ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Γ1. ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

Τά προβλήματα ρωγμῶν, ἅτινα ἐμελετήθησαν εἰς τά Κεφάλαια Α καί Β, ὁδηγοῦν τελικῶς εἰς τήν ἐπίλυσιν μιᾶς ἤ περισσοτέρων μιγαδικῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων μέ πυρῆνας CAUCHY δυναμένων νά ἀναλυθοῦν εἰς ἓν σύστημα πραγματικῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων μέ πυρῆνας CAUCHY ; Λέγοντες ἐφεξῆς ἰδιομόρφους ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις θά νοῶμεν ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις μέ πυρῆνας CAUCHY καί ὄχι ἁπλῶς μέ πυρῆνας παρουσιάζοντας ἰδιομορφίας εἰς τά ἄκρα τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως λόγῳ τῶν πιθανώτατα ὑπαρχουσῶν συναρτήσεων βάρους.

Διά τήν ἐπίλυσιν μιᾶς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως ἤ ἑνός συστήματος ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων ὑπάρχουν κατά βάσιν δύο τρόποι ἐργασίας. Ὁ εἷς συνίσταται εἰς τήν ἄμεσον ἐφαρμογήν ἀριθμητικῶν μεθόδων πρός ἐπίλυσιν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως, ὁ δ' ἕτερος εἰς τήν ἀναγωγήν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως εἰς ἰσοδύναμον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν FREDHOLM, ἐφαρμογήν δέ ἀριθμητικῶν μεθόδων ἐπιλύσεως ἐπί τῆς τελευταίας. Ὁ δεύτερος οὗτος τρόπος ἐργασίας εἶναι καί ὁ συνηθέστερος, καθ' ὅσον μέθοδοι ἐπιλύσεως ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων FREDHOLM ἔχουν ἀναπτυχθῆ πολλαί, μειονεκτεῖ ὅμως ἔναντι τοῦ πρώτου, διότι ἡ μετατροπή μιᾶς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως εἰς ἰσοδύναμον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν FREDHOLM δέν εἶναι ἀφ' ἑνός τόσον ἁπλῆ ἐργασία, δημιουργεῖ δέ ἀφ' ἑτέρου μίαν ἀρκετά πολυπλόκου μορφῆς ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν FREDHOLM.

Ἡ πρώτη μέθοδος, τῆς ἀπ' εὐθείας ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως, ἔχει ἀναπτυχθῆ καί ἐφαρμοσθῆ κατά τά τελευταῖα μόλις ἔτη. Συνίσταται κατ' ἀρχήν εἰς τήν κατά προσέγγισιν ἀντικατάστασιν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως δι' ἑνός γραμμικοῦ συστήματος ἐξισώσεων μέ ἀγνώστους εἴτε τάς τιμάς τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως (ἤ τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων εἰς περίπτωσιν συστήματος

ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων) εἴτε τούς συντελεστάς εἰς τό ἀνάπτυγμα τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως εἰς σειράν γνωστῶν ὀρθογωνίων μεταξύ των πολυωνύμων.

Κατά τά τελευταῖα ἔτη ἀνεπτύχθησαν ὡσαύτως αἱ μέθοδοι ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ ἰδιομόρφων, κατά CAUCHY, ὁλοκληρωμάτων. Ἐκ τούτων ἡ καλυτέρα εἶναι ἡ μέθοδος ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS, ἥτις παρέχει τά πλέον ἀκριβῆ ἀποτελέσματα μέ τήν αὐτήν ποσότητα ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν, ἐάν συγκριθῇ μέ τάς ἄλλας μεθόδους ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως. Ἡ ἐφαρμογή τῆς μεθόδου ὁλοκληρώσεως GAUSS εἰς ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα ἦλθε τρόπον τινά ὡς φυσική συνέπεια τῆς ἀναπτύξεως τῆς μεθόδου αὐτῆς διά τά κοινά ὁλοκληρώματα ὡς καί τά ὁλοκληρώματα μέ συναρτήσεις βάρους παρουσιαζούσας ἰδιομορφίας εἰς τά ἄκρα τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως.

Εἰς τό Κεφάλαιον τοῦτο σκοπόν μας θά ἀποτελέσῃ ἡ γενίκευσις τῆς μεθόδου ὁλοκληρώσεως GAUSS δι' ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα, ὥστε νά περιλάβῃ καί ὡρισμένας περιπτώσεις συναρτήσεων βάρους καί διαστημάτων ὁλοκληρώσεων μή ἐξετασθεισῶν μέχρι τοῦδε, εἰ μή διά κοινά ὁλοκληρώματα, ὡσαύτως δέ ἡ χρησιμοποίησις τῶν μεθόδων ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως RADAU καί LOBATTO δι' ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα. Αἱ μέθοδοι αὗται ὑστεροῦσαι κατά τήν ἀκρίβειαν τῆς μεθόδου GAUSS δεικνύονται ἐν τούτοις χρήσιμοι εἰς πολλάς περιπτώσεις. Δι' ὅλων τούτων τῶν ἀριθμητικῶν μεθόδων ὁλοκληρώσεως ἐπιτυγχάνομεν τήν ἀντικατάστασιν τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων μέ ἀθροίσματα. Αἱ ἄγνωστοι συναρτήσεις ἐμφανίζονται πλέον εἰς συγκεκριμένα σημεῖα τῶν διαστημάτων ὁλοκληρώσεως. Τελικῶς δέ, ὡς θά δειχθῇ ἐν συνεχείᾳ, μία ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις ἢ ἓν σύστημα ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων δύναται νά ἀναχθῇ εἰς τήν ἐπίλυσιν ἑνός γραμμικοῦ συστήματος ἐξισώσεων. Οὗτος δέ εἶναι ὁ βασικός λόγος, δι' ὃν προετιμήσαμεν τόν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα τρόπον ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων. Ἐκτελοῦντες ὀλίγους σχετικῶς ἀριθμητι-

κούς ὑπολογισμούς εὑρίσκομεν ἀποτελέσματα σχετικῶς μεγάλης ἀκριβείας.

Μετά τήν ἐπίλυσιν τοῦ γραμμικοῦ συστήματος ἐξισώσεων θά γνωρίζωμεν τάς τιμάς τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως εἰς συγκεκριμένα, ὡς προελέχθη, σημεῖα τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως. Ἐάν ἐπιθυμῶμεν ὅμως νά ἔχωμεν μίαν ἔκφρασιν τῆς ζητουμένης συναρτήσεως καθ' ὅλον τό μῆκος τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, τότε πρέπει νά ἐφαρμόσωμεν τήν ἀριθμητικήν μέθοδον τῆς παρεμβολῆς, ἐργασίαν βεβαίως οὐχί δυσχερῆ.

Ἐάν συγκρίνωμεν τέλος τάς ἤδη ἀναπτυχθείσας μεθόδους ἀπ' εὐθείας ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων μετά τῆς ἐνταῦθα ἐκτεθησομένης, θά διαπιστώσωμεν ὅτι εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις αὗται πράγματι εἶναι ἰσοδύναμοι μέ τήν ἰδικήν μας, εἰς ἄλλας ὅμως περιπτώσεις ὑπάρχουν σοβαραί διαφοραί, αἵτινες δέν κατέστη δυνατόν νά ἑρμηνευθοῦν μέχρι τοῦδε. Πιστεύεται πάντως ὅτι ἡ κάτωθι ἐκτιθεμένη μέθοδος ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων εἶναι ἡ πλέον ἀκριβής καί συστηματικῶς παρουσιαζομένη ἐξ ὅλων τῶν μέχρι τοῦδε παρουσιασθεισῶν.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Θεωροῦμεν σκόπιμον νά δώσωμεν εἰς τό σημεῖον τοῦτο τήν βιβλιογραφίαν τήν σχετικήν μέ τάς μεθόδους ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως καί τά χρησιμοποιούμενα εἰς ταύτας συστήματα ὀρθογωνίων πολυωνύμων. Ὅσον ἀφορᾷ δέ εἰς τάς σχετικάς μέ τάς μεθόδους ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων ἐργασίας, θά ἀναφέρωμεν ὅσας ἐκ τούτων ἔχομεν ὑπ' ὄψιν καί κρίνομεν ἀξιολόγους εἰς τό ἑπόμενον τμῆμα Γ2.

Ἀρκετά στοιχεῖα ἐπί τῶν μεθόδων ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως καί κυρίως ἐπί τῶν μεθόδων GAUSS, RADAU καί LOBATTO, αἵτινες καί κατ' ἐξοχήν θά μᾶς ἀπασχολήσουν κατωτέρω, δυνάμεθα νά εὕρωμεν κατ' ἀρχήν εἰς ὅλα τά βιβλία ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως. Μεταξύ δέ τῶν βιβλίων αὐτῶν δυνάμεθα νά ἀναφέρωμεν τά τῶν HILDEBRAND {1956}, KOPAL {1961}, RALSTON {1965} ὡς καί

τό κλασσικόν σύγγραμμα τοῦ MINEUR {1952}, ὅστις μελετᾷ πλεῖστα προβλήματα ἀριθμητικῶν ὁλοκληρώσεων. Ὡσαύτως πολύ χρήσιμον εἶναι καί τό σύγγραμμα τῶν DAVIS and RABINOWITZ {1967} τό ἀναφερόμενον ἀποκλειστικῶς εἰς τάς μεθόδους ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως καί περιέχον σχετικά προγράμματα ὑπολογιστοῦ ὡς καί πλήρη σειράν σχετικῶν παραπομπῶν. Εὔχρηστον τέλος παραπομπήν διά προβλήματα ἀριθμητικῶν ὁλοκληρώσεων ἀποτελεῖ τό ἄρθρον τῶν DAVIS and POLONSKY {1965}, εἰς τό ὁποῖον περιλαμβάνονται καί πίνακες τετμημένων ὡς καί βαρῶν.

Πλέον συγχρόνους ἀναπτύξεις τοῦ προβλήματος τῶν ἀριθμητικῶν ὁλοκληρώσεων εὑρίσκομεν ἐξ ἄλλου εἰς τά ἄρθρα τῶν TAKAHASI and MORI {1970,1971} ὡς καί τῶν DONALDSON and ELLIOTT {1972} διά διάστημα ὁλοκληρώσεως ἀποτελοῦν τμῆμα τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος καί εἰς τό ἄρθρον τοῦ FORNARO {1973} διά διάστημα ὁλοκληρώσεως κλειστήν ἐπίπεδον καμπύλην.

