήν ἔκφρασιν (1) ὑπό τήν μορφήν:

$$f(t)-c_l p_l(t) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq l}}^{n-1} c_k p_k(t), \quad l = 0,1,\ldots,n-1. \tag{6}$$

Πολλαπλασιάζομεν περαιτέρω άμφότερα τά μέλη τῆς σχέσεως (6) έπί $w(t)p_l(t)$, ἔνθα $w(t)$ ἡ συνάρτησις βάρους, καί ὁλοκληροῦμεν ἐντός τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$ κατά τήν μέθοδον LOBATTO λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν ὅτι τό σύστημα τῶν πολυωνύμων $p_l(t)$ εἶναι τό σύστημα τῶν ὀρθογωνίων πολυωνύμων μέ διάστημα ὁλοκληρώσεως τό $[\alpha,\beta]$ καί συνάρτησιν βάρους τήν $w(t)$. Δεδομένου δέ ὅτι ἡ μέθοδος ὁλοκληρώσεως LOBATTO εἶναι ἀκριβής δι'ὁλοκληρουμένας συναρτήσεις πολυώνυμα μέχρι καί $(2n-3)$ βαθμοῦ, ἔπεται ὅτι αἱ προαναφερθεῖσαι ἀριθμητικαί ὁλοκληρώσεις κατά τήν μέθοδον LOBATTO θά εἶναι ἀκριβεῖς δι'ὅλας τάς τιμάς τοῦ l ἀπό 0 ἕως καί $(n-1)$, ὁπότε προκύπτουν διά τούς συντελεστάς c_l οἱ τύποι :

$$c_l = \sum_{i=1}^{n} A_i p_l(t_i) f(t_i) \;/\; \sum_{i=1}^{n} A_i p_l^{\,2}(t_i),$$

$$l = 1,2,\ldots,n-1, \tag{7}$$

οἵτινες λόγῳ καί τῶν σχέσεων (5) συμπίπτουν μετά τῶν (2) διά $l = 0,1,\ldots,n-2$. Διά $l = n-1$ πρέπει πάντως νά χρησιμοποιηθῇ ὁ τύπος (7) πρός προσδιορισμόν τοῦ συντελεστοῦ c_{n-1}, τοῦ τύπου (2) μή ἰσχύοντος διά τήν τιμήν ταύτην τοῦ l.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Τό ἐξετασθέν εἰς τό τμῆμα τοῦτο πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ συναρτήσεως εἰς τι διάστημα ἐκ τῶν τιμῶν της εἰς συγκεκριμένα σημεῖα τοῦ διαστήματος διά παρεμβολῆς εἶναι πρόβλημα μελετηθέν καί ἐπιλυθέν ἀπό πολλῶν ἐτῶν. Ἡμεῖς ἐνταῦθα ἐδώσαμεν τούς σχετικούς τύπους ἐν συνδυασμῷ μάλιστα μέ τάς κυρίως χρησιμοποιουμένας μεθόδους ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως.

Μεταξύ τῶν ἀσχοληθέντων μέ τό πρόβλημα τοῦτο δυνάμεθα νά ἀναφέρωμεν τούς FOX and PARKER {1968}, οἵτινες ἐθεώρησαν μόνον τήν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ ζητουμένη συνάρτησις ἐκφράζεται συναρτήσει τῶν τιμῶν της εἰς συγκεκριμένα ση-

μεῖα τῇ χρήσει πολυωνύμων CHEBYSHEV, τούς PAGET and ELLIOTT {1972}, οἵτινες, ὡς ἀνεφέρθη ἤδη, ἐθεώρησαν ἀνάπτυξιν τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως εἰς τυχόν σύστημα ὀρθογωνίων πολυωνύμων, τούς DMOWSKA and KOSTROV {1973}, οἵτινες ἐπιλύσαντες μίαν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν διά τῆς μεθόδου GAUSS-CHEBYSHEV, προσδιώρισαν ἀκολούθως τήν ἄγνωστον συνάρτησιν καθ' ὅλον τό μῆκος τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως καί εἰδικώτερον εἰς τά ἄκρα τούτου διά παρεμβολῆς, καί τέλος τόν KRENK {1975B}, ὅστις ἐθεώρησε τάς περιπτώσεις ἀναπτύξεως τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως τόσον εἰς σειράν πολυωνύμων CHEBYSHEV ὅσον καί εἰς σειράν πολυωνύμων JACOBI γενικώτερον, εἰς δέ τήν περίπτωσιν τῆς χρήσεως τῶν πολυωνύμων CHEBYSHEV προσδιώρισεν εἰδικώτερον τάς τιμάς τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως εἰς τά ἄκρα τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως. Δέον νά παρατηρηθῇ τέλος ὅτι διά τόν προσδιορισμόν τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως εἰς τά ἄκρα τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως [-1,1] ἐκ τῶν τιμῶν της εἰς τάς τετμημένας τῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS-CHEBYSHEV, οἱ διδόμενοι ὑπό τῶν DMOWSKA and KOSTROV {1973} τύποι περιέχουν σφάλμα, ὀρθοί δέ εἶναι οἱ διδόμενοι ὑπό τοῦ KRENK {1975B}, παρ' ὅλον ὅτι εἶναι ἐκπεφρασμένοι ὑπό μᾶλλον δύσχρηστον μορφήν.

Γ9. ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΑΥΤΩΝ

Διά τήν ἐπίλυσιν μιᾶς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως ἤ ἑνός συστήματος ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (7.1) ἀπαιτεῖται ὅπως γνωρίζωμεν δι' ἕκαστον διάστημα ὁλοκληρώσεως (α_i, β_i) πέραν τῆς συναρτήσεως βάρους $w_i(t)$ τά σημεῖα t_{ji} καί τά βάρη A_{ji} τῆς μεθόδου προσεγγιστικῆς ὁλοκληρώσεως, τήν ὁποίαν κρίνομεν ὀρθόν νά χρησιμοποιήσωμεν (π. χ. GAUSS, RADAU ἤ LOBATTO) διά τό θεωρούμενον διάστημα ὁλοκληρώσεως καί συνάρτησιν βάρους, ἀφ' ἑτέρου δέ τά σημεῖα x_{kh} ἑκάστου διαστήματος ὁλοκληρώσεως, εἰς τά ὁποῖα πρέπει νά ἐφαρμόσωμεν ἑκάστην ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος (7.1), ἵνα χρησιμοποιοῦντες τούς τύπους προσεγγιστικῆς ὁλοκληρώσεως τούς ἰσχύοντας διά συνήθη ὁλοκληρώματα διά τά ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα μή εἰσαγάγωμεν οἱονδήποτε πρόσθετον σφάλμα. Καί ὅσον ἀφορᾷ μέν εἰς τά σημεῖα t_{ji} καί τά βάρη A_{ji} ταῦτα μή ἐπηρεαζόμενα ἐκ τῶν ἰδιομορφιῶν τῶν πρός ὁλοκλήρωσιν συναρτήσεων εἶναι τά ἰσχύοντα διά συνήθη ὁλοκληρώματα καί δύνανται εὐκόλως νά εὑρεθοῦν, π.χ. εἰς τάς παραπομπάς τάς δοθείσας εἰς τό τμῆμα Γ1. Ἐνταῦθα θά μᾶς ἀπασχολήσῃ τό θέμα τῆς εὑρέσεως τῶν σημείων x_{kh}, εἰς τά ὁποῖα θά ἐφαρμόσωμεν τάς ἰδιομόρφους ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (7.1) καί τά ὁποῖα προκύπτουν ὡς ρίζαι τῶν συναρτήσεων (5.6) ἐξαρτωμένων ἐκ τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως (α_i, β_i), τῆς συναρτήσεως βάρους $w_i(t)$ καί τῶν σημείων t_{ji} τῶν χρησιμοποιουμένων διά τήν κατά προσέγγισιν ἀντικατάστασιν τοῦ ὁλοκληρώματος ὑπό ἀθροίσματος ἐξαρτωμένων πέραν τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως καί τῆς συναρτήσεως βάρους καί ἐκ τῆς χρησιμοποιουμένης μεθόδου προσεγγιστικῆς ὁλοκληρώσεως.

Κατωτέρω θά ἐξετάσωμεν τάς συνηθεστέρας περιπτώσεις ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων παρουσιαζομένων εἰς πρός ἐπίλυσιν ἰδιομόρφους ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις. Ταῦτα χαρακτηρίζονται

ὑπό τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως (α,β), τῆς συναρτήσεως βάρους w(t), τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σημείων n διά τήν προσεγγιστικήν ἀντικατάστασιν τοῦ ὁλοκληρώματος ὑπό ἀθροίσματος, ὁ ὁποῖος συνήθως λαμβάνεται ἴσος μέ 5 ἤ 10, τῶν σημείων t_i καί τῶν βαρῶν A_i $(i = 1,2,\ldots,n)$, ἅτινα δύνανται νά εὑρεθοῦν ἐκ πινάκων τῶν δοθεισῶν εἰς τό τμῆμα Γ1 παραπομπῶν καί τῶν σημείων x_k, ἅτινα θά προσδιορίσωμεν ὡς ρίζας τοῦ ἰδιομόρφου ὁλοκληρώματος $q_n(z)$ τοῦ τύπου (5.6).

Ἑκάστη περίπτωσις χαρακτηρίζεται ὑπό τοῦ ὀνόματος, τό ὁποῖον φέρει ἡ χρησιμοποιουμένη μέθοδος ὁλοκληρώσεως (π.χ. GAUSS, RADAU ἤ LOBATTO) καί ἐκ τοῦ ὀνόματος, τό ὁποῖον φέρουν τά χρησιμοποιούμενα ὀρθογώνια πολυώνυμα (π.χ. LEGENDRE, JACOBI, CHEBYSHEV, LAGUERRE ἤ HERMITE) εἰς τό θεωρούμενον διάστημα ὁλοκληρώσεως καί μέ τήν ὑπάρχουσαν συνάρτησιν βάρους. Σημειοῦται ὅτι τάς μεθόδους ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS, RADAU καί LOBATTO ἀνεπτύξαμεν εἰς τά τμήματα Γ4, Γ5 καί Γ6. Ἐνταῦθα θά ἀναζητήσωμεν κατά κύριον λόγον τά σημεῖα x_k ρίζας τῶν συναρτήσεων $q_n(z)$, εἰς τά ὁποῖα πρέπει νά ἐφαρμόζωμεν τάς ἑκάστοτε παρουσιαζομένας ἰδιομόρφους ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις ἤ συστήματα τοιούτων ἐξισώσεων κατά τά ἀναφερόμενα εἰς τό τμῆμα Γ7.

Δέον νά σημειωθῇ ὅτι οἱ κατωτέρω διδόμενοι πίνακες σημείων x_k, ριζῶν τῶν συναρτήσεων $q_n(z)$, καίτοι λίαν ἐλλιπεῖς καί μικρᾶς ἀκριβείας, ἐν τούτοις ἀποτελοῦν τήν βάσιν, ἐπί τῆς ὁποίας θά στηριχθοῦν ὁπωσδήποτε εἰς τό ἄμεσον μέλλον πληρέστατοι καί μεγάλης ἀκριβείας πίνακες τῶν σημείων τούτων ἀποτελοῦντες ἀναπόσπαστον τμῆμα κάθε σειρᾶς πινάκων ἀναφερομένων εἰς ἀριθμητικάς ὁλοκληρώσεις.