Ἐπί τῶν μεθόδων ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS, RADAU καί LOBATTO, αἱ ὁποῖαι καί κυρίως μᾶς ἐνδιαφέρουν, διότι εἶναι καί αἱ πλέον ἀκριβεῖς πρακτικῶς εὔχρηστοι μέθοδοι ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως, πλήρης ἀνάπτυξις εὑρίσκεται εἰς τήν μελέτην τοῦ BOUZITAT {1952}. Ἕν πρόβλημα βελτιώσεως τῶν μεθόδων GAUSS καί LOBATTO διά προσθέσεως σημείων ἐξετάζουν ἐπίσης οἱ PIESSENS and BRANDERS {1974}.

Ὅσον ἀφορᾷ περαιτέρω εἰς τήν ἐκτίμησιν τοῦ σφάλματος τῶν μεθόδων ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως, ἔχουν δημοσιευθῆ πολλά σχετικά ἄρθρα, μεταξύ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νά ἀναφέρωμεν τά γενικῶς ἀντιμετωπίζοντα τό πρόβλημα τοῦτο ἄρθρα τῶν TUAN {1971}, TAKAHASI and MORI {1970,1971} καί DONALDSON and ELLIOTT {1972} ὡς καί τά ἀναφερόμενα μόνον εἰς τάς μεθόδους GAUSS, RADAU ἤ LOBATTO ἄρθρα τῶν McNAMEE {1964}, CHAWLA and JAIN {1968A,1968B}, RABINOWITZ {1968}, CHAWLA {1968, 1969} καί KAMBO {1970,1971}.

Διά τήν πρακτικήν ἐφαρμογήν τῶν μεθόδων ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS, RADAU καί LOBATTO χρησιμώτατον εἶναι ἑ-

πίσης τό βιβλίον τῶν STROUD and DON SECREST {1966}, εἰς τό ὁποῖον περιλαμβάνονται, πέραν τῆς θεωρίας, ἐκτενεῖς πίνακες τετμημένων καί βαρῶν ἀπαραίτητοι διά τήν ἐφαρμογήν τῶν προαναφερθεισῶν μεθόδων ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως εἰς συγκεκριμένα προβλήματα. Οἱ πίνακες οὗτοι καλύπτουν τά συνηθέστερον παρουσιαζόμενα διαστήματα ὁλοκληρώσεως καί συναρτήσεις βάρους.

Μέ εἰδικάς καί ἐν γένει σπανίως παρουσιαζομένας περιπτώσεις συναρτήσεων βάρους καί ἀντιστοίχων διαστημάτων ὁλοκληρώσεως ἔχουν ἀσχοληθῆ μεταξύ τῶν ἄλλων καί οἱ BERTHOD-ZABOROWSKI {1952}, STEEN, BYRNE and GELBARD {1969}, DANLOY {1973}, KUMAR and JAIN {1974} καί KUMAR {1974}, οἵτινες ἀνέπτυξαν τάς ἀντιστοίχους μορφάς τῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁκληρώσεως GAUSS.

Ὅσον ἀφορᾷ ἀκολούθως εἰς τό πρόβλημα τοῦ ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ ἰδιομόρφων, κατά CAUCHY, ὁλοκληρωμάτων, τοῦτο ἀντεμετωπίσθη κατ' ἀρχήν μέν ὑπό τῶν LONGMAN {1958}, STEWART {1960} καί PIESSENS {1970}, οἵτινες ἐπέτυχον διά τεχνασμάτων νά ἄρουν τήν ἰδιομορφίαν, προσφάτως δέ ὑπό τοῦ HUNTER {1972} καί τῶν CHAWLA and RAMAKRISHNAN {1974A}, οἵτινες ἐπεξέτειναν τήν ἐφαρμογήν τῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS καί εἰς τήν περίπτωσιν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων. Ὡσαύτως, οἱ PAGET and ELLIOTT (PAGET and ELLIOTT {1972}, ELLIOTT and PAGET {1975}) ἀνέπτυξαν μέθοδον ὑπολογισμοῦ ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων δι' ἀναπτύξεως τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως εἰς σειράν ὀρθογωνίων πολυωνύμων, ὁ HUNTER {1973} ὑπελόγισεν ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα διά χρήσεως τῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως ROMBERG, οἱ δέ CHAWLA and RAMAKRISHNAN {1974B} ἀνέπτυξαν μέθοδον ὑπολογισμοῦ ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων μέ πυρῆνας περιοδικάς συναρτήσεις.

Διά τήν ἀνάπτυξιν τῶν μεθόδων ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS, RADAU καί LOBATTO ἀπαραίτητος εἶναι ἡ γνῶσις ὡρισμένων στοιχείων ἐκ τῆς θεωρίας καί τῶν ἰδιοτήτων τῶν κυριωτέρων συστημάτων ὀρθογωνίων πολυωνύμων. Κλασσικόν σχε-

τικόν σύγγραμμα εἶναι τό τοῦ SZEGÖ {1959}, τό ὁποῖον πραγματεύεται κατά τόν καλύτερον τρόπον πᾶν θέμα ἀφορῶν εἰς τά συστήματα ὀρθογωνίων πολυωνύμων. Χρήσιμον ὡσαύτως καί εὐκολώτερον κατανοητόν εἶναι καί τό σύγγραμμα τοῦ TRICOMI {1961}. Τέλος τάς ἰδιότητας τῶν διαφόρων συστημάτων ὀρθογωνίων πολυωνύμων δυνάμεθα νά εὕρωμεν εἰς πλεῖστα βιβλία καί ἐγχειρίδια, μεταξύ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νά ἀναφέρωμεν τά βιβλία τῶν RAINVILLE {1960} καί BELL {1968}, εἰς τά ὁποῖα μελετῶνται αἱ κυριώτεραι παρουσιαζόμεναι εἰς διάφορα προβλήματα εἰδικαί συναρτήσεις, ὡς καί τό σχετικόν μέ τά συστήματα ὀρθογωνίων πολυωνύμων ἄρθρον τοῦ HOCHSTRASSER {1965} τό περιλαμβανόμενον εἰς τό χρησιμώτατον ἐγχειρίδιον τῶν ABRAMOWITZ and STEGUN {1965}, τό ὁποῖον ἀναφέρει τάς ἰδιότητας τῶν πλείστων συνήθως παρουσιαζομένων συναρτήσεων συνοδευομένας μάλιστα ὑπό ἀριθμητικῶν πινάκων τιμῶν τῶν συναρτήσεων τούτων.

Γ2. ΕΠΙ ΤΩΝ ΥΦΙΣΤΑΜΕΝΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Θεωρήσωμεν τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν :

$$\varphi(x)+\int_{\alpha}^{\beta}K(t,x)\varphi(t)dt = f(x) \qquad (1)$$

μέ τάς μεταβλητάς t,x πραγματικάς καί ἐντός τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$. Ὁ πυρήν $K(t,x)$ θεωρεῖται παρουσιάζων ἰδιομορφίαν τύπου CAUCHY εἰς τήν θέσιν $t = x$, ἤτοι ἔχομεν :

$$K(t,x) = \frac{K_1(t,x)}{t-x}+K_2(t,x), \qquad (2)$$

ἔνθα $K_1(t,x)$ καί $K_2(t,x)$ συνεχεῖς συναρτήσεις. Ἀνεξαρτήτως τούτου ὁ πυρήν $K(t,x)$ δύναται νά παρουσιάζῃ ἰδιομορφίας καί εἰς τά ἄκρα α καί β τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως. Ἡ ἄγνωστος συνάρτησις $\varphi(t)$ θεωρεῖται πάντως συνεχής ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως.

Πρός ἐπίλυσιν τῆς ἀνωτέρω ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως δυνάμεθα νά ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς : Γράφομεν ταύτην ὑπό τήν κάτωθι ἰσοδύναμον μορφήν :

$$\varphi(x)\left\{1+\int_{\alpha}^{\beta}K(t,x)dt\right\}+\int_{\alpha}^{\beta}K(t,x)\{\varphi(t)-\varphi(x)\}dt = f(x). \qquad (3)$$

Τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ θεωρουμένης ἐπαληθευούσης τήν συνθήκην HÖLDER, τό δεύτερον ὁλοκλήρωμα δύναται νά ὑπολογισθῇ κατά προσέγγισιν ἀριθμητικῶς, ἔστω διά τῆς μεθόδου ὁλοκληρώσεως GAUSS, ἀντικαθιστάμενον οὕτως ὑπό ἀθροίσματος. Ὡσαύτως ἡ συνάρτησις :

$$y(x) = 1+\int_{\alpha}^{\beta}K(t,x)dt \qquad (4)$$

δύναται νά θεωρηθῇ ὡς γνωστή, ὁπότε ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (3) ἀνάγεται εἰς τό κάτωθι σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων :

$$y(x_k)\varphi(x_k)+\sum_{i=1}^{n}A_iK(x_i,x_k)\{\varphi(x_i)-\varphi(x_k)\} = f(x_k),$$

$$i,k = 1,2,\ldots,n, \tag{5}$$

ἔνθα τά σημεῖα x_i καί x_k εἶναι αἱ τετμημέναι αἱ χαρακτηριστικαί τῆς χρησιμοποιηθείσης μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως καί οἱ συντελεσταί A_i τά ἀντίστοιχα βάρη. Τό σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων (5) εἶναι σύστημα n ἐξισώσεων μέ n ἀγνώστους, τάς τιμάς τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ εἰς τά σημεῖα x_k, τά ὁποῖα εἶναι τά αὐτά μέ τά σημεῖα x_i, ἐπιλυόμενον δέ δίδει τάς τιμάς τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως $\varphi(x)$ εἰς τά θεωρηθέντα σημεῖα. Διά παρεμβολῆς δύναται περαιτέρω νά προκύψῃ ἔκφρασις τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ διά κάθε σημεῖον ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως.

Ἡ μέθοδος αὕτη ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων ἀνεπτύχθη ὑπό τῶν KANTOROVICH and KRYLOV {1958,Ch.II, §2} , μόνον δέ μειονέκτημα ταύτης ἀποτελεῖ τό γεγονός ὅτι ὁ ὑπολογισμός τῆς παραστάσεως :

$$K(x_i,x_k)\left\{\varphi(x_i)-\varphi(x_k)\right\}, \qquad \text{διά } x_i = x_k$$

εἶναι δυσχερής, δεδομένου ὅτι λόγῳ τῆς συμπεριφορᾶς (2) τοῦ πυρῆνος $K(t,x)$ εἶναι τῆς μορφῆς 0:0. Συνιστᾶται βεβαίως ὁ ὑπολογισμός της διά παρεμβολῆς, ἔστω γραμμικῆς, ὅτε προκύπτει :

$$K(x_k,x_k)\left\{\varphi(x_k)-\varphi(x_k)\right\} = \frac{x_{k+1}-x_k}{x_{k+1}-x_{k-1}}K(x_k,x_{k-1})\left\{\varphi(x_{k-1})-\right.$$
$$\left.-\varphi(x_k)\right\}+\frac{x_k-x_{k-1}}{x_{k+1}-x_{k-1}}K(x_k,x_{k+1})\left\{\varphi(x_{k+1})-\varphi(x_k)\right\}. \tag{6}$$

Ἡ τοιαύτη ὅμως παρεμβολή εἰσάγει σφάλμα, τό ὁποῖον εἶναι ἀνωτέρας τάξεως τοῦ σφάλματος τοῦ ὀφειλομένου εἰς τήν ἀριθμητικήν ὁλοκλήρωσιν, ἰδίως ὅταν αὕτη εἶναι ὁλοκλήρωσις GAUSS. Πράγματι ἡ ὁλοκλήρωσις GAUSS μέ n σημεῖα εἰσάγει σφάλμα; ἐφ'ὅσον ἡ ὁλοκληρουμένη συνάρτησις εἶναι βαθμοῦ 2n ἤ καί μεγαλυτέρου, ἐνῷ ἡ γραμμική παρεμβολή εἰσάγει σφάλμα, ἐάν ἐφαρμοσθῇ ἐπί συναρτήσεως μόλις δευτέρου βαθμοῦ. Παρεμβολή ἀνωτέρας τάξεως μειώνει μέν τό σφάλμα, ἐν τούτοις ὅμως

ἑξακολουθεῖ νά εἶναι ἀνεπαρκής σχετικῶς μέ τήν ὑψηλῆς ἀκριβείας μέθοδον ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS.

Μία ἑτέρα δυσχέρεια τῆς μεθόδου ταύτης ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων εἶναι ὅτι ὁ ὑπολογισμός τῆς συναρτήσεως $y(x)$ τοῦ τύπου (4) πιθανῶς πρακτικῶς νά παρουσιάζῃ αἰσθητάς δυσκολίας.

Δύο ἄλλαι μέθοδοι ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων εἰσήχθησαν ὑπό τῶν ERDOGAN, GUPTA καί ἄλλων μέ σειράν ἄρθρων μέ ἐφαρμογάς κυρίως εἰς προβλήματα εὐθυγράμμων ρωγμῶν. Σύνοψιν τῶν μεθόδων τούτων ἀποτελεῖ τό ἄρθρον τῶν ERDOGAN, GUPTA and COOK {1973} , εἰς τό ὁποῖον καί παραπέμπομεν.

Ἀμφότεραι αἱ μέθοδοι συνίστανται εἰς τήν ἀναγωγήν μιᾶς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως ἤ ἑνός συστήματος ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων εἰς ἓν γραμμικόν σύστημα πεπερασμένου ἀριθμοῦ ἐξισώσεων. Κατά μέν τήν μίαν μέθοδον ἄγνωστοι τοῦ γραμμικοῦ τούτου συστήματος ἐξισώσεων εἶναι οἱ συντελεσταί τοῦ ἀναπτύγματος τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως $\varphi(x)$ (θεωρουμένης συνεχοῦς ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως) εἰς σειράν μέ ὅρους κατάλληλα ὀρθογώνια πολυώνυμα $p_n(x)$ ὡς πρός συνάρτησιν βάρους $w(x)$ ἱκανοποιοῦσαν τάς ἰδιομορφίας τοῦ προσεγγιζομένου ὁλοκληρώματος εἰς τά ἄκρα τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως. Ἔχομεν δηλαδή διά τήν ἀκολουθίαν τῶν ὀρθογωνίων πολυωνύμων :

$$\int_{-1}^{1} w(x)p_m(x)p_n(x) = 0, \qquad n \neq m \tag{7}$$

καί θεωροῦμεν τό ἀνάπτυγμα τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως $\varphi(x)$ τῆς μορφῆς :

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i p_i(x). \tag{8}$$

Οἱ συντελεσταί A_i προσδιορίζονται ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προκύπτοντος ἐκ τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως γραμμικοῦ συστήματος ἐξισώσεων.

Ἡ μέθοδος αὕτη ἐφηρμόσθη μέ διαστήματα ὁλοκληρώσεως [-1,1], εἰς τά ὁποῖα δύναται βεβαίως νά ἀναχθῇ καί πᾶν ἕτερον διάστημα ὁλοκληρώσεως [α,β], ἐφ'ὅσον τά α καί β εἶναι πεπερασμένα. Δέν ἐφηρμόσθη εἰς διαστήματα ὁλοκληρώσεως μέ τό ἓν ἤ καί ἀμφότερα τά ἄκρα αὐτῶν τείνοντα εἰς τό ±∞. Βασικόν μειονέκτημα τῆς μεθόδου ταύτης εἶναι ὅτι ἡ σειρά (8) ὤφειλεν ὅπως εἶναι ἄπειρος (n → ∞), ὁ δέ περιορισμός της εἰς πεπερασμένον n, ὅστις ἀποβλέπει εἰς τό νά προκύψῃ ἐκ τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως πεπερασμένον σύστημα n γραμμικῶν ἐξισώσεων μέ n ἀγνώστους, μειώνει τήν ἀκρίβειαν τῆς μεθόδου, ἥτις θά ἦτο πλέον ἀκριβής, μόνον ἐφ'ὅσον ἡ ἄγνωστος συνάρτησις φ(x) ἦτο βαθμοῦ τό πολύ μέχρι (n-1).

Ἡ πρώτη αὕτη μέθοδος ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων πέραν τοῦ προαναφερθέντος ἄρθρου τῶν ERDOGAN, GUPTA and COOK {1973} ἀναπτύσσεται καί εἰς τό ἄρθρον τοῦ ERDOGAN {1969}, ἐφαρμογάς της δέ εὑρίσκομεν εἰς τά ἄρθρα τῶν ERDOGAN and GUPTA {1971A}, {1971B}, {1971C}, {1972B} καί εἰς τό ἄρθρον τῶν RATWANI and ERDOGAN {1973}.

Ὡς ἐπί τό πλεῖστον οἱ πυρῆνες τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων ἔχουν ἰδιομορφίας εἰς τά ἄκρα τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως τάξεως ±1/2, πρᾶγμα τό ὁποῖον ὁδηγεῖ εἰς τήν χρησιμοποίησιν ὡς ὀρθογωνίων πολυωνύμων τῶν πολυωνύμων CHEBYSHEV πρώτου καί δευτέρου εἴδους.

Ἡ δευτέρα μέθοδος ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων ἡ ἀναπτυσσομένη εἰς τό προαναφερθέν ἄρθρον τῶν ERDOGAN, GUPTA and COOK {1973}, ἥτις ὁμοιάζει πολύ μέ τήν ὑφ'ἡμῶν χρησιμοποιηθησομένην, συνίσταται εἰς τήν ἀναγωγήν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως, ἤ ἀναλόγου συστήματος ἐξισώσεων, εἰς γραμμικόν σύστημα ἐξισώσεων μέ ἀγνώστους τάς τιμάς τῆς προσδιοριστέας συναρτήσεως, ἤ τῶν προσδιοριστέων συναρτήσεων, εἰς συγκεκριμένα σημεῖα τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, τό ὁποῖον ἐξακολουθεῖ νά θεωρῆται ὡς τό [-1,1]. Πρός τοῦτο ὁ πυρήν τοῦ ἰδιομόρφου ὁλο-

κληρώματος $K(t,x)$ θεωρεῖται τῆς μορφῆς :

$$K(t,x) = \left\{ \frac{A}{t-x} + k(t,x) \right\} w(t), \tag{9}$$

ἔνθα A σταθερά, $k(t,x)$ συνεχής συνάρτησις ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως καί $w(t)$ ἡ συνάρτησις βάρους ἡ ὀφειλομένη εἰς τάς ἰδιομορφίας τοῦ πυρῆνος ἤ, ὅπερ ταύτόν, τῆς ἀρχικῶς προσδιοριστέας συναρτήσεως εἰς τά ἄκρα τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως.

Ἀκολούθως τό μέν μή ἰδιόμορφον τμῆμα τοῦ ὁλοκληρώματος, μέ πυρῆνα $k(t,x)w(t)$, ὑπολογίζεται δι'ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS, τό δέ ἰδιόμορφον τμῆμα τοῦ ὁλοκληρώματος, μέ πυρῆνα $\frac{A}{t-x}w(t)$ ὑπολογίζεται μέ πολύπλοκον τρόπον ἐξαρτώμενον ἐκ τῆς συναρτήσεως $w(t)$ καί στηριζόμενον εἰς τάς ἰδιότητας τῶν ἀντιστοίχων ὀρθογωνίων πολυωνύμων. Ὁ τοιοῦτος τρόπος ὁλοκληρώσεως, καίτοι φέρεται ὡς ἀκριβής μόνον δι'ὁλοκληρουμένας συναρτήσεις μέχρι βαθμοῦ $(n-1)$, πέραν τῆς συναρτήσεως βάρους $w(t)$, ἐν τούτοις εἶναι ἀκριβής διά τήν περίπτωσιν συναρτήσεων βάρους :

$$w(t) = (1-t)^{\pm\frac{1}{2}}(1+t)^{\pm\frac{1}{2}} \tag{10}$$

δι'ὁλοκληρουμένας συναρτήσεις μέχρι βαθμοῦ $(2n-1)$, πρόκειται δέ, ὡς θά ἐκτεθῇ ἐν συνεχείᾳ, κατ'οὐσίαν δι'ἀριθμητικήν ὁλοκλήρωσιν τύπου GAUSS.