A. Μέθοδος GAUSS - LEGENDRE : Ἡ μέθοδος αὕτη δύναται νά ἐφαρμοσθῇ δι' ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα μέ διάστημα ὁλοκληρώσεως [-1,1] καί συνάρτησιν βάρους :

$$w(t) = 1. \tag{1}$$

Τά χρησιμοποιούμενα ὀρθογώνια πολυώνυμα $p_n(z)$ τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Γ4 καί συμπίπτοντα μέ τά πολυώνυμα $\sigma_n(z)$ τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Γ5 εἶναι τά πολυώνυμα LEGENDRE $P_n(z)$ ἤτοι :

$$\sigma_n(z) = p_n(z) = P_n(z), \tag{2}$$

αἱ δέ συναρτήσεις $q_n(z)$ διδόμεναι βάσει τοῦ τύπου (4.13) ἤ τοῦ τύπου (5.6) εἶναι αἱ συναρτήσεις LEGENDRE δευτέρου εἴδους $Q_n(z)$ {HUNTER, 1972} ἤτοι :

$$q_n(z) = Q_n(z). \tag{3}$$

Αἱ συναρτήσεις αὗται ἔχουν ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως $[-1,1]$ $(n+1)$ ρίζας x_k, αἵτινες κεῖνται ἀνά μία ἐντός ἑκάστου τῶν $(n+1)$ διαστημάτων, εἰς τά ὁποῖα χωρίζουν τό διάστημα ὁλοκληρώσεως $[-1,1]$ αἱ n ρίζαι t_i τῶν ἀντιστοίχων πολυωνύμων LEGENDRE $P_n(z)$ συμφώνως πρός ἓν θεώρημα διδόμενον ὑπό τοῦ SZEGÖ {1959, § 6.9} . Ἰσχύει δηλαδή :

$$-1 < x_1 < t_1 < x_2 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < x_n < t_n < x_{n+1} < 1. \tag{4}$$

Ἐπειδή ἐπίσης αἱ συναρτήσεις $Q_n(z)$ εἶναι ἤ ἄρτιαι ἤ περιττάι, ἕπεται ὅτι αἱ ρίζαι τούτων x_k θά ἐμφανίζωνται κατά ζεύγη ἀντιθέτων ριζῶν πλήν τῆς ρίζης : $x_k = 0$, ἐφ'ὅσον τό σημεῖον 0 ἀποτελεῖ ρίζαν τῆς συναρτήσεως $Q_n(z)$.

Περί τῶν συναρτήσεων LEGENDRE δευτέρου εἴδους $Q_n(z)$ δύναταί τις νά ἀνεύρῃ πληροφορίας καί πίνακας εἰς τό ἄρθρον τῆς STEGUN { 1965} . Οἱ διδόμενοι πίνακες ἀφοροῦν εἰς τάς τιμάς : $n = 0,1,2,3,9$ καί 10 καί εἰς τό διάστημα ὁλοκληρώσεως $[-1,1]$ μέ : $z = x = 0(0,01)1$, δίδουν δέ τιμάς τῶν συναρτήσεων $Q_n(z)$ μέ ὀκτώ δεκαδικά ψηφία. Στηριζόμενοι εἰς τούς ἀναδρομικούς τύπους διά τάς συναρτήσεις LEGENDRE δευτέρου εἴδους {STEGUN, 1965} :

$$nQ_n(z) = (2n-1)zQ_{n-1}(z)-(n-1)Q_{n-2}(z), \tag{5}$$

ἰσχύοντας καί διά τά πολυώνυμα LEGENDRE $P_n(z)$, καί λαμβάνοντες περαιτέρω ὑπ'ὄψιν ὅτι :

$$Q_o(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1}, \qquad Q_1(z) = \frac{z}{2}\ln\frac{z+1}{z-1}-1 \tag{6}$$

καί ἐπίσης ὅτι :

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}\left[Q_n^{+}(x)+Q_n^{-}(x)\right], \qquad -1 < x < 1, \tag{7}$$

ἐσχηματίσαμεν πληρεστέρους πίνακας τιμῶν τῶν συναρτήσεων LEGENDRE δευτέρου εἴδους $Q_n(z)$ διά $n = 0(1)23$ καί $z = x = 0(0,01)1$ ἔχοντας ἀκρίβειαν ἐξ ψηφίων (λόγῳ περιωρισμένων δυνατοτήτων τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ). Τούς πίνακας τούτους δέν θεωροῦμεν σκόπιμον νά δώσωμεν ἐνταῦθα, ἐχρησιμοποιήσαμεν ὅμως βοηθητικῶς διά τήν εὕρεσιν τῶν ριζῶν x_k τῶν συναρτήσεων $Q_n(z)$ ἐντός τοῦ διαστήματος $[-1,1]$. Τάς μή ἀρνητικάς ἐκ τῶν ριζῶν τούτων x_k δίδομεν εἰς τήν πρώτην στήλην τοῦ Πίνακος 1 διά $n = 0(1)21$ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ θετικαί καί ἀρνητικαί ρίζαι x_k ἐμφανίζονται, ὡς προανεφέρθη, κατά ζεύγη ἀντιθέτων ριζῶν. Αἱ ρίζαι αὗται x_k δίδονται μέ ἀκρίβειαν ἐξ δεκαδικῶν ψηφίων, ἐπαρκῆ διά τάς ἐφαρμογάς τοῦ ἐπομένου Κεφαλαίου Δ, ἀλλ'ἐντελῶς ἀνεπαρκῆ ἐν συγκρίσει μέ τήν ἀκρίβειαν, μέ τήν ὁποίαν δίδονται συνήθως τά σημεῖα t_i καί τά βάρη A_i τά χρησιμοποιούμενα εἰς τήν μέθοδον ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS - LEGENDRE.

B. Τροποποιημένη μέθοδος GAUSS - LEGENDRE : Ἡ μέθοδος αὕτη δύναται νά ἐφαρμοσθῇ δι'ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα μέ διάστημα ὁλοκληρώσεως $[0,1]$ καί συνάρτησιν βάρους :

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}. \tag{8}$$

Τά χρησιμοποιούμενα ὀρθογώνια πολυώνυμα $p_n(z)$ τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Γ4 καί συμπίπτοντα μέ τά πολυώνυμα $\sigma_n(z)$ τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Γ5 δίδονται βάσει τῶν πολυωνύμων LEGENDRE $P_n(z)$ κατά τόν τύπον {BOUZITAT, 1952, § 4.31} :

ΠΙΝΑΞ 1

Σημεῖα $\pm x_k$ δι'ἐφαρμογήν τῆς μεθόδου GAUSS-LEGENDRE ἤ τῶν τροποποιημένων μεθόδων GAUSS-LEGENDRE.

n = 0	n′ = 0	n′ = 0
0,000000	0,000000	1,000000
n = 1	n″ = 1	n″ = 1
0,833557	0,694817	0,305183
n = 2	n′ = 1	n′ = 1
0,000000	0,000000	1,000000
0,937612	0,879117	0,120883
n = 3	n″ = 2	n″ = 2
0,429707	0,184649	0,815351
0,967802	0,936641	0,0633589
n = 4	n′ = 2	n′ = 2
0,000000	0,000000	1,000000
0,639003	0,408325	0,591675
0,980429	0,961241	0,0387589
n = 5	n″ = 3	n″ = 3
0,280595	0,0787335	0,921267
0,752756	0,566641	0,433359
0,986867	0,973906	0,0260937
n = 6	n′ = 3	n′ = 3
0,000000	0,000000	1,000000
0,463374	0,214716	0,785284
0,820643	0,673455	0,326545
0,990584	0,981257	0,0187434
n = 7	n″ = 4	n″ = 4
0,207455	0,0430377	0,956962
0,586501	0,343983	0,656017
0,864172	0,746793	0,253207
0,992921	0,985893	0,0141074

n = 8	n′ = 4	n′ = 4
0,000000	0,000000	1,000000
0,360623	0,130049	0,869951
0,672548	0,452321	0,547679
0,893670	0,798646	0,201354
0,994486	0,989002	0,0109983
n = 9	n″= 5	n″= 5
0,164368	0,0270169	0,972983
0,475294	0,225905	0,774095
0,734720	0,539813	0,460187
0,914550	0,836401	0,163599
0,995584	0,991187	0,0088133
n = 10	n′ = 5	n′ = 5
0,000000	0,000000	1,000000
0,294423	0,0866849	0,913315
0,562687	0,316616	0,683384
0,780957	0,609894	0,390106
0,929855	0,864630	0,135370
0,996384	0,992780	0,0072196
n = 11	n″= 6	n″= 6
0,136039	0,0185065	0,981494
0,398027	0,158425	0,841575
0,630496	0,397525	0,602475
0,816208	0,666195	0,333805
0,941401	0,886235	0,113765
0,996985	0,993978	0,0060220

n = 12	n′ = 6	n′ = 6
0,000000	0,000000	1,000000
0,248492	0,0617482	0,938252
0,481370	0,231717	0,768283
0,684004	0,467861	0,532139
0,843661	0,711764	0,288236
0,950321	0,903111	0,0968892
0,997447	0,994901	0,0050987
n = 13	n″= 7	n″= 7
0,116014	0,0134591	0,986541
0,341787	0,116818	0,883182
0,549134	0,301548	0,698452
0,726878	0,528352	0,471648
0,865439	0,748985	0,251015
0,957355	0,916528	0,0834723
0,997811	0,995627	0,0043729
n = 14	n′ = 7	n′ = 7
0,000000	0,000000	1,000000
0,214843	0,0461575	0,953843
0,419640	0,176098	0,823902
0,604816	0,365803	0,634197
0,761712	0,580205	0,419795
0,882993	0,779677	0,220323
0,962996	0,927362	0,0726381
0,998102	0,996208	0,0037916

n = 15	n'' = 8	n'' = 8
0,101116	0,0102244	0,989776
0,299208	0,0895253	0,910475
0,485050	0,235274	0,764726
0,651035	0,423847	0,576153
0,790367	0,624680	0,375320
0,897343	0,805225	0,194775
0,967590	0,936231	0,0637691
0,998339	0,996681	0,0033188
n = 16	n' = 8	n' = 8
0,000000	0,000000	1,000000
0,189165	0,0357832	0,964217
0,371492	0,138007	0,861993
0,540393	0,292025	0,707975
0,689764	0,475774	0,524226
0,814204	0,662929	0,337071
0,909219	0,826680	0,173320
0,971380	0,943580	0,0564205
0,998534	0,997071	0,0029290
n = 17	n'' = 9	n'' = 9
0,089603	0,0080286	0,991971
0,265929	0,0707180	0,929282
0,433707	0,188102	0,811898
0,587546	0,345210	0,654790
0,722501	0,522008	0,477992
0,834235	0,695948	0,304052
0,919157	0,844849	0,155151
0,974543	0,949734	0,0502656
0,998697	0,997396	0,0026045

n = 18	n′ = 9	n′ = 9
0,000000	0,000000	1,000000
0,168939	0,0285404	0,971460
0,333018	0,110901	0,889099
0,487517	0,237673	0,762327
0,627991	0,394373	0,605627
0,750399	0,563099	0,436901
0,851220	0,724576	0,275424
0,927554	0,860357	0,139643
0,977210	0,954939	0,0450608
0,998834	0,997669	0,0023307

n = 19	n′′= 10	n′′= 10
0,080440	0,0064706	0,993529
0,239237	0,0572343	0,942766
0,391838	0,153537	0,846463
0,534291	0,285466	0,714534
0,662905	0,439444	0,560556
0,774351	0,599620	0,400380
0,865742	0,749510	0,250490
0,934712	0,873688	0,126312
0,979479	0,959380	0,0406205
0,998950	0,997902	0,0020981

n = 20	n′ = 10	n′ = 10
0,000000	0,000000	1,000000
0,152604	0,0232879	0,976712
0,301631	0,0909812	0,909019
0,443588	0,196770	0,803230
0,575148	0,330795	0,669205
0,693227	0,480563	0,519437
0,795057	0,632116	0,367884
0,878253	0,771328	0,228672
0,940863	0,885224	0,114776
0,981426	0,963197	0,0368033
0,999050	0,998102	0,0018982

n = 21	n'' = 11	n'' = 11
0,072976	0,0053254	0,994674
0,217371	0,0472503	0,952750
0,357134	0,127545	0,872455
0,489286	0,239401	0,760599
0,611009	0,373332	0,626668
0,719709	0,517982	0,482018
0,813071	0,661084	0,338916
0,889103	0,790504	0,209496
0,946187	0,895269	0,104731
0,983108	0,966502	0,0334978
0,999137	0,998274	0,0017261

$$\sigma_n(z) = p_n(z) = P_{2n}(\sqrt{1-z}), \tag{9}$$

αἱ δέ συναρτήσεις $q_n(z)$ διδόμεναι βάσει τοῦ τύπου (4.13) ἤ τοῦ τύπου (5.6) συνδέονται μετά τῶν συναρτήσεων LEGENDRE δευτέρου εἴδους $Q_n(z)$ κατά τόν τύπον :

$$q_n(z) = -\frac{1}{\sqrt{1-z}} Q_{2n}(\sqrt{1-z}). \tag{10}$$

Ὁ τύπος οὗτος δύναται νά ἀποδειχθῇ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ ὁρισμοῦ (4.13) τῆς συναρτήσεως $q_n(z)$ καί τῶν τύπων (8) καί (9), ὁπότε προκύπτει :

$$\begin{aligned} q_n(z) &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} \frac{P_{2n}(\sqrt{1-t})}{t-z} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{P_{2n}(\sqrt{1-t})}{-(1-t)+(1-z)} d\sqrt{1-t} = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{1-z}} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-t}-\sqrt{1-z}} - \frac{1}{\sqrt{1-t}+\sqrt{1-z}} \right\} P_{2n}(\sqrt{1-t}) d\sqrt{1-t} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-z}} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\tau-\sqrt{1-z}} - \frac{1}{\tau+\sqrt{1-z}} \right\} P_{2n}(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-z}} \int_{-1}^1 \frac{P_{2n}(\tau)}{\tau-\sqrt{1-z}} d\tau = -\frac{1}{\sqrt{1-z}} Q_{2n}(\sqrt{1-z}), \end{aligned} \tag{11}$$

λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν καί τῶν ἀναφερθέντων εἰς τό ἐδάφιον A

ὡς καί τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ συνάρτησις $P_{2n}(z)$ εἶναι ἀρτία.