Ἡ μέθοδος αὕτη ὁλοκληρώσεως ἐφαρμόζεται δι' ἰδιομόρφους ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις τῆς μορφῆς :

$$\int_{-1}^{1} K(t,x)\varphi(t)dt = f(x), \tag{11}$$

τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως $\varphi(t)$ ἐμφανιζομένης δηλαδή μόνον ἐντός τοῦ ὁλοκληρώματος, καθ'ὅσον τά συγκεκριμένα σημεῖα t_i καί x_k ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, ἅτινα θά χρησιμοποιηθοῦν κατά τήν ἀναγωγήν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως εἰς σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων, δέν εἶναι τά ἴδια, ὡς συνέβαινεν εἰς τήν περίπτωσιν τῆς ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ

τμήματος τούτου ἐκτεθείσης μεθόδου, ἀλλ' εἶναι δύο ἐντελῶς διάφοροι ὁμάδες σημείων. Ἐν τούτοις, ὡς εἰς τάς πλείστας περιπτώσεις συμβαίνει, ἡ ἄγνωστος συνάρτησις ἤ αἱ ἄγνωστοι συναρτήσεις, ἐμφανίζονται μόνον ἐντός ὁλοκληρωμάτων.

Εἰς πάσας τάς περιπτώσεις τά σημεῖα t_i, $i = 1,2,\ldots,n$, εἶναι αἱ τετμημέναι τῆς ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS, ἤτοι αἱ ρίζαι τοῦ πολυωνύμου $p_n(x)$ (τοῦ πολυωνύμου βαθμοῦ n τῆς ἀκολουθίας τῶν ὀρθογωνίων πολυωνύμων ὡς πρός ὡρισμένην συνάρτησιν βάρους $w(t)$). Ἀναλόγως τά σημεῖα x_k εἶναι κατά τά ἐκτιθέμενα εἰς τό προαναφερθέν ἄρθρον αἱ ρίζαι ἑτέρου πολυωνύμου καθοριζομένου ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως. Εἰς τό σημεῖον τοῦτο, ὡς θά ἐκτεθῇ κατωτέρω, καταλήγομεν εἰς ἕτερα ἀποτελέσματα, πλήν τῆς περιπτώσεως συναρτήσεων βάρους τῆς μορφῆς (10). Δεδομένου δέ ὅτι δέν εὕρομεν τήν ἀπόδειξιν, εἰς τήν ὁποίαν στηρίζεται ἡ εὕρεσις τῶν σημείων x_k, $k = 1,2,\ldots,n$, ὡς ριζῶν ἑνός πολυωνύμου βαθμοῦ n καθοριζομένου κατά περίπτωσιν εἰς τό προαναφερθέν ἄρθρον, ἐξακολουθοῦμεν νά ἀμφιβάλλωμεν περί τῆς ὀρθότητος τῆς ἐκλογῆς τῶν σημείων x_k, ἅτινα, ὡς προανεφέρθη, διαφέρουν τῶν ὑφ' ἡμῶν προτεινομένων. Ὁπωσδήποτε εἰς τό ἐν λόγῳ ἄρθρον δέν ἀποδεικνύεται, ἐάν ἡ ἀκολουθουμένη πολύπλοκος μέθοδος ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων εἶναι ἀκριβής δι' ὁλοκληρουμένας συναρτήσεις βαθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ (n-1). Ἀντιθέτως ἡ ὑφ' ἡμῶν χρησιμοποιουμένη μέθοδος ὑπολογισμοῦ ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων GAUSS, ἁπλουστέρα ἀφ' ἑνός κατά τήν ἀπόδειξιν, εἶναι ἀφ' ἑτέρου ἀκριβής δι' ὁλοκληρουμένας συναρτήσεις βαθμοῦ μέχρι (2n-1).

Ἡ δευτέρα αὕτη μέθοδος ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων πέραν τοῦ προαναφερθέντος ἄρθρου τῶν ERDOGAN, GUPTA and COOK {1973} ἀναπτύσσεται καί εἰς τό ἄρθρον τῶν ERDOGAN and GUPTA {1972A}, ἐφαρμογάς της δέ εὑρίσκομεν εἰς τά ἄρθρα τῶν COOK and ERDOGAN {1972}, DMOWSKA and KOSTROV {1973}, GUPTA {1973}, ERDOGAN and BIRICIKOGLU {1973}, ERDOGAN and COOK {1974}, ERDOGAN and AKSOGAN {1974},

ERDOGAN and RATWANI {1974}, GUPTA and ERDOGAN {1974}, ERDOGAN, GUPTA and RATWANI {1974}, ERDOGAN and CIVELEK {1974} καί GUPTA {1975}.

Τέλος προσφάτως ὁ MAJUMDAR {1973,1974} ἀνέπτυξε μίαν εἰσέτι μέθοδον ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων ὑποθέσας ὅτι ὁ πυρήν μιᾶς τοιαύτης ἐξισώσεως τῆς μορφῆς (11) δύναται νά ἀναπτυχθῇ εἰς πολυωνυμικήν σειράν μέ μεταβλητήν τήν διαφοράν (t-x) καί ἀκολούθως θεωρήσας ἀνάπτυγμα τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως φ(t) εἰς σειράν πολυωνύμων CHEBYSHEV πρώτου εἴδους. Ἡ μέθοδος αὕτη τοῦ MAJUMDAR εἶναι ἀρκετά συγγενής τῆς εἰς τό τμῆμα Γ9 ἀναπτυχθησομένης μεθόδου ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων GAUSS-LEGENDRE, παρ'ὅλον ὅτι ὑστερεῖ ταύτης κατά τήν ἁπλότητα, τήν ἀκρίβειαν καί τήν γενικότητα τῶν πυρήνων τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων λόγῳ τῆς προαναφερθείσης ὑποθέσεως ὅτι οὗτοι εἶναι συναρτήσεις τῆς διαφορᾶς (t-x).

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Τό ἐξετασθέν εἰς τό τμῆμα τοῦτο πρόβλημα τῆς ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων εἶναι παλαιόν καί ἐν τούτοις μή ὡσαύτως εἰσέτι πλήρως ἀντιμετωπισθέν. Εἰς τό περί ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων σύγγραμμα τοῦ MUSKHELISHVILI {1953B}, ὅπου μελετῶνται ὅλαι αἱ ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων τούτων, προτείνεται ἡ ἀναγωγή των εἰς ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις FREDHOLM δευτέρου εἴδους, διά τάς ὁποίας ὑφίστανται ἄκρως ἱκανοποιητικαί μέθοδοι ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως. Μία τοιαύτη ὅμως μέθοδος ἐργασίας εἶναι δυσχερής τόσον ἀπό μαθηματικῆς ὅσον καί ἀπό ὑπολογιστικῆς πλευρᾶς, πρακτικῶς δέ εἰς ἐλάχιστα μόνον προβλήματα ἔχει μέχρι σήμερον ἐφαρμοσθῆ.

Μέ τήν πάροδον τῶν ἐτῶν κατέστη σαφής ἡ ἀναγκαιότης εὑρέσεως ἀποτελεσματικῶν μεθόδων ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων, αἵτινες σημειωτέον ἀπαντῶνται πολύ συχνά, ὄχι μόνον εἰς προβλήματα ρωγμῶν, ἀλλά καί εἰς πλεῖστα ἄλλα προβλήματα τῆς Φυσικῆς. Κατά τήν ἐπίλυσιν

ἑνός προβλήματος τῆς ἐπιπέδου θεωρίας τῆς ἐλαστικότητος ὁ SHERMAN {1959} προέβλεψε σχετικῶς ὅτι κατά τήν γνώμην του πρέπει νά ἀναμένεται ὁπωσδήποτε ἀξιόλογος πρόοδος εἰς τό θέμα τῆς ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων,ὥστε ἡ ἀντιμετώπισις μιᾶς τοιαύτης ἐξισώσεως προκυπτούσης εἰς ἕν συγκεκριμένον πρόβλημα οὐδόλως νά εἶναι δυσχερεστέρα καί ὑπολογιστικῶς πολυπλοκωτέρα τῆς ἀντιμετωπίσεως μιᾶς ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως FREDHOLM μέ συνεχῆ στοιχειώδη πυρῆνα.

Πράγματι δέ ἀπό τοῦ 1959 καί ἐντεῦθεν ἤρχισαν ὀλίγον κατ' ὀλίγον ἀναπτυσσόμεναι αἱ μέθοδοι ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων,αἱ δέ σχετικαί προσπάθειαι ἐνετάθησαν ἰδιαιτέρως ἀπό τοῦ ἔτους 1969. Εἰς τάς προσπαθείας ταύτας πιστεύομεν ὅτι συμβάλλομεν καί ἡμεῖς διά τῶν ἀναπτυσσομένων εἰς τό Κεφάλαιον τοῦτο μεθόδων ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων.

Περαίνοντες θά ἠθέλαμεν νά ἀναφέρωμεν ἐπίσης τό ἄρθρον τῶν COHEN and ICKOVIC {1974}, οἵτινες προαναγγέλουν τήν ἀντιμετώπισιν τοῦ προβλήματος τῆς ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων διά μιᾶς προτεινομένης ὑπ' αὐτῶν μεθόδου, τήν ὁποίαν ἀποφεύγομεν πρός τό παρόν νά κρίνωμεν, ὡς καί τήν προσφάτως ἐκδοθεῖσαν ὑπό τῶν DELVES and WALSH {1974} ἐνδιαφέρουσαν συλλογήν ἄρθρων σχετικῶν μέ τήν ἐπίλυσιν ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων, εἰς τήν ὁποίαν δυστυχῶς ἐλάχιστα ἀναφέρονται περί τῆς ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων.

Γ3. ΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ GAUSS-CHEBYSHEV καί LOBATTO-CHEBYSHEV

Θεωρήσωμεν πρός έπίλυσιν ἕν σύστημα m ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων μέ διάστημα ὁλοκληρώσεως τό $[-1,1]$ καί συνάρτησιν βάρους :

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \tag{1}$$

ὡς κάτωθι :

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} K_{ik}(t,x)\varphi_i(t)dt = f_k(x), \quad k = 1,2,\ldots,m, \tag{2}$$

μέ δεδομένας τάς συναρτήσεις $f_k(x)$ καί τούς ἰδιομόρφους πυρῆνας $K_{ik}(t,x)$, οἵτινες δύνανται νά τεθοῦν ὑπό τήν μορφήν:

$$K_{ik}(t,x) = \frac{K_{ik1}(x)}{t-x} + K_{ik2}(t,x), \quad i,k = 1,2,\ldots,m, \tag{3}$$

ἔνθα αἱ συναρτήσεις $K_{ik1}(x)$ καί $K_{ik2}(t,x)$ μεταβάλλονται ὁμαλῶς ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως. Αἱ ἄγνωστοι συναρτήσεις $\varphi_i(t)$ πέραν τοῦ συστήματος τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (2) θεωροῦνται πληροῦσαι καί ἰδιαιτέρας συνθήκας τῆς μορφῆς :

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ik} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \varphi_i(t)dt = C_k, \quad k = 1,2,\ldots,m, \tag{4}$$

ἔνθα c_{ik} καί C_k γνωσταί σταθεραί.