Οἱ τύποι (9) καί (10) δύνανται εὐχερῶς νά ἑρμηνευθοῦν, ἐάν ληφθῇ ὑπ'ὄψιν ὁ τύπος :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} f(t)dt = \int_{-1}^1 f(1-\tau^2)d\tau, \quad \tau = \sqrt{1-t}, \qquad (12)$$

βάσει τοῦ ὁποίου τά ἐξεταζόμενα ὁλοκληρώματα εἰς τό ἐδάφιον τοῦτο καί κατ'ἐπέκτασιν καί αἱ ἀντίστοιχοι ἰδιόμορφοι ὁλοκληρωτικαί ἐξισώσεις δύνανται νά ἀντιμετωπίζωνται διά τῆς μεθόδου GAUSS-LEGENDRE τῆς ἐκτεθείσης εἰς τό προηγούμενον ἐδάφιον Α. Διά τοῦτο καί ἡ ἀναπτυσσομένη εἰς τό παρόν ἐδάφιον μέθοδος ὠνομάσθη τροποποιημένη μέθοδος GAUSS--LEGENDRE.

Κατά ταῦτα, λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν καί τοῦ τύπου (10), τά σημεῖα x_k' διά τήν ἐνταῦθα ἐξεταζομένην τροποποιημένην μέθοδον GAUSS-LEGENDRE μέ n' σημεῖα προκύπτουν ἐκ τῶν σημείων x_k τῆς εἰς τό προηγούμενον ἐδάφιον ἐξετασθείσης μεθόδου GAUSS-LEGENDRE, μέ 2n' σημεῖα ὅμως, βάσει τοῦ τύπου :

$$x_k' = 1-x_k^2, \qquad (13)$$

ἔνθα ἐκ τῶν σημείων x_k πρέπει νά λαμβάνωνται ὑπ'ὄψιν μόνον τά θετικά (ἤ μόνον τά ἀρνητικά), ὁπωσδήποτε δέ ὄχι τό σημεῖον $x_k = 0$ (τό ὁποῖον σημειωτέον ἀποτελεῖ πάντοτε ρίζαν τῶν συναρτήσεων $Q_{2n}(z)$), καθ'ὅσον διά $x_k = 0$ προκύπτει $x_k' = 1$, σημεῖον ἀπαράδεκτον, καθ'ὅσον συμπίπτει μέ ἄκρον τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως [0,1] . Ἐκ τῶν (2n'+1) σημείων x_k προκύπτουν ἐπομένως n' σημεῖα x_k'. Τά σημεῖα ταῦτα x_k' δίδονται μέ ἀκρίβειαν ἓξ δεκαδικῶν ψηφίων διά n' = 0(1)10 εἰς τήν τρίτην στήλην τοῦ Πίνακος 1, ὅπου χάριν πληρότητος δηλοῦται ἐπίσης καί τό σημεῖον $x_k' = 1$.

Ἑτέραν μορφήν τῆς τροποποιημένης μεθόδου GAUSS-LEGENDRE διά τό αὐτό διάστημα ὁλοκληρώσεως [0,1] καί τήν αὐτήν συνάρτησιν βάρους w(t) εὑρίσκομεν ἀνάγοντες τήν ἀριθμητικήν εὕρεσιν τοῦ πρώτου ὁλοκληρώματος τοῦ τύπου (12) μέ n

σημεῖα εἰς τήν εὕρεσιν τοῦ ἴσου του δευτέρου ὁλοκληρώματος τοῦ τύπου (12), ἀλλά μέ (2n-1) σημεῖα καί ὄχι 2n σημεῖα.

Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην ὁ τύπος (9) λαμβάνει τήν μορφήν { BOUZITAT, 1952, § 4.32 } :

$$\sigma_n(z) = \sqrt{1-z}\, P_{2n-1}(\sqrt{1-z}), \tag{14}$$

δεδομένου δέ ὅτι αἱ συναρτήσεις $P_{2n-1}(z)$ εἶναι περιτταί, δύναται νά διαπιστωθῇ ὅτι μεταξύ τῶν σημείων t_i προκύπτει καί τό σημεῖον $t_i = 1$ ἄκρον τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως [0,1] , πρᾶγμα τό ὁποῖον μᾶς διευκολύνει κατά τήν ἐπίλυσιν μιᾶς ἀντιστοίχου ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως κατά τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Γ7, ἐφ'ὅσον εἶναι ἐπιθυμητή ἡ εὕρεσις κατά κύριον λόγον τῆς τιμῆς τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως ταύτης εἰς τό σημεῖον $t_i = 1$, ἀποφευγομένης οὕτω τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἐκτεθείσης εἰς τό τμῆμα Γ8 μεθόδου τῆς παρεμβολῆς. Πρακτικῶς εἰς προβλήματα ρωγμῶν συνήθως τό σημεῖον $t_i = 1$ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἓν τῶν ἄκρων τῆς ρωγμῆς καί ἡ τιμή τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως εἰς τό σημεῖον τοῦτο εἶναι ἀνάλογος τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων.

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τήν συνάρτησιν $q_n(z)$, δύναται νά ἀποδειχθῇ εὐκόλως, λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν τύπων (5.6) καί (14), ὅτι αὕτη δίδεται ὑπό τοῦ ἀναλόγου τοῦ (10) τύπου :

$$q_n(z) = -Q_{2n-1}(\sqrt{1-z}), \tag{15}$$

ὁπότε τά σημεῖα x''_k διά τήν ἐνταῦθα ἐξεταζομένην τροποποιημένην μέθοδον GAUSS-LEGENDRE μέ n''σημεῖα δύνανται νά εὑρίσκωνται ἐκ τῶν σημείων x_k τῆς εἰς τό προηγούμενον ἐδάφιον ἐξετασθείσης μεθόδου GAUSS-LEGENDRE, μέ (2n''-1) σημεῖα ὅμως, βάσει τοῦ ἀναλόγου τοῦ (13) τύπου :

$$x''_k = 1-x_k^{\,2}, \tag{16}$$

ἔνθα ἐκ τῶν σημείων x_k πρέπει νά λαμβάνωνται ὑπ'ὄψιν μόνον τά θετικά (ἤ μόνον τά ἀρνητικά). Ὁπωσδήποτε μεταξύ τῶν ση-

μείων x_k δέν περιλαμβάνεται τό σημεῖον 0, οὕτω δέ ἅπαντα τά προκύπτοντα σημεῖα x_k'', n''τόν ἀριθμόν, εἶναι δεκτά. Τά σημεῖα ταῦτα x_k'' δίδονται μέ ἀκρίβειαν ἓξ δεκαδικῶν ψηφίων διά n''= 1(1)11 εἰς τήν τρίτην στήλην τοῦ Πίνακος 1 ὁμοῦ μετά τῶν σημείων x_k' τοῦ τύπου (13).

Μέχρι τοῦδε ἐθεωρήσαμεν τήν περίπτωσιν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων μέ διάστημα ὁλοκληρώσεως [0,1] καί συνάρτησιν βάρους w(t) κατά τήν σχέσιν (8). Κατ'ἀνάλογον τρόπον δύναται νά μελετηθῇ ἡ περίπτωσις ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων μέ τό αὐτό διάστημα ὁλοκληρώσεως ἀλλά συνάρτησιν βάρους :

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} . \tag{17}$$

Διά ταῦτα δύναται ὡσαύτως νά ἐφαρμοσθῇ τροποποιημένη μορφή τῆς ἐκτεθείσης εἰς τό ἐδάφιον A μεθόδου GAUSS-LEGENDRE λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} f(t)dt = \int_{-1}^1 f(\tau^2)d\tau, \quad \tau = \sqrt{t}. \tag{18}$$

Ἐάν τό πρῶτον ὁλοκλήρωμα τοῦ τύπου (18) ἐκφρασθῇ μέ n σημεῖα κατά τήν μέθοδον GAUSS ἀναγόμενον εἰς τό δεύτερον ὁλοκλήρωμα τοῦ αὐτοῦ τύπου μέ 2n σημεῖα, τότε τά πολυώνυμα $\sigma_n(z)$ καί $p_n(z)$ δίδονται ὑπό τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ (9) τύπου:

$$\sigma_n(z) = p_n(z) = P_{2n}(\sqrt{z}), \tag{19}$$

ἡ δέ συνάρτησις $q_n(z)$ ὑπό τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ (10) τύπου :

$$q_n(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} Q_{2n}(\sqrt{z}) . \tag{20}$$

Περαιτέρω τά σημεῖα x_k' κατά τήν ἐφαρμογήν τῆς τροποποιημένης μεθόδου GAUSS-LEGENDRE μέ n' σημεῖα προκύπτουν βάσει τοῦ ἀναλόγου τοῦ (13) τύπου :

$$x_k' = x_k^{\,2} \tag{21}$$

ἐκ τῶν θετικῶν σημείων x_k τῆς μεθόδου GAUSS-LEGENDRE μέ 2n' σημεῖα, ἀποκλειομένου πρακτικῶς τοῦ σημείου $x_k = x_k' = 0$ ὡς

συμπίπτοντος μέ ἄκρον τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως [0,1]. Οὕτως ἐκ τῶν (2n'+1) σημείων x_k προκύπτουν n' σημεῖα x_k'. Τά σημεῖα ταῦτα x_k' δίδονται μέ ἀκρίβειαν ἔξ δεκαδικῶν ψηφίων διά n' = 0(1)10 εἰς τήν δευτέραν στήλην τοῦ Πίνακος 1, ὅπου χάριν πληρότητος δηλοῦται ἐπίσης καί τό σημεῖον $x_k' = 0$.

Ἐάν ἤδη τό πρῶτον ὁλοκλήρωμα τοῦ τύπου (18) ἐκφρασθῇ μέ n σημεῖα ἀναγόμενον ὅμως εἰς τό δεύτερον ὁλοκλήρωμα μέ (2n-1) σημεῖα, τότε τά πολυώνυμα $\sigma_n(z)$ δίδονται ὑπό τοῦ ἀναλόγου τοῦ (19) τύπου :

$$\sigma_n(z) = \sqrt{z}\, P_{2n-1}(\sqrt{z}), \tag{22}$$

ἡ δέ συνάρτησις $q_n(z)$ ὑπό τοῦ ἀναλόγου τοῦ (20) τύπου :

$$q_n(z) = \Omega_{2n-1}(\sqrt{z}) . \tag{23}$$

Περαιτέρω τά σημεῖα x_k'' κατά τήν ἐφαρμογήν τῆς τροποποιημένης μεθόδου GAUSS-LEGENDRE μέ n'' σημεῖα προκύπτουν βάσει τοῦ ἀναλόγου τοῦ (21) τύπου :

$$x_k'' = x_k^{\,2} \tag{24}$$

ἐκ τῶν θετικῶν σημείων x_k τῆς μεθόδου GAUSS-LEGENDRE μέ (2n''-1) σημεῖα προκυπτόντων n''σημείων x_k''. Τά σημεῖα ταῦτα x_k'' δίδονται μέ ἀκρίβειαν ἔξ δεκαδικῶν ψηφίων διά n''= 1(1)11 εἰς τήν δευτέραν στήλην τοῦ Πίνακος 1.

Δύναται τέλος νά παρατηρηθῇ ὅτι αἱ μέθοδοι ἀναγωγῆς τῶν πρώτων ὁλοκληρωμάτων τῶν τύπων (12) καί (18) μέ n σημεῖα εἰς τά δεύτερα ὁλοκληρώματα τῶν αὐτῶν τύπων μέ 2n σημεῖα ἀποτελοῦν τήν μέθοδον GAUSS διά τό διάστημα ὁλοκληρώσεως [0,1] καί συναρτήσεις βάρους τάς διδομένας ὑπό τῶν τύπων (8) καί (17) ἀντιστοίχως. Ἐπίσης αἱ μέθοδοι ἀναγωγῆς τῶν πρώτων ὁλοκληρωμάτων τῶν αὐτῶν τύπων (12) καί (18) μέ n σημεῖα εἰς τά δεύτερα ὁλοκληρώματα τῶν αὐτῶν τύπων μέ (2n-1) σημεῖα ἀποτελοῦν τήν μέθοδον RADAU διά τό διάστημα ὁλοκληρώσεως [0,1] καί συναρτήσεις βάρους τάς διδομένας ὑπό

τῶν τύπων (8) (ὁπότε ἡ μέθοδος RADAU ἀφορᾷ εἰς τό ἄκρον 1) καί (17) (ὁπότε ἡ μέθοδος RADAU ἀφορᾷ εἰς τό ἄκρον 0) ἀντιστοίχως λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν καί τῶν ἀναφερθέντων εἰς τό τμῆμα Γ6 περί τῆς μεθόδου RADAU.

Γ. Μέθοδος LOBATTO-LEGENDRE : Ἡ μέθοδος αὕτη δύναται νά ἐφαρμοσθῇ δι'ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα μέ διάστημα ὁλοκληρώσεως [-1,1] καί συνάρτησιν βάρους :

$$w(t) = 1. \tag{25}$$

Τά χρησιμοποιούμενα ὀρθογώνια πολυώνυμα $p_n(z)$, τά ἀναφερόμενα εἰς τό τμῆμα Γ6 διά τήν μέθοδον LOBATTO, εἶναι τά πολυώνυμα LEGENDRE $P_n(z)$, ἤτοι :

$$p_n(z) = P_n(z), \tag{26}$$

τά δέ πολυώνυμα $\sigma_n(z)$ τά ἀναφερόμενα εἰς τά τμήματα Γ5 καί Γ6 τά πολυώνυμα :

$$\sigma_n(z) = P_n(z)-P_{n-2}(z) = \frac{2n-1}{n(n-1)}(z^2-1)P'_{n-1}(z), \tag{27}$$

λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν τῆς σχέσεως (26), τῶν σχέσεων (6.5) καί (6.7) ὡς καί τοῦ κάτωθι τύπου {BOUZITAT, 1952, § 4.31}.

$$(2n-1)(z^2-1)P'_{n-1}(z) = n(n-1)\left\{P_n(z)-P_{n-2}(z)\right\}. \tag{28}$$

Περαιτέρω εὑρίσκομεν βάσει καί τοῦ τύπου (5.6) ὅτι αἱ συναρτήσεις $q_n(z)$ δίδονται βάσει τοῦ τύπου :

$$q_n(z) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(t)-P_{n-2}(t)}{t-z}dt, \tag{29}$$

ὁ ὁποῖος, λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν τοῦ ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων LEGENDRE δευτέρου εἴδους :

$$Q_n(z) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(t)}{t-z}dt, \tag{30}$$

δύναται νά γραφῇ ἁπλούστερον ὑπό τήν μορφήν :

$$q_n(z) = Q_n(z) - Q_{n-2}(z) \tag{31}$$

ἢ ἀκόμη καί ὑπό τήν μορφήν :

$$q_n(z) = \frac{2n-1}{n(n-1)}(z^2-1)Q'_{n-1}(z), \tag{32}$$

καθ'ὅσον ἡ σχέσις (28) ἰσχύει ὄχι μόνον διά τά πολυώνυμα LEGENDRE $P_n(z)$, ἀλλά καί διά τάς συναρτήσεις LEGENDRE δευτέρου εἴδους $Q_n(z)$ {STEGUN, 1965, § 8.5} .

Ἡ συνάρτησις $Q'_{n-1}(z)$ ἔχει ἐντός τοῦ διαστήματος $[-1,1]$ $(n-1)$ ρίζας x_k, αἵτινες κεῖνται ἀνά μία ἐντός ἑκάστου τῶν $(n-1)$ διαστημάτων τῶν καθοριζομένων ὑπό τῶν n ριζῶν τῆς συναρτήσεως $Q_{n-1}(z)$. Τά σημεῖα ταῦτα x_k ἀποτελοῦν καί τάς ἀποδεκτάς ρίζας x_k τῆς συναρτήσεως $q_n(z)$ διδομένης ὑπό τοῦ τύπου (32), καθ'ὅσον αἱ ἕτεραι δύο ρίζαι ταύτης : $x_k = \pm 1$ συμπίπτουν μέ τά ἄκρα τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως $[-1,1]$ καί δέν δύνανται ὡς ἐκ τούτου νά χρησιμοποιηθοῦν. Λαμβανομένου ἐπίσης ὑπ'ὄψιν ὅτι αἱ συναρτήσεις $Q'_{n-1}(z)$ εἶναι ἢ ἄρτιαι ἢ περιτταί, ἕπεται ὅτι αἱ ρίζαι τούτων x_k θά ἐμφανίζωνται κατά ζεύγη ἀντιθέτων ριζῶν πλήν τῆς ρίζης $x_k = 0$, ἐφ' ὅσον τό σημεῖον 0 ἀποτελεῖ ρίζαν τῆς συναρτήσεως $Q'_{n-1}(z)$, ἐντελῶς ἀναλόγως μέ τά ἀναφερθέντα εἰς τό ἐδάφιον A διά τάς ρίζας τῆς συναρτήσεως $Q_n(z)$.

Πίνακες τιμῶν τῶν συναρτήσεων $Q'_n(z)$ δίδονται ὑπό τῆς STEGUN {1965} διά $n = 0,1,2,3,9$ καί 10 ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως $[-1,1]$ μέ : $z = x = 0(0,01)1$ καί μέ ὀκτώ δεκαδικά ψηφία.

Διά τόν προσδιορισμόν τῶν ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως $[-1,1]$ ριζῶν x_k τῶν συναρτήσεων $q_n(z)$ ἐχρησιμοποιήσαμεν τάς ἐκφράσεις (31) τῶν συναρτήσεων $q_n(z)$ ἐν συνδυασμῷ μέ τούς ἀναδρομικούς τύπους (5) καί τούς τύπους (6) καί (7), ὑποβοηθούμενοι περαιτέρω διά τόν κατά προσέγγισιν προσδιορισμόν τῶν ριζῶν τούτων x_k ὑπό τῶν πινάκων τῶν συναρτήσεων LEGENDRE δευτέρου εἴδους $Q_n(z)$, περί τῶν ὁποίων ἀνεφέραμεν εἰς τό ἐδάφιον A. Τάς μή ἀρνητικάς τῶν

προσδιορισθεισῶν ριζῶν τούτων x_k δίδομεν εἰς τήν πρώτην στήλην τοῦ Πίνακος 2 διά n = 0(1)11 λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν ὅτι αἱ θετικαί καί αἱ ἀρνητικαί ρίζαι ἐμφανίζονται, ὡς προανεφέρθη, κατά ζεύγη ἀντιθέτων ριζῶν. Αἱ ρίζαι αὗται x_k δίδονται μέ ἀκρίβειαν ἔξ δεκαδικῶν ψηφίων, ἐπαρκῆ διά τάς ἐφαρμογάς τοῦ ἐπομένου Κεφαλαίου Δ, ἀλλ'ἐντελῶς ἀνεπαρκῆ ἐν συγκρίσει μέ τήν ἀκρίβειαν, μέ τήν ὁποίαν δίδονται συνήθως τά σημεῖα t_i καί τά βάρη A_i τά χρησιμοποιούμενα εἰς τήν μέθοδον ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως LOBATTO-LEGENDRE.

Δ. Τροποποιημένη μέθοδος LOBATTO-LEGENDRE : Ἡ μέθοδος αὕτη δύναται νά ἐφαρμοσθῇ δι'ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα μέ διάστημα ὁλοκληρώσεως [0,1] καί συνάρτησιν βάρους w(t) διδομένην ὑπό τῆς σχέσεως (8), ὅπως καί ἡ τροποποιημένη μέθοδος GAUSS-LEGENDRE, περί τῆς ὁποίας ἀνεφέραμεν εἰς τό ἐδάφιον Β. Χρησιμοποιοῦντες τήν τροποποιημένην μέθοδον LOBATTO-LEGENDRE διά τό ὁλοκλήρωμα I τοῦ τύπου (12) ἔχομεν τό πλεονέκτημα ὅτι μεταξύ τῶν σημείων t_i περιλαμβάνεται τό σημεῖον $t_i = 0$, ἡ δέ μέθοδος αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος μέ μέθοδον RADAU.

Τά χρησιμοποιούμενα ὀρθογώνια πολυώνυμα $p_n(z)$, τά ἀναφερόμενα εἰς τό τμῆμα Γ6 διά τήν μέθοδον RADAU, δίδονται βάσει τῶν πολυωνύμων LEGENDRE $P_n(z)$ κατά τόν τύπον {BOYZITAT, 1952, § 4.32} :

$$p_n(z) = P_{2n}(\sqrt{1-z}), \tag{33}$$

τά δέ πολυώνυμα $\sigma_n(z)$ τά ἀναφερόμενα εἰς τό τμῆμα Γ6 εἶναι τά πολυώνυμα :

$$\sigma_n(z) = P_{2n}(\sqrt{1-z}) - P_{2n-2}(\sqrt{1-z}) =$$
$$= -\frac{4n-1}{2n(2n-1)} z P'_{2n-1}(\sqrt{1-z}) \tag{34}$$

λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν καί τῶν σχέσεων (6.1), (6.2) καί (27). Περαιτέρω διαπιστοῦται εὐθύς ὅτι αἱ ἀντίστοιχοι συναρτήσεις

ΠΙΝΑΞ 2

Σημεῖα $\pm x_k$ δι'ἐφαρμογήν τῆς μεθόδου LOBATTO-LEGENDRE ἤ τῶν τροποποιημένων μεθόδων LOBATTO-LEGENDRE.

n = 2	n′ = 1	n′ = 1
0,000000	0,000000	1,000000
n = 3	n″= 2	n″= 2
0,623175	0,388347	0,611653
n = 4	n′ = 2	n′ = 2
0,000000	0,000000	1,000000
0,805405	0,648677	0,351323
n = 5	n″= 3	n″= 3
0,348370	0,121362	0,878638
0,881699	0,777393	0,222607
n = 6	n′ = 3	n′ = 3
0,000000	0,000000	1,000000
0,547340	0,299581	0,700419
0,920609	0,847521	0,152479
n = 7	n″= 4	n″= 4
0,241443	0,0582945	0,941705
0,668994	0,447553	0,552447
0,943076	0,889393	0,110607
n = 8	n′ = 4	n′ = 4
0,000000	0,000000	1,000000
0,409449	0,167649	0,832351
0,748081	0,559625	0,440375
0,957206	0,916243	0,0837574
n = 9	n″= 5	n″= 5
0,184704	0,0341155	0,965884
0,529164	0,280014	0,719986
0,802140	0,643429	0,356571
0,966663	0,934436	0,0655636

n = 10	n′ = 5	n′ = 5
0,000000	0,000000	1,000000
0,326049	0,106308	0,893692
0,616763	0,380396	0,619604
0,840627	0,706654	0,293346
0,973300	0,947313	0,0526866
n = 11	n″= 6	n″= 6
0,149549	0,0223650	0,977635
0,435360	0,189538	0,810462
0,682483	0,465784	0,534216
0,868954	0,755082	0,244918
0,978137	0,956752	0,0432478