Ὑπάρχουν πολλά προβλήματα, τά ὁποῖα καταλήγουν εἰς συστήματα ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (2) ἐν συνδυασμῷ μέ τάς συνθήκας (4). Μεταξύ τῶν προβλημάτων τούτων ἀνήκουν καί τά προβλήματα ἁπλῶν λείων ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου ἤ καί ἀνισοτρόπου μέσου λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ ἄγνωστοι συναρτήσεις μεταστάσεων παρουσιάζουν ἰδιομορφίας τάξεως (-1/2) εἰς τά ἄκρα τῶν ρωγμῶν καί ὅτι κάθε πεπερασμένον διάστημα ὁλοκληρώσεως $[\alpha,\beta]$ δύναται νά ἀναχθῇ εἰς τό διάστημα $[-1,1]$ τῇ χρήσει τῆς ἀλλαγῆς μεταβλητῆς :

$$y = \frac{\beta-\alpha}{2}x+\frac{\beta+\alpha}{2} \tag{5}$$

μέ τήν μεταβλητήν y έντός τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$ καί τήν μεταβλητήν x έντός τοῦ διαστήματος $[-1,1]$

Πρό τῆς ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (2) δυνάμεθα νά γράψωμεν τοῦτο λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τάς ἐκφράσεις (3) τῶν πυρήνων $K_{ik}(t,x)$ ὑπό τήν κάτωθι μορφήν :

$$\sum_{i=1}^{m} K_{ik1}(x) \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi_i(t)}{t-x}dt + \sum_{i=1}^{m} \int_{-1}^{1} \frac{K_{ik2}(t,x)}{\sqrt{1-t^2}}\varphi_i(t)dt =$$

$$= f_k(x), \quad k = 1,2,\ldots,m. \tag{6}$$

Εἰς τό σύστημα τοῦτο τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων τά μέν ὁλοκληρώματα τοῦ δευτέρου ἀθροίσματος τοῦ πρώτου μέλους, ἅτινα δέν εἶναι ἰδιόμορφα κατά CAUCHY, δύνανται νά ἐκφρασθοῦν ἀριθμητικῶς κατά τήν μέθοδον ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS-CHEBYSHEV μέ n σημεῖα διά κοινά ὁλοκληρώματα. Ὅσον ἀφορᾷ δέ εἰς τά ἰδιόμορφα κατά CAUCHY ὁλοκληρώματα τοῦ πρώτου ἀθροίσματος τοῦ πρώτου μέλους τοῦ ἀνωτέρω συστήματος ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων, ταῦτα δύνανται νά ἐκφρασθοῦν ἐπίσης κατά τήν μέθοδον GAUSS--CHEBYSHEV μέ n σημεῖα, ὡς αὕτη ἀνεπτύχθη ὑπό τῶν ERDOGAN and GUPTA {1972A} , πρός ἐφαρμογήν εἰς ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα, ὁπότε τό σύστημα τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (6) ἀνάγεται εἰς τό κάτωθι προσεγγίζον τοῦτο σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων :

$$\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{m} K_{ik1}(x_r) \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi_i(t_j)}{t_j-x_r} + \frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} K_{ik}(t_j,x_r)\varphi_i(t_j) = f_k(x_r),$$

$$k = 1,2,\ldots,n, \quad r = 1,2,\ldots,n-1, \tag{7}$$

ἔνθα τά σημεῖα t_j καί x_r εἶναι ρίζαι τῶν πολυωνύμων CHEBYSHEV πρώτου εἴδους καί n βαθμοῦ καί δευτέρου εἴδους καί (n-1) βαθμοῦ ἀντιστοίχως, ἤτοι :

$$T_n(t_j) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \ , \quad U_{n-1}(x_r) = 0, \quad r = 1,2,\ldots,n-1. \tag{8}$$

Τά πολυώνυμα CHEBYSHEV ταῦτα δύνανται νά θεωρηθοῦν διδόμενα καί ἐκ τῶν τύπων :

$$T_n(x) = \cos n\vartheta, \qquad U_{n-1}(x) = \frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta}, \qquad x = \cos\vartheta, \tag{9}$$

ὁπότε προκύπτουν εὐθύς οἱ κάτωθι τύποι οἱ δίδοντες τά σημεῖα t_j καί x_r :

$$t_j = \cos\frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad j = 1,2,\ldots,n, \qquad x_r = \cos\frac{j\pi}{n},$$

$$j = 1,2,\ldots,n-1. \tag{10}$$

Ὅσον ἀφορᾷ ἐπίσης εἰς τάς συνθήκας (4) τάς πληρουμένας ὑπό τῶν συναρτήσεων $\varphi_i(t)$, αὗται δι'ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου GAUSS-CHEBYSHEV διά κοινά ὁλοκληρώματα ἀνάγονται εἰς τάς κάτωθι γραμμικάς ἐξισώσεις:

$$\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ik}\sum_{j=1}^{n}\varphi_i(t_j) = C_k, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{11}$$

Τό σύστημα τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων (7) καί (11) ἀποτελεῖ ἓν σύστημα (m×n) ἐξισώσεων μέ ἴσον ἀριθμόν ἀγνώστων ἐκ δέ τῆς ἐπιλύσεώς του προκύπτουν αἱ τιμαί τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων $\varphi_i(t_j)$ εἰς τά σημεῖα t_j ὁριζομένα βάσει τῶν σχέσεων (10).

Ἡ δυσχέρεια εἰς τήν ἀναγωγήν τοῦ συστήματος τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (6) εἰς τό σύστημα τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων (7) ἔγκειται εἰς τό ὅτι πρέπει νά ἐκφρασθοῦν ἀριθμητικῶς καί κατά προσεγγιστικόν τρόπον τά ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα, διά τά ὁποῖα ἀπαιτεῖται ἰδιαιτέρα διαπραγμάτευσις, ἀντιθέτως πρός τά κοινά ὁλοκληρώματα, διά τά ὁποῖα δύναται νά ἐφαρμοσθῇ ἁπλῶς ἡ μέθοδος ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS-CHEBYSHEV. Πρός τοῦτο οἱ ERDOGAN and GUPTA ἐθεώρησαν εἰς τήν ἤδη ἀναφερθεῖσαν ἐργασίαν των {1972A} τό ἰδιόμορφον ὁλοκλήρωμα:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt, \tag{12}$$

τό ὁποῖον, ἐάν ἡ συνάρτησις $\varphi(t)$ θεωρηθῇ δυναμένη νά ἀναπτυχθῇ εἰς σειράν πολυωνύμων CHEBYSHEV μέ p ὅρους τῆς μορφῆς:

$$\varphi(t) = \sum_{h=0}^{p} B_h T_h(t), \tag{13}$$

δύναται νά γραφῇ ὡς:

$$I = \sum_{h=0}^{p} B_h \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_h(t)}{t-x} dt . \tag{14}$$

Περαιτέρω οἱ ERDOGAN and GUPTA ἔλαβον ὑπ'ὄψιν ὅτι:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_h(t)}{t-x} dt = U_{h-1}(x), \quad U_{-1}(x) \equiv 0 , \tag{15}$$

ἀπέδειξαν δέ ἐπίσης ὅτι:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{T_h(t_j)}{n(t_j-x_r)} = U_{h-1}(x_r), \; h=0,1,\ldots,n-1, \; r=1,2,\ldots,n-1, \tag{16}$$

μέ τά σημεῖα t_j καί x_r καθοριζόμενα βάσει τῶν σχέσεων(10). Ἤδη λόγῳ τῶν σχέσεων (13-16) προκύπτει ἡ ἑξῆς προσεγγιστική ἔκφρασις τοῦ ὁλοκληρώματος (12):

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{t-x_r} dt \simeq \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi(t_j)}{t_j-x_r} , r = 1,2,\ldots,n-1, \tag{17}$$

ἥτις καθίσταται ἀκριβής, ἐφ'ὅσον $p \leqq n-1$ (λόγῳ τῆς σχέσεως (16), ἥτις ἀπεδείχθη ἰσχύουσα ὑπό τῶν ERDOGAN and GUPTA μόνον διά $h \leqq n-1$), ἤτοι ἐφ'ὅσον ἡ συνάρτησις $\varphi(t)$ εἶναι πολυώνυμον μέχρι καί (n-1) βαθμοῦ.

Ἡ προσεγγιστική ἔκφρασις (17) τοῦ ἰδιομόρφου ὁλοκληρώματος I συμπίπτει κατά τά βάρη καί τάς τετμημένας μέ τήν μέθοδον ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS-CHEBYSHEV διά κοινά ὁλοκληρώματα ὑπό τόν περιορισμόν βεβαίως ὅτι τά σημεῖα x_r δίδονται ἐκ τῆς δευτέρας τῶν σχέσεων (10). Ὡς πρός τήν ἀκρίβειαν τῆς προσεγγιστικῆς ὁλοκληρώσεως (17) δύναται νά παρατηρηθῇ ἐν τούτοις ὅτι, καίτοι ἡ προσεγγιστική ὁλοκλήρωσις αὕτη ἐθεωρήθη ὑπό τῶν ERDOGAN and GUPTA ἀκριβής διά συναρτήσεις $\varphi(t)$ πολυώνυμα μέχρι καί (n-1) βαθμοῦ, ἐν τού-

τοις εἰς τήν πραγματικότητα εἶναι ἀκριβής διά πολυώνυμα $\varphi(t)$ μέχρι καί 2n βαθμοῦ, τρόπον τινά δηλαδή ἀκριβεστέρα τῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS-CHEBYSHEV διά κοινά ὁλοκληρώματα:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\varphi(t)dt \approx \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(t_j), \quad T_n(t_j) = 0 , \tag{18}$$

ἥτις εἶναι ἀκριβής διά συναρτήσεις $\varphi(t)$ πολυώνυμα μέχρι καί (2n-1) βαθμοῦ.