$q_n(z)$ εὑρισκόμεναι βάσει τοῦ τύπου (5.6) δίδονται λόγῳ τῶν σχέσεων (11) καί (34) βάσει τοῦ κάτωθι τύπου συναρτήσει τῶν συναρτήσεων LEGENDRE δευτέρου εἴδους:

$$q_n(z) = -\frac{1}{\sqrt{1-z}}\left\{Q_{2n}(\sqrt{1-z})-Q_{2n-2}(\sqrt{1-z})\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z}}\,\frac{4n-1}{2n(2n-1)}\,zQ'_{2n-1}(\sqrt{1-z}), \qquad (35)$$

δεδομένου ὅτι, ὡς ἐλέχθη εἰς τό ἐδάφιον Γ, ἡ σχέσις (28) ἰσχύει καί διά τάς συναρτήσεις LEGENDRE δευτέρου εἴδους. Ἤδη τά σημεῖα x'_k διά τήν ἐνταῦθα ἐξεταζομένην τροποποιημένην μέθοδον LOBATTO-LEGENDRE μέ n′ σημεῖα θά προκύψουν ἐκ τῶν σημείων x_k τῆς εἰς τό προηγούμενον ἐδάφιον ἐξετασθείσης μεθόδου LOBATTO-LEGENDRE μέ 2n′ σημεῖα βάσει τοῦ τύπου (13), ἔνθα ἐκ τῶν σημείων x_k πρέπει νά λαμβάνωνται ὑπ'ὄψιν μόνον τά θετικά (ἤ μόνον τά ἀρνητικά), ὁπωσδήποτε δέ ὄχι τό σημεῖον $x_k = 0$ (τό ὁποῖον σημειωτέον ἀποτελεῖ πάντοτε ρίζαν τῶν $Q'_{2n-1}(z)$), καθ'ὅσον διά $x_k = 0$ προκύπτει $x'_k = 1$, σημεῖον ἀπαράδεκτον, καθ'ὅσον συμπίπτει μέ ἄκρον τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως [0,1]. Ἐκ τῶν (2n′-1) σημείων x_k προκύπτουν ἐπομένως (n′-1) σημεῖα x'_k. Τά σημεῖα ταῦτα x'_k δίδονται μέ ἀ-

κρίβειαν ἔξ δεκαδικῶν ψηφίων διά $n' = 1\ (1)5$ εἰς τήν τρίτην στήλην τοῦ Πίνακος 2, ὅπου χάριν πληρότητος δηλοῦται ἐπίσης καί τό σημεῖον $x_k' = 1$.

Ἑτέραν μορφήν τῆς τροποποιημένης μεθόδου LOBATTO-LEGENDRE διά τό αὐτό διάστημα ὁλοκληρώσεως [0,1] καί τήν αὐτήν συνάρτησιν βάρους $w(t)$ εὑρίσκομεν ἀνάγοντες τήν ἀριθμητικήν εὕρεσιν τοῦ πρώτου ὁλοκληρώματος τοῦ τύπου (12) μέ n σημεῖα εἰς τήν εὕρεσιν τοῦ ἴσου του δευτέρου ὁλοκληρώματος τοῦ τύπου (12) ἀλλά μέ $(2n-1)$ σημεῖα καί ὄχι $2n$ σημεῖα. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην ἔχομεν τό πλεονέκτημα ὅτι μεταξύ τῶν σημείων t_i περιλαμβάνονται τόσον τό σημεῖον $t_i = 0$ ὅσον καί τό σημεῖον $t_i = 1$, ἡ δέ μέθοδος αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος μέ μέθοδον LOBATTO διά τό διάστημα ὁλοκληρώσεως [0,1] καί συνάρτησιν βάρους $w(t)$ τήν διδομένην ὑπό τοῦ τύπου (8).

Τά χρησιμοποιούμενα ὀρθογώνια πολυώνυμα $p_n(z)$, τά ἀναφερόμενα εἰς τό τμῆμα Γ6 διά τήν μέθοδον LOBATTO, εὑρίσκονται βάσει τῶν πολυωνύμων LEGENDRE $P_n(z)$ πάλιν βάσει τοῦ τύπου (33), τά δέ πολυώνυμα $\sigma_n(z)$ τά ἀναφερόμενα ἐπίσης εἰς τό τμῆμα Γ6 εἶναι τά πολυώνυμα:

$$\sigma_n(z) = P_{2n}(\sqrt{1-z}) + cP_{2n-2}(\sqrt{1-z}) + dP_{2n-4}(\sqrt{1-z}) \tag{36}$$

ληφθεισῶν ὑπ' ὄψιν τῶν σχέσεων (6.5) καί (35), ἔνθα αἱ σταθεραί c καί d δίδονται βάσει τῶν τύπων (6.7), οἵτινες ἐν προκειμένῳ λαμβάνουν τήν μορφήν:

$$c = -\frac{P_{2n}(1)P_{2n-4}(0) - P_{2n}(0)P_{2n-4}(1)}{P_{2n-2}(1)P_{2n-4}(0) - P_{2n-2}(0)P_{2n-4}(1)} \tag{37α}$$

$$d = +\frac{P_{2n}(1)P_{2n-2}(0) - P_{2n}(0)P_{2n-2}(1)}{P_{2n-2}(1)P_{2n-4}(0) - P_{2n-2}(0)P_{2n-4}(1)}\ . \tag{37β}$$

Περαιτέρω λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τόν ἀναδρομικόν τύπον διά τά πολυώνυμα LEGENDRE {HOCHSTRASSER, 1965, §22.7}:

$$nP_n(z) = (2n-1)zP_{n-1}(z) - (n-1)P_{n-2}(z)\ , \tag{38}$$

ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι:

$$\frac{P_{2n-2}(0)}{P_{2n-4}(0)} = -\frac{2n-3}{2n-2} \quad , \quad \frac{P_{2n}(0)}{P_{2n-4}(0)} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)} \quad , \tag{39}$$

ἐπίσης δέ τήν πληρουμένην ὑπό τῶν πολυωνύμων LEGENDRE $P_n(z)$ καί διά πᾶσαν τιμήν τοῦ n σχέσιν {HOCHSTRASSER, 1965, §22.2}:

$$P_n(1) = 1 \quad , \tag{40}$$

ὁπότε ἐκ τῶν σχέσεων (37) εὑρίσκομεν τάς τιμάς τῶν σταθερῶν c καί d:

$$c = -\frac{4n-3}{2n(4n-5)} \quad , \quad d = -\frac{(2n-3)(4n-1)}{2n(4n-5)} \quad . \tag{41}$$

Ἤδη τά πολυώνυμα $\sigma_n(z)$ τῆς σχέσεως (36) λαμβάνουν τήν μορφήν:

$$\sigma_n(z) = P_{2n}(\sqrt{1-z}) - \frac{4n-3}{2n(4n-5)} P_{2n-2}(\sqrt{1-z}) - \\ - \frac{(2n-3)(4n-1)}{2n(4n-5)} P_{2n-4}(\sqrt{1-z}) \quad . \tag{42}$$

Τήν ἔκφρασιν (42) τῶν πολυωνύμων $\sigma_n(z)$ δυνάμεθα νά γράψωμεν καί ὡς ἑξῆς:

$$\sigma_n(z) = \frac{4n-1}{2n}\left\{\frac{2nP_{2n}(\sqrt{1-z})+(2n-1)P_{2n-2}(\sqrt{1-z})}{4n-1} - \right. \\ \left. - \frac{(2n-2)P_{2n-2}(\sqrt{1-z})+(2n-3)P_{2n-4}(\sqrt{1-z})}{4n-5}\right\} , \tag{43}$$

περαιτέρω δέ λόγῳ καί τῆς ἀναδρομικῆς σχέσεως (38) ὡς κάτωθι:

$$\sigma_n(z) = \frac{4n-1}{2n}\sqrt{1-z}\left\{P_{2n-1}(\sqrt{1-z})-P_{2n-3}(\sqrt{1-z})\right\} . \tag{44}$$

Ἐάν τέλος ληφθῇ ἐπίσης ὑπ' ὄψιν ἡ σχέσις (28), τά πολυώνυμα $\sigma_n(z)$ λαμβάνουν τήν ἑξῆς ἁπλουστάτην μορφήν:

$$\sigma_n(z) = -\frac{(4n-1)(4n-3)}{4n(n-1)(2n-1)}\sqrt{1-z}\; zP'_{2n-2}(\sqrt{1-z}) , \tag{45}$$

ἥτις συμφωνεῖ μέ τήν εὑρεθεῖσαν ὑπό τοῦ BOUZITAT {1952, §4. 32}.

Δέον ἐν τούτοις νά παρατηρηθῇ ὅτι ἡ ἔκφρασις (42) τῶν πολυωνύμων $\sigma_n(z)$ μᾶς διευκολύνει εἰς τόν προσδιορισμόν τῶν ἀντιστοίχων των συναρτήσεων $q_n(z)$. Πράγματι αἱ τελευταῖαι δύνανται νά εὑρεθοῦν βάσει τοῦ τύπου (5.6), ὅστις λόγῳ καί τῶν σχέσεων (11) καί (42) δίδει:

$$q_n(z) = -\frac{1}{\sqrt{1-z}}\left\{Q_{2n}(\sqrt{1-z}) - \frac{4n-3}{2n(4n-5)}Q_{2n-2}(\sqrt{1-z}) - \right.$$

$$\left. - \frac{(2n-3)(4n-1)}{2n(4n-5)}Q_{2n-4}(\sqrt{1-z})\right\} =$$

$$= -\frac{4n-1}{2n}\left\{Q_{2n-1}(\sqrt{1-z}) - Q_{2n-3}(\sqrt{1-z})\right\} =$$

$$= \frac{(4n-1)(4n-3)}{4n(n-1)(2n-1)} z Q'_{2n-2}(\sqrt{1-z}), \tag{46}$$

λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ σχέσεις (28) καί (38) πληροῦνται οὐχί μόνον ὑπό τῶν πολυωνύμων LEGENDRE $P_n(z)$ ἀλλά καί ὑπό τῶν συναρτήσεων LEGENDRE δευτέρου εἴδους $Q_n(z)$ {STEGUN, 1965 §8.5}.

Τά σημεῖα x''_k διά τήν ἐνταῦθα ἐξεταζομένην τροποποιημένην μέθοδον LOBATTO-LEGENDRE μέ n'' σημεῖα δύνανται νά προκύπτουν ἐκ τῶν σημείων x_k τῆς εἰς τό προηγούμενον ἐδάφιον ἐξετασθείσης μεθόδου LOBATTO-LEGENDRE, μέ $(2n''-1)$ σημεῖα ὅμως, βάσει τοῦ τύπου (16), ἔνθα ἐκ τῶν σημείων x_k πρέπει νά λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν μόνον τά θετικά (ἤ μόνον τά ἀρνητικά). Ὁπωσδήποτε μεταξύ τῶν σημείων x_k δέν περιλαμβάνεται τό σημεῖον 0, οὕτω δέ ἅπαντα τά σημεῖα x''_k, $(n''-1)$ τόν ἀριθμόν, εἶναι δεκτά. Τά σημεῖα ταῦτα x''_k δίδονται μέ ἀκρίβειαν ἐξ δεκαδικῶν ψηφίων διά $n'' = 2(1)6$ εἰς τήν τρίτην στήλην τοῦ Πίνακος 2.