Διά νά ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ μέθοδος GAUSS-CHEBYSHEV διΐδιόμορφα ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς (12) εἶναι ἀκριβής διά συναρτήσεις $\varphi(t)$ πολυώνυμα μέχρι καί 2n βαθμοῦ, ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι ἡ σχέσις (16) ἰσχύει διά τιμάς τοῦ h ὄχι μόνον μέχρι (n-1) ἀλλά μέχρι 2n. Πρός τοῦτο διαπιστοῦμεν κατ' ἀρχήν ὅτι διά h = n ἡ ἰσχύς τῆς σχέσεως (16) εἶναι προφανής λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ καθορισμοῦ τῶν σημείων t_j καί x_r κατά τάς σχέσεις (8). Διά j = n+1,n+2,...,2n ἐργαζόμενοι κατά τρόπον ἀνάλογον τοῦ ἀκολουθηθέντος ὑπό τῶν ERDOGAN and GUPTA θεωροῦμεν τό κάτωθι ἀνάπτυγμα εἰς ἁπλᾶ κλάσματα:

$$\frac{U_{h-n-1}(x)}{T_n(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{t_j - x} , \quad T_n(t_j) = 0,$$

$$h = n+1,n+2,\ldots,2n, \tag{19}$$

ἔνθα:

$$\alpha_j = -\frac{U_{h-n-1}(t_j)}{T_n'(t_j)} = -\frac{U_{h-n-1}(t_j)}{nU_{n-1}(t_j)} , \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{20}$$

Χρησιμοποιοῦμεν περαιτέρω τόν ἐκ τῶν σχέσεων (9) προκύπτοντα εὐχερῶς τύπον:

$$U_{h-n-1}(x) = -T_h(x)U_{n-1}(x)+T_n(x)U_{h-1}(x), \tag{21}$$

ὅστις λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν σχέσεων (8) καί (20) δίδει:

$$U_{h-n-1}(x_r) = T_n(x_r)U_{h-1}(x_r), \quad \alpha_j = \frac{T_h(t_j)}{n} . \tag{22}$$

Κατά ταῦτα τό ἀνάπτυγμα εἰς ἁπλᾶ κλάσματα (19) δύναται

νά γραφῇ:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{T_h(t_j)}{n(t_j-x_r)} = U_{h-1}(x_r),\ h = n+1, n+2, \ldots, 2n\ , \qquad (23)$$

ὁπότε συμπίπτει μετά τοῦ τύπου (16), ἀλλά διά τάς τιμάς τοῦ h ἀπό (n+1) μέχρι 2n, καθ'ὅσον εἰς τό κλάσμα τοῦ πρώτου μέλους τοῦ ἀναπτύγματος (19) ὁ βαθμός τοῦ ἀριθμητοῦ πρέπει νά εἶναι μικρότερος τοῦ βαθμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ.

Ἀπεδείχθη οὕτως ὅτι ἡ ἀριθμητική ἔκφρασις (17) δι'ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα τῇ χρήσει τῆς μεθόδου GAUSS-CHEBYSHEV εἶναι ἀκριβής διά συναρτήσεις φ(t) πολυώνυμα μέχρι καί 2n βαθμοῦ μέ προφανῆ συνέπειαν βελτίωσιν τῆς ἀκριβείας τῆς προσεγγίσεως τοῦ συστήματος τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (6) γενομένην κατά τήν μέθοδον GAUSS-CHEBYSHEV τῇ χρήσει τῶν ἐκφράσεων (17) καί (18) διά τήν προσέγγισιν τῶν ἀπαντωμένων ἰδιομόρφων καί κοινῶν ἀντιστοίχως ὁλοκληρωμάτων.

Τήν μέθοδον ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS-CHEBYSHEV (18) διά κοινά ὁλοκληρώματα ἐπεξέτειναν εἰς ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα οἱ CHAWLA and RAMAKRISHNAN {1974A} ὡς κάτωθι:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \approx \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi(t_j)}{t_j-x} + \pi\varphi(x) \frac{U_{n-1}(x)}{T_n(x)}, \qquad (24)$$

ἥτις δέν διαφέρει τῆς προσεγγιστικῆς ἐκφράσεως κατά τήν μέθοδον GAYSS-CHEBYSHEV τῶν κοινῶν ὁλοκληρωμάτων, εἰ μή κατά τόν δεύτερον ὅρον τοῦ δευτέρου μέλους της, ὅστις δέν ὑφίσταται εἰς περίπτωσιν ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS-CHEBYSHEV διά κοινά ὁλοκληρώματα. Ὁ ὅρος οὗτος ὅμως μηδενίζεται, ἐάν ὡς σημεῖα x ἐκλεγοῦν αἱ ρίζαι x_r (r = 1,2,...,n-1) τοῦ πολυωνύμου $U_{n-1}(x)$. Ὑπό τόν περιορισμόν τοῦτον ἡ μέθοδος ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS-CHEBYSHEV δύναται νά ἐφαρμοσθῇ διά κάθε ὁλοκλήρωμα ἰδιόμορφον ἤ μή ὡς κάτωθι:

$$I = \int_{-1}^{1} K(t,x_r)\varphi(t)dt \approx \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} K(t_j,x_r)\varphi(t_j) \qquad (25)$$

μέ πυρῆνα K(t,x) τῆς μορφῆς:

$$K(t,x) = \frac{K_1(t,x)}{t-x} + K_2(t,x), \tag{26}$$

ἔνθα $K_1(t,x)$ καί $K_2(t,x)$ ὁμαλῶς μεταβαλλόμεναι συναρτήσεις καί ὡς πρός τάς δύο μεταβλητάς των ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως [-1,1].

Ἡ ἀνάπτυξις τῶν CHAWLA and RAMAKRISHNAN ἡ ὁδηγοῦσα εἰς τήν προσεγγιστικήν ἔκφρασιν (24) ἐνός ἰδιομόρφου ὁλοκληρώματος διά τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου GAUSS-CHEBYSHEV εἰς τόν ὑπολογισμόν του, ἡ ὁποία ἔκφρασις μεταπίπτει εἰς τήν (17) δι' ἐκλογήν τῶν σημείων x_r κατά τήν δευτέραν τῶν σχέσεων (8), δεικνύει κατά τόν καλύτερον τρόπον ὅτι ἡ ὑπό τῶν ERDOGAN and GUPTA {1972A} ἀναπτυχθεῖσα μέθοδος ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς (12) εἶναι ὄντως ἡ μέθοδος GAUSS-CHEBYSHEV. Οἱ CHAWLA and RAMAKRISHNAN ἔδειξαν ἐξ ἄλλου ὅτι ἡ ἔκφρασις (24) ἐνός ἰδιομόρφου ὁλοκληρώματος εἶναι ἀκριβής διά συναρτήσεις φ(t) πολυώνυμα μέχρι καί 2n βαθμοῦ, πρᾶγμα τό ὁποῖον ἐδείχθη καί ἐνταῦτα κατά διαφορετικόν βεβαίως τρόπον καί μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι τά σημεῖα x_r πληροῦν τήν δευτέραν τῶν σχέσεων (8). Κατά πλέον συστηματικόν τρόπον θά ἐξετάσωμεν τάς μεθόδους GAUSS δι' ὑπολογισμόν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων καί ἐπίλυσιν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων εἰς τά τμήματα Γ4, Γ7 καί Γ9.

Ἐνταῦθα θά ἐξετάσωμεν τήν μέθοδον ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως LOBATTO-CHEBYSHEV ἐφαρμοζομένην εἰς τόν ὑπολογισμόν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς (12). Ἡ μέθοδος LOBATTO-CHEBYSHEV μέ n σημεῖα περιλαμβάνει μεταξύ τῶν χρησιμοποιουμένων σημείων t_j καί τά ἄκρα (±1) τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, ὁπότε κατά τήν ἀναγωγήν τοῦ συστήματος τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (6) ὁμοῦ μετά τῶν συνθηκῶν (4) εἰς τό σύστημα τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων (7) καί (11) μεταξύ τῶν ἀγνώστων τοῦ γραμμικοῦ συστήματος ἐξισώσεων περιλαμβάνονται καί αἱ τιμαί τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων $\varphi_i(t)$ εἰς τά ἄκρα (±1) τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, ἐκ τῶν ὁποίων διά προβλήματα ρωγμῶν εὑρίσκονται εὐχερῶς οἱ συντελεσταί

ἐντάσεως τῶν τάσεων. Οὕτως, ἐνῷ διά χρήσεως τῆς μεθόδου GAUSS-CHEBYSHEV διά τήν ἐπίλυσιν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων παρουσιαζομένων εἰς προβλήματα ρωγμῶν ἀπαιτεῖται ἐν συνεχείᾳ παρεμβολή διά τήν εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων εἰς τά ἄκρα τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως καί ἐξ αὐτῶν τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων, διά χρήσεως τῆς μεθόδου LOBATTO-CHEBYSHEV ἡ παρεμβολή ἀποφεύγεται ἐπιτυγχανομένης μεγαλυτέρας ἀκριβείας καί ἐπίσης ὀλιγωτέρων ὑπολογισμῶν διά τόν προσδιορισμόν τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων.

Διά τήν ἐφαρμογήν τῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως LOBATTO-CHEBYSHEV εἰς τόν ὑπολογισμόν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων καί τήν ἐπίλυσιν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων θά ἀκολουθήσωμεν μέθοδον ἐργασίας παρομοίαν τῆς ἀκολουθηθείσης ὑπό τῶν ERDOGAN and GUPTA {1972A} δι' ἐφαρμογήν τῆς μεθόδου GAUSS-CHEBYSHEV εἰς ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα καί ἰδιομόρφους ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις.

Θεωροῦμεν οὕτω τό ἀνάπτυγμα εἰς ἁπλᾶ κλάσματα:

$$\frac{T_{n-h-1}(x)}{(1-x^2)U_{n-2}(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{t_j - x}, \tag{27}$$

ἔνθα τά σημεῖα t_j εὑρίσκονται ἐκ τῆς σχέσεως:

$$(1-t_j^2)U_{n-2}(t_j) = 0, \tag{28}$$

οἱ δέ συντελεσταί α_j δίδονται ὑπό τῶν τύπων:

$$\alpha_j = -\frac{T_{n-h-1}(t_j)}{\left[(1-t_j^2)U_{n-2}(t_j)\right]'} . \tag{29}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (28) λόγῳ καί τῆς δευτέρας τῶν σχέσεων (9) προκύπτουν οἱ ἑξῆς τιμαί διά τά σημεῖα t_j.

$$t_j = \cos\frac{j\pi}{n-1}, \quad j = 0,1,\ldots,n-1, \tag{30}$$

περιλαμβανομένων οὕτω μεταξύ τῶν σημείων t_j καί τῶν ἄκρων (±1) τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως [-1,1].