Εἰς τό παρόν ἐδάφιον μέχρι τοῦδε ἐθεωρήσαμεν τήν περίπτωσιν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων μέ διάστημα ὁλοκληρώσεως [0,1] καί συνάρτησιν βάρους $w(t)$ κατά τήν σχέσιν (8). Κατ' ἀνάλογον τρόπον δύναται νά μελετηθῇ ἡ περίπτωσις ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων μέ τό αὐτό διάστημα ὁλοκληρώσεως ἀλλά συνάρ-

τησιν βάρους $w(t)$ κατά τήν σχέσιν (17), ὡς ἐγένετο καί εἰς τό ἐδάφιον Β. Διά τά ὁλοκληρώματα ταῦτα δύναται ἐπίσης νά ἐφαρμοσθῇ τροποποιημένη μορφή τῆς ἐκτεθείσης εἰς τό ἐδάφιον Γ μεθόδου LOBATTO-LEGENDRE λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ τύπου (18). Χρησιμοποιοῦντες τήν μέθοδον ταύτην ἔχομεν τό πλεονέκτημα ὅτι μεταξύ τῶν σημείων t_i περιλαμβάνεται καί τό σημεῖον $t_i = 1$.

Τά χρησιμοποιούμενα ὀρθογώνια πολυώνυμα $p_n(z)$, τά ἀναφερόμενα εἰς τό τμῆμα Γ6 διά τάς μεθόδους RADAU καί LOBATTO, δίδονται διά τήν περίπτωσιν διαστήματος ὁλοκληρώσεως [0,1] καί συναρτήσεως βάρους $w(t)$ κατά τήν σχέσιν (17) ὑπό τοῦ ἀναλόγου τοῦ (33) τύπου:

$$p_n(z) = P_{2n}(\sqrt{z}), \tag{47}$$

τά δέ πολυώνυμα $\sigma_n(z)$ τά ἀναφερόμενα εἰς τό τμῆμα Γ6 εἶναι διά μέν τήν μέθοδον RADAU (μέ τό ἄκρον $t = 1$ περιλαμβανόμενον μεταξύ τῶν σημείων t_i) τά πολυώνυμα:

$$\sigma_n(z) = P_{2n}(\sqrt{z}) - P_{2n-2}(\sqrt{z}) =$$

$$= -\frac{4n-1}{2n(2n-1)}(1-z)P'_{2n-1}(\sqrt{z}) \quad , \tag{48}$$

διά δέ τήν μέθοδον LOBATTO (μέ ἀμφότερα τά ἄκρα $t = 0$ καί $t = 1$ περιλαμβανόμενα μεταξύ τῶν σημείων t_i) τά πολυώνυμα:

$$\sigma_n(z) = P_{2n}(\sqrt{z}) - \frac{4n-3}{2n(4n-5)}P_{2n-2}(\sqrt{z}) -$$

$$- \frac{(2n-3)(4n-1)}{2n(4n-5)}P_{2n-4}(\sqrt{z}) =$$

$$= \frac{4n-1}{2n}\sqrt{z}\left\{P_{2n-1}(\sqrt{z}) - P_{2n-3}(\sqrt{z})\right\} =$$

$$= -\frac{(4n-1)(4n-3)}{4n(n-1)(2n-1)}\sqrt{z}(1-z)P'_{2n-2}(\sqrt{z}) \quad . \tag{49}$$

Οἱ τύποι (48) καί (49) προκύπτουν εὐχερῶς βάσει τῶν ἀναφερομένων εἰς τό τμῆμα Γ6, δύνανται δέ ἐπίσης νά θεωρηθοῦν

προκύπτοντες καί ἐκ τῶν τύπων (34) καί (42-45) ἀντιστοίχως, ἐάν τεθῇ $\sqrt{z}$ ἀντί τοῦ $\sqrt{1-z}$.

Περαιτέρω αἱ συναρτήσεις $q_n(z)$ δύνανται νά προκύψουν βάσει τοῦ τύπου (5.6) ἤ πάλιν δι'ἀντικαταστάσεως εἰς τούς τύπους (35) καί (46) τοῦ $\sqrt{1-z}$ μέ $\sqrt{z}$, ὁπότε εὑρίσκομεν διά μέν τήν μέθοδον RADAU:

$$q_n(z) = -\frac{1}{\sqrt{z}}\left\{Q_{2n}(\sqrt{z})-Q_{2n-2}(\sqrt{z})\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{z}}\,\frac{4n-1}{2n(2n-1)}(1-z)Q'_{2n-1}(\sqrt{z}) \quad , \tag{50}$$

διά δέ τήν μέθοδον LOBATTO:

$$q_n(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}\left\{Q_{2n}(\sqrt{z})-\frac{4n-3}{2n(4n-5)}Q_{2n-2}(\sqrt{z})-\right.$$

$$\left.-\frac{(2n-3)(4n-1)}{2n(4n-5)}Q_{2n-4}(\sqrt{z})\right\} =$$

$$= \frac{4n-1}{2n}\left\{Q_{2n-1}(\sqrt{z})-Q_{2n-3}(\sqrt{z})\right\} =$$

$$= -\frac{(4n-1)(4n-3)}{4n(n-1)(2n-3)}(1-z)Q'_{2n-2}(\sqrt{z}) . \tag{51}$$

Οὕτω τά σημεῖα x'_k κατά τήν ἐφαρμογήν τῆς τροποποιημένης μεθόδου LOBATTO-LEGENDRE μέ n' σημεῖα τῆς ἰσοδυνάμου μέ μέθοδον RADAU προκύπτουν βάσει τοῦ τύπου (21) ἐκ τῶν θετικῶν σημείων x_k τῆς μεθόδου LOBATTO-LEGENDRE μέ $2n'$ σημεῖα ἀποκλειομένου πρακτικῶς τοῦ σημείου $x_k = x'_k = 0$ ὡς συμπίπτοντος μέ ἄκρον τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως $[0,1]$. Οὕτως ἐκ τῶν $(2n'-1)$ σημείων x_k προκύπτουν $(n'-1)$ σημεῖα x'_k. Τά σημεῖα ταῦτα x'_k δίδονται μέ ἀκρίβειαν ἐξ δεκαδικῶν ψηφίων διά $n' = 1(1)5$ εἰς τήν δευτέραν στήλην τοῦ Πίνακος 2, ὅπου χάριν πληρότητος δηλοῦται ἐπίσης καί τό σημεῖον $x'_k = 0$.

Τέλος τά σημεῖα x''_k κατά τήν ἐφαρμογήν τῆς τροποποιημένης μεθόδου LOBATTO-LEGENDRE μέ n'' σημεῖα τῆς ἰσοδυνάμου μέ μέθοδον LOBATTO προκύπτουν βάσει τοῦ τύπου (24) ἐκ τῶν θετικῶν σημείων x_k τῆς μεθόδου LOBATTO-LEGENDRE μέ $(2n''-1)$ση-

μεῖα εὑρισκομένων οὕτως $(n''-1)$σημείων x_k''. Τά σημεῖα ταῦτα x_k'' δίδονται μέ ἀκρίβειαν ἔξ δεκαδικῶν ψηφίων διά $n''=2(1)6$ εἰς τήν τρίτην στήλην τοῦ Πίνακος 2.

Ε. Μέθοδος GAUSS-CHEBYSHEV: Ἡ μέθοδος αὕτη, περί τῆς ὁποίας ἔχομεν ἀναφέρει καί εἰς τό τμῆμα Γ3, δύναται νά ἐφαρμοσθῇ δι' ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα μέ διάστημα ὁλοκληρώσεως τό $[-1,1]$ καί συνάρτησιν βάρους τήν:

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} . \tag{52}$$

Τά χρησιμοποιούμενα ὀρθογώνια πολυώνυμα $p_n(z)$ τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Γ4 καί συμπίπτοντα μέ τά πολυώνυμα $\sigma_n(z)$ τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Γ5 εἶναι τά πολυώνυμα CHEBYSHEV πρώτου εἴδους $T_n(z)$ ἤτοι:

$$\sigma_n(z) = p_n(z) = T_n(z), \tag{53}$$

αἱ δέ συναρτήσεις $q_n(z)$ διδόμεναι βάσει τοῦ τύπου (4.13) ἤ τοῦ τύπου (5.6) εἶναι ἀνάλογοι τῶν συναρτήσεων CHEBYSHEV δευτέρου εἴδους $U_{n-1}(z)$ {CHAWLA and RAMAKRISHNAN,1974A} ἰσχυούσης τῆς σχέσεως:

$$q_n(z) = -\frac{\pi}{2}U_{n-1}(z), \quad U_{-1}(z) \equiv 0, \tag{54}$$

ἥτις προκύπτει εὐθύς, ἐάν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν καί ὁ τύπος (3.15) μέ τό σημεῖον x ἐντός τοῦ διαστήματος $[-1,1]$ ἀντικαθιστάμενον ὑπό τοῦ σημείου z ἐπί ἤ καί ἐκτός τοῦ διαστήματος τούτου. Διά τάς ἰδιότητας τῶν συναρτήσεων CHEBYSHEV δευτέρου εἴδους $U_{n-1}(z)$ παραπέμπομεν εἰς τό ἄρθρον τοῦ CHAWLA {1967}.

Πρέπει νά σημειωθῇ περαιτέρω ὅτι αἱ συναρτήσεις CHEBYSHEV δευτέρου εἴδους $U_{n-1}(z)$ μεταπίπτουν εἰς τά πολυώνυμα CHEBYSHEV δευτέρου εἴδους $U_{n-1}(x)$, ὅταν τό σημεῖον z κεῖται ἐντός τοῦ διαστήματος $[-1,1]$. Τά σημεῖα x_k συνεπῶς, ἅτινα εἶναι αἱ ρίζαι τῶν συναρτήσεων $q_n(z)$, συμπίπτουν μέ τάς $(n-1)$ ρίζας τῶν πολυωνύμων $U_{n-1}(x)$, ἤτοι ἔχομεν:

$$U_{n-1}(x_k) = 0, \quad x_k = \cos\frac{k\pi}{n}, \; k = 1,2,\ldots, n-1, \tag{55}$$

ὡς εὑρέθη καί εἰς τό τμῆμα Γ3 (τύποι (3.8) καί (3.10)).

Ἐάν ἐφαρμόσωμεν συνεπῶς τήν μέθοδον GAUSS-CHEBYSHEV μέ n σημεῖα διά τήν ἐπίλυσιν μιᾶς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως, θά διαθέτωμεν μόνον (n-1) σημεῖα x_k καί ἀπαιτεῖται ὅπως ὑφίσταται πέραν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως ἐφαρμοζομένης εἰς τά (n-1) σημεῖα x_k καί μία εἰσέτι συνθήκη, ἵνα σχηματισθῇ τελικῶς ἓν σύστημα n γραμμικῶν ἐξισώσεων μέ n ἀγνώστους συμφώνως πρός τά ἀναφερθέντα καί εἰς τό τμῆμα Γ7.

ΣΤ. Μέθοδος LOBATTO-CHEBYSHEV: Ἡ μέθοδος αὕτη, περί τῆς ὁποίας ἔχομεν ἀναφέρει καί εἰς τό τμῆμα Γ3, δύναται νά ἐφαρμοσθῇ δι' ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα μέ διάστημα ὁλοκληρώσεως τό [-1,1] καί συνάρτησιν βάρους w(t) διδομένην βάσει τῆς σχέσεως (52) ὡς καί ἡ μέθοδος GAUSS-CHEBYSHEV. Τά χρησιμοποιούμενα ὀρθογώνια πολυώνυμα $p_n(z)$ τά ἀναφερόμενα εἰς τό τμῆμα Γ6 διά τήν μέθοδον LOBATTO εἶναι, ὡς καί εἰς τήν μέθοδον GAUSS-CHEBYSHEV, τά πολυώνυμα CHEBYSHEV πρώτου εἴδου $T_n(z)$, τά δέ πολυώνυμα $\sigma_n(z)$ τά πολυώνυμα:

$$\sigma_n(z) = T_n(z) - T_{n-2}(z), \tag{56}$$

λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν τύπων (6.5) καί (6.7) ὡς καί τῶν ἰδιοτήτων τῶν πολυωνύμων CHEBYSHEV πρώτου εἴδους:

$$T_n(-1) = (-1)^n, \quad T_n(1) = 1, \quad n = 1,2,\ldots . \tag{57}$$

Λαμβάνοντες περαιτέρω ὑπ' ὄψιν τόν τύπον {HOCHSTRASSER, §22.7}:

$$T_{n+1}(z) - T_{n-1}(z) = 2(z^2-1)U_{n-1}(z), \tag{58}$$

εὑρίσκομεν λόγῳ καί τῆς σχέσεως (56) τήν κάτωθι ἔκφρασιν διά τά πολυώνυμα $\sigma_n(z)$:

$$\sigma_n(z) = 2(z^2-1)U_{n-2}(z) \tag{59}$$

εὑρισκομένην ἐν συμφωνίᾳ μέ τά ἐκτεθέντα εἰς τό τμῆμα Γ3 διά τήν μέθοδον LOBATTO-CHEBYSHEV.