Εἰς τό ἀνάπτυγμα (27) τοῦ κλάσματος τοῦ πρώτου μέλους

τούτου πρέπει ὁ βαθμός τοῦ πολυωνύμου τοῦ ἀριθμητοῦ νά εἶναι μικρότερος τοῦ βαθμοῦ τοῦ πολυωνύμου τοῦ παρανομαστοῦ, ἤτοι πρέπει νά ἰσχύῃ:

$$0 \leqq n-h-1 \leqq n-1 \quad \text{ἤ} \quad 0 \leqq h \leqq n-1 \ . \tag{31}$$

Λαμβάνοντες περαιτέρω ὑπ'ὄψιν τούς τύπους (9) ὁρισμοῦ τῶν πολυωνύμων CHEBYSHEV $T_n(x)$ καί $U_{n-1}(x)$ εἶναι εὔκολον νά δείξωμεν ὅτι:

$$\left[(1-x^2)U_{n-2}(x)\right]' = -xU_{n-2}(x)-(n-1)T_{n-1}(x), \tag{32}$$

ἐπίσης δέ ὅτι:

$$T_{n-h-1}(x) = T_h(x)T_{n-1}(x)+U_{h-1}(x)(1-x^2)U_{n-2}(x),$$
$$h > 0, \tag{33}$$

ὅτε εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐκφράσεως (29) τῶν συντελεστων α_j ὅτι:

$$\alpha_1 = \frac{T_h(-1)}{2(n-1)}, \quad \alpha_j = \frac{T_h(t_j)}{n-1} \quad (j = 2,3,\ldots,n-1),$$
$$\alpha_n = \frac{T_h(1)}{2(n-1)}, \tag{34}$$

λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τάς σχέσεις (28) καί (30), ἐπίσης δέ ὅτι:

$$T_{n-1}(1) = 1, \quad T_{n-1}(-1) = (-1)^{n-1},$$
$$U_{n-2}(1) = n-1, \quad U_{n-2}(-1) = (-1)^n(n-1). \tag{35}$$

Ἤδη τό ἀνάπτυγμα εἰς ἁπλᾶ κλάσματα (27) λαμβάνει τήν μορφήν:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{T_h(t_j)}{(n-1)(t_j-x)} = U_{h-1}(x)+\frac{T_h(x)T_{n-1}(x)}{(1-x^2)U_{n-2}(x)},$$
$$\lambda_1 = \lambda_n = 1, \lambda_j = \frac{1}{2}(j = 2,3,\ldots,n-1). \tag{36}$$

Ἐκλέγοντες ἤδη τά σημεῖα x_r βάσει τοῦ τύπου:

$$T_{n-1}(x_r) = 0 \ , \ r = 1,2,\ldots,n-1 \ , \tag{37}$$

καί ἐφαρμόζοντες δι' αὐτά τό ἀνάπτυγμα (36) εὑρίσκομεν:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{T_h(t_j)}{(n-1)(t_j-x_r)} = U_{h-1}(x_r) \ , \ h = 1,2,\ldots,n-1 \ , \tag{38}$$

σχέσιν, ἥτις ἰσχύει δι' h ἀπό 0 ἕως καί (n-1).

Δι' h ἀπό (n-1) ἕως καί (2n-2) δύναται νά δειχθῇ ὅτι ὡσαύτως ἰσχύει τό ἀνάπτυγμα (38), ἀρκεῖ ἀντί τοῦ ἀρχικοῦ ἀναπτύγματος (27) νά θεωρηθῇ τό ἀνάπτυγμα:

$$\frac{T_{h-n-1}(x)}{(1-x^2)U_{n-2}(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{t_j-x} \ , \tag{39}$$

ἔνθα τά σημεῖα t_j εὑρίσκονται πάλιν ἐκ τῆς σχέσεως (28).

Ἑπομένως τό ἀνάπτυγμα (38) ἰσχύει διά $0 \leqq h \leqq 2n-2$, ἐνῷ τό ἀντίστοιχον ἀνάπτυγμα (23) διά τήν μέθοδον GAUSS-CHEBYSHEV ἰσχύει διά $0 \leqq h \leqq 2n$.

Συγκρίνοντες ἤδη τήν σχέσιν (15) μέ τήν (38) καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἕν πολυώνυμον $\varphi(t)$,p βαθμοῦ,δύναται νά ἀναλυθῇ εἰς σειράν πολυωνύμων CHEBYSHEV, ὡς ἡ (13),συνάγομεν τήν κάτωθι μέθοδον ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως δι' ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{t-x_r} dt \simeq \frac{\pi}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\varphi(t_j)}{t_j-x_r} \ ,$$

$$\lambda_1 = \lambda_n = 1 \ , \ \lambda_j = \frac{1}{2} \ (j = 2,3,\ldots,n-1) \ , \tag{40}$$

ἥτις εἶναι ἀκριβής διά συναρτήσεις $\varphi(t)$ πολυώνυμα μέχρι καί (2n-2) βαθμοῦ. Ἡ μέθοδος ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως (40) συμπίπτει κατά τά βάρη καί τάς τετμημένας μέ τήν μέθοδον LOBATTO-CHEBYSHEV διά κοινά ὁλοκληρώματα δυναμένη νά θεωρηθῇ ὡς ἐπέκτασις ταύτης δι' ἰδιόμορφα τοιαῦτα. Βεβαίως πρέπει νά ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι τά σημεῖα x_r δέν εἶναι τυχόντα, ἀλλά δίδονται ὑπό τῆς σχέσεως (37). Δύναται νά σημειωθῇ ὡσαύτως ὅτι ἡ μέθοδος ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως LOBATTO - CHEBYSHEV

διά κοινά ὁλοκληρώματα εἶναι ἀκριβής διά συναρτήσεις $\varphi(t)$ πολυώνυμα μέχρι $(2n-3)$ βαθμοῦ, ἐνῷ δι' ἰδιόμορφα ὁλοκληρώματα εἶναι ἀκριβής διά συναρτήσεις $\varphi(t)$ πολυώνυμα μέχρι $(2n-2)$ βαθμοῦ, ὡς εὑρέθη προηγουμένως.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Αἱ ἐξετασθεῖσαι εἰς τό τμῆμα τοῦτο μέθοδοι ὑπολογισμοῦ ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων καί ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων GAUSS-CHEBYSHEV καί LOBATTO-CHEBYSHEV εἶναι αἱ συνηθέστερον χρησιμοποιούμεναι κατά τήν ἀντιμετώπισιν προβλημάτων ρωγμῶν ὡς καί πλείστων ἄλλων προβλημάτων τῆς Φυσικῆς. Πέραν τούτου δέ εἶναι καί λίαν ἁπλαῖ εἰς τήν ἐφαρμογήν των, καθ' ὅσον αἱ χρησιμοποιούμεναι τετμημέναι εἶναι ἁπλοῖ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί, τά δέ βάρη ἐν γένει ἴσα μεταξύ των. Τάς ἰδιότητας τῶν χρησιμοποιουμένων εἰς ταύτας πολυωνύμων CHEBYSHEV δυνάμεθα νά εὕρωμεν π.χ. εἰς τό βιβλίον τῶν FOX and PARKER {1968} ἤ εἰς τό ἄρθρον τοῦ CHAWLA {1967}, εἰς τό ὁποῖον ὅμως ἐξετάζονται μόνον τά πολυώνυμα CHEBYSHEV δευτέρου εἴδους.

Ἡ μέθοδος ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων GAUSS-CHEBYSHEV ἔχει χρησιμοποιηθῆ πολλάκις μέχρι σήμερον εἰς πρακτικά προβλήματα, ἐμελετήθη δέ κυρίως ὑπό τῶν ERDOGAN and GUPTA {1972A}, ὡς ἔχει ἤδη ἀναφερθῆ. Εἰς νεωτέραν ἐργασίαν των οἱ ERDOGAN, GUPTA and COOK {1973} ἐπεχείρησαν τήν ἐπέκτασιν τῆς μεθόδου τοῦ GAUSS, ὥστε νά ἐπιλύσουν ἰδιομόρφους ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις μέ συναρτήσεις βάρους τῆς μορφῆς $(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$ καί μέ χρῆσιν τῶν πολυωνύμων JACOBI. Ἐν τούτοις, ἐνῷ διά τήν μέθοδον GAUSS - CHEBYSHEV οἱ ERDOGAN and GUPTA {1972A} ἁπλῶς δέν ἐξήτασαν πλήρως τήν ἀκρίβειάν της, ὡς ἀνεφέρθη καί προηγουμένως, διά τήν μέθοδον GAUSS-JACOBI οἱ ERDOGAN, GUPTA and COOK {1973} ἐπέλεξαν τά σημεῖα x_r ἐφαρμογῆς τῶν ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων κατά τρόπον, τόν ὁποῖον δέν ἠδυνήθημεν νά ἑρμηνεύσωμεν, τείνοντες νά πιστεύωμεν ὅτι ἡ χρησιμοποιηθεῖσα ὑπό τούτων

μέθοδος δέν δύναται νά χαρακτηρίζεται ὡς μέθοδος GAUSS εἰς τήν περίπτωσιν χρησιμοποιήσεως τῶν πολυωνύμων JACOBI. Δύναται νά παρατηρηθῇ ὡσαύτως ὅτι οἱ ERDOGAN, GUPTA and COOK παραπέμπουν διά τήν πλήρη μελέτην τῆς μεθόδου GAUSS-JACOBI εἰς σχετικόν ἄρθρον τοῦ ERDOGAN, τό ὁποῖον δέν κατέστη δυνατόν νά ἀνεύρωμεν καί πιστεύομεν ὅτι δέν ἔχει εἰσέτι δημοσιευθῇ. Ὡς ἐκ τούτου καί μέχρις εὑρέσεως τῆς ἀποδείξεώς της ἡ χρησιμοποιουμένη ὑπό τῶν ERDOGAN, GUPTA and COOK μέθοδος ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων καί χαρακτηριζομένη ὡς μέθοδος GAUSS-JACOBI, ἥτις σημειωτέον ἔχει ἤδη ἐφαρμοσθῆ εἰς ἄρθρα ἀντιμετωπίζοντα προβλήματα ρωγμῶν ὡς καί ἄλλα προβλήματα, δύναται νά χαρακτηρίζεται τούλάχιστον ὡς αὐθαίρετος, πλήν τῆς εἰδικῆς περιπτώσεως, ὅτε μεταπίπτει εἰς τήν διερευνηθεῖσαν εἰς τό τμῆμα τοῦτο μέθοδον GAUSS-CHEBYSHEV.