Περαιτέρω αἱ συναρτήσεις $q_n(z)$ δύνανται νά εὑρεθοῦν βάσει τοῦ τύπου (5.6), ὅστις, λόγῳ τῆς ἐκφράσεως (56) τῶν πολυωνύμων $\sigma_n(z)$ ὡς καί τῆς ἐκφράσεως (54) τῶν συναρτήσεων $q_n(z)$ διά τήν ἐκτεθεῖσαν εἰς τό προηγούμενον ἐδάφιον Ε μέθοδον GAUSS-CHEBYSHEV, λαμβάνει τήν μορφήν:

$$q_n(z) = -\frac{\pi}{2}\left[U_{n-1}(z)-U_{n-3}(z)\right] \tag{60}$$

καί περαιτέρω, λόγῳ καί τοῦ ἀναλόγου τοῦ (58) τύπου:

$$U_n(z)-U_{n-2}(z) = 2T_n(z), \tag{61}$$

τήν μορφήν:

$$q_n(z) = -\pi T_{n-1}(z). \tag{62}$$

Τά σημεῖα x_k συνεπῶς, ἅτινα εἶναι ρίζαι τῶν συναρτήσεων $q_n(z)$, συμπίπτουν μέ τάς (n-1) ρίζας τῶν πολυωνύμων $T_{n-1}(z)$, ἤτοι ἔχομεν:

$$T_{n-1}(x_k) = 0, \quad x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2(n-1)}, \quad k = 1,2,\ldots, n-1, \tag{63}$$

ὡς εὑρέθη καί εἰς τό τμῆμα Γ3.

Παρατηροῦμεν συνεπῶς ὅτι διά τήν ἐπίλυσιν μιᾶς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως διά τῆς μεθόδου LOBATTO-CHEBYSHEV ἀπαιτεῖται ὅπως αὕτη συνοδεύεται καί ὑπό μιᾶς εἰσέτι συνθήκης ἀναλόγως πρός ὅ,τι ἀνεφέρθη καί εἰς τήν μέθοδον GAUSS-CHEBYSHEV.

Ζ. Μέθοδος GAUSS-JACOBI: Ἡ μέθοδος αὕτη δύναται νά ἐφαρμοσθῇ δι' ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα μέ διάστημα ὁλοκληρώσεως [-1,1] καί συνάρτησιν βάρους:

$$w(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}, \quad \alpha,\beta > -1 . \tag{64}$$

Πρέπει νά παρατηρηθῇ ὅτι τῆς μεθόδου GAUSS-JACOBI εἰδικάς περιπτώσεις ἀποτελοῦν τόσον ἡ μέθοδος GAUSS-LEGENDRE, ἥτις ἀνεπτύχθη εἰς τό ἐδάφιον A, ὅσον καί ἡ μέθοδος GAUSS-CHEBYSHEV, ἥτις ἀνεπτύχθη εἰς τό ἐδάφιον E.

Τά χρησιμοποιούμενα ὀρθογώνια πολυώνυμα $p_n(z)$ τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Γ4 καί συμπίπτοντα μέ τά πολυώνυμα $\sigma_n(z)$ τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Γ5 εἶναι τά πολυώνυμα JACOBI $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ ἤτοι:

$$\sigma_n(z) = p_n(z) = P_n^{(\alpha,\beta)}(z), \tag{65}$$

αἱ δέ συναρτήσεις $q_n(z)$ διδόμεναι βάσει τοῦ τύπου (4.13) ἤ τοῦ τύπου (5.6) εἶναι τῆς μορφῆς {CHAWLA and RAMAKRISHNAN , 1974A}:

$$q_n^{(\alpha,\beta)}(z) = (z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}Q_n^{(\alpha,\beta)}(z), \tag{66}$$

ἔνθα αἱ συναρτήσεις $Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ εἶναι αἱ συναρτήσεις JACOBI δευτέρου εἴδους. Τά σημεῖα x_k δύνανται συνεπῶς νά εὑρίσκωνται ὡς ρίζαι τῶν συναρτήσεων JACOBI δευτέρου εἴδους καί ὄχι ὡς ρίζαι πολυωνύμων JACOBI, ὡς προτείνεται ὑπό τῶν ERDOGAN, GUPTA and COOK {1973}.

H. Μέθοδος GAUSS-LAGUERRE: Ἡ μέθοδος αὕτη δύναται νά ἐφαρμοσθῇ δι' ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα μέ διάστημα ὁλοκληρώσεως τό $[0,\infty)$ καί συνάρτησιν βάρους τήν:

$$w(t) = e^{-t}. \tag{67}$$

Τά χρησιμοποιούμενα ὀρθογώνια πολυώνυμα $p_n(z)$ τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Γ4 καί συμπίπτοντα μέ τά πολυώνυμα $\sigma_n(z)$ τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Γ5 εἶναι τά πολυώνυμα LAGUERRE $L_n(z)$ ἤτοι:

$$\sigma_n(z) = p_n(z) = L_n(z) . \tag{68}$$

Ὅσον ἀφορᾷ περαιτέρω εἰς τάς συναρτήσεις $q_n(z)$, αὗται

ὑπακούουν εἰς τήν αὐτήν ἀναδρομικήν σχέσιν μέ τά πολυώνυμα LAGUERRE, ὡς παρετήρησαν γενικῶς διά τάς συναρτήσεις ταύτας οἱ PAGET and ELLIOTT {1972}, καί συνεπῶς ἔχομεν (HOCHSTRASSER {1965}):

$$n\sigma_n(z) = (2n-1-z)\sigma_{n-1}(z)-(n-1)\sigma_{n-2}(z) . \tag{69}$$

Λαμβάνοντες περαιτέρω ὑπ' ὄψιν τόν ὁρισμόν τοῦ ἐκθετικοῦ ὁλοκληρώματος Ei(z) (GAUTSCHI and CAHILL {1965}):

$$Ei(z) = -\int_{-z}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{t}}{t} dt \tag{70}$$

δυνάμεθα νά διαπιστώσωμεν εὐκόλως ὅτι, λόγῳ καί τοῦ ὁρισμοῦ (4.13) τῶν συναρτήσεων $\sigma_n(z)$, αἱ δύο πρῶται τούτων δίδονται ὑπό τῶν τύπων:

$$\sigma_o(z) = \frac{1}{2}e^{-z}Ei(z) \quad , \quad \sigma_1(z) = (1-z)\sigma_o(z) . \tag{71}$$

Σημειωτέον ὅτι ὁ δεύτερος τῶν τύπων (71) δύναται νά θεωρηθῇ προκύπτων καί ἐκ τῆς ἀναδρομικῆς σχέσεως (69) διά $n=1$.

Τά σημεῖα x_k, ρίζαι τῶν συναρτήσεων $\sigma_n(z)$, δύνανται συνεπῶς νά προκύπτουν εὐχερῶς λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν σχέσεων (69) καί (71).

Θ. Μέθοδος GAUSS-HERMITE: Ἡ μέθοδος αὕτη δύναται νά ἐφαρμοσθῇ δι' ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα μέ διάστημα ὁλοκληρώσεως τό $(-\infty,\infty)$ καί συνάρτησιν βάρους τήν:

$$w(t) = e^{-t^2} . \tag{72}$$

Τά χρησιμοποιούμενα ὀρθογώνια πολυώνυμα $p_n(z)$ τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Γ4 καί συμπίπτοντα μέ τά πολυώνυμα $\sigma_n(z)$ τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα Γ5 εἶναι τά πολυώνυμα HERMITE $H_n(z)$ ἤτοι:

$$\sigma_n(z) = p_n(z) = H_n(z) . \tag{73}$$

Ὅσον ἀφορᾷ περαιτέρω εἰς τάς συναρτήσεις $q_n(z)$, αὗται ὑπακούουν εἰς τήν αὐτήν ἀναδρομικήν σχέσιν μέ τά πολυώνυμα HERMITE, ὡς παρετήρησαν γενικῶς διά τάς συναρτήσεις ταύτας οἱ PAGET and ELLIOTT {1972}, καί συνεπῶς ἔχομεν (HOCHSTRASSER {1965}):

$$q_n(z) = 2zq_{n-1}(z) - 2(n-1)q_{n-2}(z) \quad . \tag{74}$$

Λαμβάνοντες περαιτέρω ὑπ' ὄψιν τόν τύπον (GAUTSCHI {1965}):

$$w(z) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{z-t}\,dt \tag{75}$$

τόν δίδοντα τήν μιγαδικήν συνάρτησιν σφάλματος $w(z)$, τόν τύπον (CODY, PACIOREK and THACHER {1970}):

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{x-t}\,dt \tag{76}$$

τόν δίδοντα τό ὁλοκλήρωμα DAWSON καί τόν ὁρισμόν (4.13) τῶν συναρτήσεων $q_n(z)$, εὑρίσκομεν εὐκόλως διά τήν συνάρτησιν $q_o(z)$ τάς ἐκφράσεις:

$$q_o(z) = -\frac{1}{2}\pi i w(z) \quad (Im z>0) \quad , \quad q_o(z) = \frac{1}{2}\pi i w(-z) \quad (Im z<0) \tag{77}$$

ἐκτός τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος καί:

$$q_o(x) = \sqrt{\pi}F(x) \tag{78}$$

ἐπί τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος. Ἐπίσης διά τήν συνάρτησιν $q_1(z)$ εὑρίσκομεν βάσει τοῦ ὁρισμοῦ (4.13) τῶν συναρτήσεων $q_n(z)$ ὅτι:

$$q_1(z) = 2zq_o(z) \quad , \tag{79}$$

ἔκφρασις, ἥτις δύναται νά θεωρηθῇ προκύπτουσα καί ἐκ τῆς ἀναδρομικῆς σχέσεως (74) διά $n=1$.

Τά σημεῖα x_k, ρίζαι τῶν συναρτήσεων $q_n(z)$, δύνανται συνεπῶς νά προκύπτουν εὐχερῶς λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν σχέ-

σεων (74), (78) καί (79).

I. Τροποποιημένη μέθοδος GAUSS-HERMITE: Ἡ μέθοδος αὕτη δύναται νά ἐφαρμοσθῇ δι' ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα μέ διάστημα ὁλοκληρώσεως τό $[0,\infty)$ καί συνάρτησιν βάρους τήν:

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t} . \tag{80}$$

Ἡ μέθοδος αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς μεθόδου GAUSS - HERMITE διά τῆς ἀλλαγῆς μεταβλητῆς:

$$t = \tau^2 \tag{81}$$

λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι:

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}f(t)dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-\tau^2}f(\tau^2)d\tau , \tag{82}$$

ὅπως καί αἱ ἀναπτυχθεῖσαι εἰς τά ἐδάφια Β καί Δ τροποποιημέναι μέθοδοι GAUSS-LEGENDRE καί LOBATTO-LEGENDRE προέκυψαν ἐκ τῶν μεθόδων GAUSS-LEGENDRE καί LOBATTO-LEGENDRE ἀντιστοίχως.

Περαιτέρω δύναται νά διαπιστωθῇ εὐχερῶς καί κατ'ἀναλογίαν πρός τά εἰς τά ἐδάφια Β καί Δ ἀναφερθέντα ὅτι, εἰς ἣν περίπτωσιν ἡ τροποποιημένη μέθοδος GAUSS-HERMITE μέ n σημεῖα θεωρηθῇ προκύπτουσα ἐκ τῆς μεθόδου GAUSS-HERMITE μέ 2n σημεῖα, ὅτε πρόκειται πράγματι περί μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS, τά πολυώνυμα $\sigma_n(z)$, συμπίπτοντα μέ τά $p_n(z)$, καί αἱ συναρτήσεις $q_n(z)$ δίδονται ὑπό τῶν τύπων:

$$\sigma_n(z) = H_{2n}(\sqrt{z}) \quad , \quad q_n(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}q^*_{2n}(\sqrt{z}) , \tag{83}$$

ἔνθα διά τοῦ ἀστερίσκου δηλοῦνται αἱ συναρτήσεις $q_n(z)$ διά τήν μέθοδον GAUSS-HERMITE.

Ἐάν ἀντιθέτως ἡ τροποποιημένη μέθοδος GAUSS-HERMITE μέ n σημεῖα θεωρηθῇ προκύπτουσα ἐκ τῆς μεθόδου GAUSS-HERMITE μέ (2n-1) σημεῖα, τότε πρόκειται περί μεθόδου RADAU, καθ'ὅ-

σον προφανῶς μεταξύ τῶν σημείων t_i περιλαμβάνεται καί τό σημεῖον $t_i = 0$. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην δύναται εὐχερῶς νά διαπιστωθῇ ὅτι τά πολυώνυμα $\sigma_n(z)$ καί αἱ συναρτήσεις $\underline{\sigma}_n(z)$ δίδονται ὑπό τῶν ἀναλόγων τῶν (83) τύπων:

$$\sigma_n(z) = \sqrt{z}H_{2n-1}(\sqrt{z}) \quad , \quad \underline{\sigma}_n(z) = \underline{\sigma}^*_{2n-1}(\sqrt{z}) \quad . \tag{84}$$

Τά σημεῖα x_k, ρίζαι τῶν συναρτήσεων $\underline{\sigma}_n(z)$, δύνανται συνεπῶς νά προκύπτουν εὐχερῶς λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν τύπων (83) καί (84) ὡς καί τῶν διδομένων εἰς τό προηγούμενον ἐδάφιον Θ τύπων.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι τάς σχετικάς μέ τάς μεθόδους ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων ἐργασίας ἔχομεν ἀναφέρει εἰς τά τμήματα Γ2 καί Γ3 καί τάς σχετικάς μέ τάς μεθόδους ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως καί τά συστήματα ὀρθογωνίων πολυωνύμων εἰς τό τμῆμα Γ1, ἐνταῦθα θά περιορισθῶμεν εἰς τό νά δώσωμεν ὡρισμένας ἐκ τῶν ἀφορωσῶν εἰς τάς διαφόρους συναρτήσεις, τάς ὁποίας συνηντήσαμεν εἰς τό τμῆμα τοῦτο, ἐργασίας.

Οὕτως εἰς τό ἐγχειρίδιον τῶν ABRAMOWITZ and STEGUN {1965} δίδονται αἱ ἰδιότητες καί πίνακες τιμῶν πολλῶν ἐκ τῶν συναρτήσεων τούτων. Ἐκ τῶν περιλαμβανομένων εἰς τό ἐγχειρίδιον τοῦτο ἄρθρων δυνάμεθα νά ἀναφέρωμεν τά τῶν GAUTSCHI and CAHILL {1965} περί ἐκθετικοῦ ὁλοκληρώματος, τοῦ GAUTSCHI {1965} περί συναρτήσεων σφάλματος, τῆς STEGUN {1965} περί συναρτήσεων LEGENDRE, τῆς SLATER {1965} περί συντρεχουσῶν ὑπεργεωμετρικῶν συναρτήσεων, τοῦ OBERHETTINGER {1965} περί ὑπεργεωμετρικῶν συναρτήσεων καί τοῦ HOCHSTRASSER {1965} περί ὀρθογωνίων πολυωνύμων. Τάς κυριωτέρας ἰδιότητας τῶν συναρτήσεων τούτων δυνάμεθα νά εὕρωμεν εἰς τά βιβλία τῶν RAINVILLE {1960} καί BELL {1968}.

Περαιτέρω ὁ ELLIOTT {1971} δίδει ἀσυμπτωτικάς ἐκφράσεις διά τά πολυώνυμα JACOBI καί τάς ἀντιστοίχους συναρτή-

σεις $q_n(z)$, οἱ CODY and THACHER {1968,1969} δίδουν μεθόδους ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ ἑκθετικοῦ ὁλοκληρώματος καί οἱ MILLER and GORDON {1931}, CODY, PACIOREK and THACHER {1970} καί McCABE {1974} τοῦ ὁλοκληρώματος DAWSON.

Πρέπει νά σημειωθῇ τέλος ὅτι τόσον τά πολυώνυμα $p_n(z)$ τῶν διαφόρων θεωρηθέντων εἰς τό τμῆμα τοῦτο συστημάτων ὀρθογωνίων πολυωνύμων ὅσον καί αἱ ἀντίστοιχοι συναρτήσεις $q_n(z)$ αὐτῶν δύνανται νά θεωρηθοῦν, ὡς παρετήρησαν οἱ DONALDSON and ELLIOTT {1972}, ἀμέσως ἐκφραζόμενα συναρτήσει τῶν ὑπεργεωμετρικῶν καί τῶν συντρεχουσῶν ὑπεργεωμετρικῶν συναρτήσεων. Διά τοῦτο αἱ συναρτήσεις αὗται, καίτοι δέν ἐχρησιμοποιήθησαν κατά τήν ἀνάπτυξιν τοῦ τμήματος τούτου, ἐν τούτοις παρουσιάζουν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον διά τήν μελέτην τῶν ἰδιοτήτων τῶν σημείων ἐφαρμογῆς x_k τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων ὡς καί διά τόν ἀριθμητικόν προσδιορισμόν των. Ἐπί τῶν θεμάτων τούτων ἐλπίζομεν νά ἐπανέλθωμεν εἰς προσεχῆ ἐργασίαν μας.

Γ10. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Περαίνοντες τό Κεφάλαιον τοῦτο, ἔνθα ἀνεφέρθημεν εἰς τάς μεθόδους ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων, τάς ὁποίας καί θά χρησιμοποιήσωμεν εἰς τό ἑπόμενον Κεφάλαιον Δ, ὅπου θά τάς ἐφαρμόσωμεν κατά τήν ἐπίλυσιν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων παρουσιαζομένων εἰς συγκεκριμένα προβλήματα ρωγμῶν μέ περαιτέρω προσδιορισμόν τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν, ἐπιθυμοῦμεν νά τονίσωμεν τά κάτωθι:

Πρῶτον ὅτι, εἰς ἣν περίπτωσιν εἶναι ἐπιθυμητός ὁ προσδιορισμός τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως μιᾶς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως κυρίως εἰς τό ἓν ἄκρον ἤ ἀμφότερα τά ἄκρα τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, ὡς συμβαίνει π.χ. κατά τόν προσδιορισμόν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα ρωγμῶν κατά τά ἀναφερθέντα καί εἰς τό τμῆμα Β9, τότε αἱ μέθοδοι ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως RADAU ἤ LOBATTO ἀντιστοίχως δέον ὅπως προτιμῶνται τῆς μεθόδου GAUSS, καίτοι ὑστεροῦν ταύτης κατά τήν ἀκρίβειαν ὑπολογισμοῦ τῶν ὁλοκληρωμάτων, καθ' ὅσον διά τῆς χρήσεως τούτων δέν ἀπαιτεῖται παρεμβολή πρός προσδιορισμόν τῆς τιμῆς τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως εἰς τό ἄκρον ἤ τά ἄκρα τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, ἥτις παρεμβολή εἰσάγει πολύ ἀνώτερα τῶν εἰσαγομένων κατά τόν ἀριθμητικόν ὑπολογισμόν τῶν ὁλοκληρωμάτων σφάλματα.

Δεύτερον ὅτι κατά τόν ἀριθμητικόν ὑπολογισμόν ὁλοκληρωμάτων δέον ὅπως γίνεται πλήρης ἐκμετάλλευσις τυχουσῶν χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων τῆς πρός ὁλοκλήρωσιν συναρτήσεως πρός τόν σκοπόν ὅπως ἐπιτυγχάνεται ἡ κατά τό δυνατόν μεγαλυτέρα ἀκρίβεια εἰς τόν ὑπολογισμόν ἑνός ὁλοκληρώματος ἄνευ αὐξήσεως τῶν ἀπαιτουμένων ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν, πάντως κατόπιν μελέτης τοῦ ὅλου προβλήματος. Χαρακτηριστικόν σχετικόν ἀντιπαράδειγμα ἀποτελεῖ ἡ ὑπό τοῦ LONGMAN {1958} ἀναγωγή, κατά τόν ὑπολογισμόν ἑνός ἰδιομόρφου ὁλοκληρώματος, τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως $[-\alpha,\alpha]$ εἰς τό διάστημα $[0,\alpha]$ λόγῳ τῆς

ἰδιότητος τῆς ὁλοκληρουμένης συναρτήσεως νά εἶναι ἀρτία, μέ ἀποτέλεσμα ἡ ἀναπτυχθεῖσα ὑπό τούτου μέθοδος νά εἶναι ἡμισείας ἀκριβείας ἔναντι τῆς ἀναπτυχθείσης ἀργότερον ὑπό τοῦ PIESSENS {1970} μεθόδου ὑπολογισμοῦ ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων, ἡ ὁποία μέθοδος βασικῶς δέν διαφέρει τῆς τοῦ LONGMAN παρά καθ' ὅτι δέν ἐγένετο ἀναγωγή τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως [-α,α] εἰς τό διάστημα [0,α].

Τρίτον ὅτι, εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου ἡ πρός ὁλοκλήρωσιν συνάρτησις ἤ αἱ παράγωγοι αὐτῆς παρουσιάζουν ἀσυνεχείας κατά μῆκος τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, τότε ὑπεισέρχονται αἰσθητά σφάλματα κατά τόν ἀριθμητικόν ὑπολογισμόν ὁλοκληρωμάτων. Ἐάν ὑπάρχῃ ἓν μόνον τοιοῦτο σημεῖον ἀσυνεχείας κατά μῆκος τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, τότε ἡ διάσπασις τοῦ ὅλου διαστήματος εἰς δύο διαστήματα ἀποτελεῖ ἐνίοτε μίαν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ.

Τέταρτον δέ ὅτι εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις παράλειψις τῆς θεωρήσεως ἰδιομορφιῶν τῆς πρός προσδιορισμόν ἐκ τῆς ἐπιλύσεως μιᾶς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως συναρτήσεως προκαλεῖ μικρά σχετικῶς σφάλματα εἰς τάς προκυπτούσας τιμάς τῆς συναρτήσεως ταύτης μακράν τοῦ σημείου, ὅπου παρουσιάζεται ἡ προαναφερθεῖσα ἰδιομορφία. Μία τοιαύτη ὅμως παράλειψις θεωρήσεως τῆς ἰδιομορφίας δέν συνιστᾶται νά γίνεται ἐν γένει.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Σχετικόν μέ τήν τρίτην ἐκ τῶν ἀναφερθεισῶν εἰς τό τμῆμα τοῦτο παρατηρήσεων εἶναι τό ἄρθρον τοῦ RABINOWITZ {1968}, ὅστις ἐμελέτησε τά προκαλούμενα σφάλματα ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως συναρτήσεων, τῶν ὁποίων οἱ παράγωγοι ἀπό μιᾶς τάξεως καί ἄνω παρουσιάζουν ἀσυνεχείας ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως. Ὡσαύτως εἰς πλείστας ἐργασίας ἐκ τῶν ἀναφερομένων εἰς τάς μεθόδους ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως εὑρίσκονται παρατηρήσεις ἀνάλογοι τῶν εἰς τό τμῆμα τοῦτο ἀναφερθεισῶν.