Ὅσον ἀφορᾷ περαιτέρω εἰς τήν μέθοδον LOBATTO-CHEBYSHEV, αὕτη παρά τήν ἀκρίβειάν της καί τήν ἀπλότητά της, π.χ. κατά τόν προσδιορισμόν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς προβλήματα ρωγμῶν, δέν ἔχει χρησιμοποιηθῆ μέχρι σήμερον, καθ' ὅσον γνωρίζομεν, διά τήν ἐπίλυσιν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων.

Ἐπί τῶν μεθόδων ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων GAUSS-CHEBYSHEV καί LOBATTO-CHEBYSHEV θά ἐπανέλθωμεν εἰς τό τμῆμα Γ9, ὅπου αὗται θά προκύψουν κατ' ἐντελῶς διάφορον τοῦ ἐνταῦθα ἐκτεθέντος τρόπον, ἐκ τοῦ ὁποίου θά φαίνεται πλήρως ὅτι δέν ἀποτελοῦν εἰ μή ἐπέκτασιν τῶν ἀντιστοίχων μεθόδων ὑπολογισμοῦ κοινῶν ὁλοκληρωμάτων εἰς τήν περίπτωσιν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων.

Γ4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ GAUSS ΕΙΣ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΝ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Ἡ μέθοδος ὁλοκληρώσεως GAUSS θεωρουμένη κατά τά προαναφερθέντα ἐκ τῶν ἀκριβεστέρων ἀριθμητικῶν μεθόδων ὑπολογισμοῦ ἁπλῶν ὁλοκληρωμάτων δύναται τροποποιουμένη καταλλήλως νά ἐφαρμοσθῇ καί διά τόν ὑπολογισμόν ἰδιομόρφων κατά CAUCHY ὁλοκληρωμάτων. Καθ'ὅσον γνωρίζομεν, ἔχουν δημοσιευθῆ σχετικῶς δύο ἄρθρα, τό μέν πρῶτον ὑπό τοῦ HUNTER {1972}, εἰς τό ὁποῖον ἐφαρμόζεται ἡ μέθοδος GAUSS, ὑπό τροποποιη - μένην βεβαίως μορφήν, διά τόν ὑπολογισμόν ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς :

$$I = \int_{-1}^{1} w(t)f(t)dt \tag{1}$$

μέ $w(t) = 1$ καί ὁλοκληρουμένην συνάρτησιν $f(t)$ παρουσιάζουσαν ἰδιομορφίας κατά CAUCHY ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως $(-1,1)$, τό δέ δεύτερον ὑπό τῶν CHAWLA and RAMAKRISHNAN {1974A} , εἰς τό ὁποῖον ἐφαρμόζεται ἡ μέθοδος GAUSS πάλιν διά τόν προσεγγιστικόν ὑπολογισμόν ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς (1), ἀλλά μέ τήν διαφοράν ὅτι ὡς συνάρτησις βάρους λαμβάνεται ἡ : $w(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$ μέ $\alpha,\beta > -1$. Δεδομένου ὅτι ἡ μέθοδος GAUSS μέ συνάρτησιν βάρους $w(t) = 1$ χρησιμοποιεῖ ὡς σύστημα ὀρθογωνίων πολυωνύμων εἰς τό διάστημα ὁλοκληρώσεως τά πολυώνυμα LEGENDRE, καλεῖται μέθοδος ὁλοκληρώσεως GAUSS-LEGENDRE, ἐνῷ ἡ μέθοδος ὁλοκληρώσεως μέ συνάρτησιν βάρους τήν : $w(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$, ἥτις χρησιμοποιεῖ ὡς σύστημα ὀρθογωνίων πολυωνύμων εἰς τό διάστημα ὁλοκληρώσεως τά πολυώνυμα JACOBI, καλεῖται μέθοδος ὁλοκληρώσεως GAUSS-JACOBI.

Ἐνταῦθα γενικεύοντες θά παρουσιάσωμεν τήν μέθοδον ὁλοκληρώσεως GAUSS ἐφαρμοζομένην διά τόν ὑπολογισμόν ἰδιομόρφων κατά CAUCHY ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς :

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} w(t)f(t)dt, \tag{2}$$

ἔνθα τά ὅρια ὁλοκληρώσεως α καί β δύνανται νά εἶναι πεπερασμένα ἤ ἄπειρα καί ἡ συνάρτησις βάρους w(t) τυχοῦσα δυναμένη νά παρουσιάζῃ ἁπλᾶς ἰδιομορφίας, ὄχι ὅμως πόλους, εἰς τά σημεῖα α καί β ἤ καί ἀλλαχοῦ ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως. Ἡ ὁλοκληρουμένη συνάρτησις f(t) θεωρεῖται ἔχουσα ἁπλοῦς πόλους ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως ἤ καί ἐκτός αὐτοῦ. Θεωροῦμεν γνωστόν ἐξ ἄλλου τό σύστημα ὀρθογωνίων πολυωνύμων $p_n(t)$ διά τό διάστημα ὁλοκληρώσεως (α, β) καί τήν συνάρτησιν βάρους w(t) τοῦ ὁλοκληρώματος (2). Τοῦτο βεβαίως εἶναι τό αὐτό εἴτε ἡ συνάρτησις f(t) παρουσιάζει ἰδιομορφίας εἴτε ὄχι. Τά ὀρθογώνια ταῦτα πολυώνυμα καλοῦνται οὕτω, καθ'ὅσον ἐπαληθεύουν τάς σχέσεις :

$$\int_\alpha^\beta w(t)p_m(t)p_n(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{διά } m\neq n \\ h_n, & \text{διά } m=n \end{cases}, \quad m,n = 0,1,2,\ldots, \tag{3}$$

ἔνθα h_n εἶναι αἱ σταθεραί ὀρθογωνιότητος τοῦ θεωρουμένου συστήματος ὀρθογωνίων πολυωνύμων $p_n(t)$ ὁριζόμεναι ὡς :

$$h_n = \int_\alpha^\beta w(t)p_n^2(t)dt, \quad n = 0,1,2,\ldots . \tag{4}$$

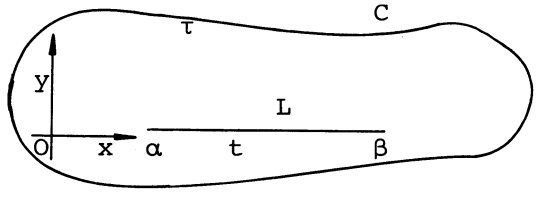
Θά προσπαθήσωμεν νά προσεγγίσωμεν τό ὁλοκλήρωμα (2) δι' ἐκφράσεως περιλαμβανούσης τό ἄθροισμα :

$$I' = \sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k), \tag{5}$$

ἔνθα αἱ σταθεραί A_k, αἵτινες εἶναι θετικαί, καλοῦνται βάρη τῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS καί τά σημεῖα t_k, ἅτινα κεῖνται ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως (α,β), καλοῦνται τετμημέναι τῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS.

Θεωροῦμεν πρός τοῦτο κλειστήν καμπύλην C περιβάλλουσαν τό διάστημα ὁλοκληρώσεως (α,β) (τό ὁποῖον θεωροῦμεν κείμενον ἐπί τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος Ox ὡς εἰς τό Σχῆμα 1). Ἡ πρός ὁλοκλήρωσιν συνάρτησις f(t) δύναται νά θεωρηθῇ προερχομένη ἐκ μιᾶς μιγαδικῆς συναρτήσεως f(z) ὁριζομένης ἐντός τῆς κλειστῆς καμπύλης C καί λαμβανούσης ἐπί τῶν σημείων t τοῦ ἐντός τῆς καμπύλης C κειμένου εὐθυγράμμου τμήματος

$L \equiv (\alpha,\beta)$ τάς τιμάς $f(t)$. Ἡ συνάρτησις αὕτη $f(z)$ θεωρεῖται ἔχουσα μόνον m ἁπλοῦς πόλους z_k ἐντός τῆς καμπύλης C μέ ἀντίστοιχα ὁλοκληρωτικά ὑπόλοιπα ρ_k, ἐξ ὧν οἱ μέν l πρῶτοι πόλοι ($k = 1,2,\ldots,l$) θεωροῦνται κείμενοι ἐπί τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως L, οἱ δέ ὑπόλοιποι ($m-l$) ($k = l+1, l+2,\ldots,m$) θεωροῦνται εὑρισκόμενοι ἐκτός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως L πλήν ἐντός τῆς καμπύλης C. Πέραν τῶν ἁπλῶν τούτων πόλων ἡ συνάρτησις $f(z)$ θεωρεῖται ἀναλυτική ἐντός καί ἐπί τῆς καμπύλης C.



Σχῆμα 1

Ἐξετάζομεν ἤδη τό ὁλοκλήρωμα :

$$I_o = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\tau)}{(\tau-z)\,p_n(\tau)}d\tau \tag{6}$$

ἐπί τῆς καμπύλης C καί κατά τήν θετικήν φοράν.

Ἐφαρμόζοντες τό θεώρημα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων τοῦ CAUCHY διά τό ὁλοκλήρωμα τοῦτο I_o εὑρίσκομεν τήν κάτωθι ἔκφρασιν αὐτοῦ :

$$I_o = \frac{f(z)}{p_n(z)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f(t_k)}{(t_k-z)\,p_n'(t_k)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\rho_k}{(z_k-z)\,p_n(z_k)}, \tag{7}$$

ἔνθα τά σημεῖα t_k εἶναι αἱ n ρίζαι τοῦ πολυωνύμου $p_n(z)$ οὖσαι ἅπασαι πραγματικαί καί κείμεναι μάλιστα ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως (α,β) κατά τά γνωστά ἐκ τῆς θεωρίας τῶν ὀρθογωνίων πολυωνύμων. Ὑποτίθεται διά τήν ὀρθότητα τῆς ἐκφράσεως (7) ὅτι οἱ πόλοι z_k ($k = 1,2,\ldots,l$) τῆς συναρτήσεως $f(z)$ ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως δέν συμπίπτουν μέ οὐδεμίαν τῶν ριζῶν t_k ($k = 1,2,\ldots,n$) τοῦ πολυωνύμου $p_n(z)$. Ἐπίσης ἡ μεταβλητή z εἰς τήν ἔκφρασιν (7) θεωρεῖται μή συμπίπτουσα μέ οὐδένα τῶν πόλων z_k ($k =$

$= 1,2,\ldots,m)$ τῆς συναρτήσεως $f(z)$ ἤ τῶν μηδενικῶν t_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ τοῦ πολυωνύμου $p_n(z)$.

Διά συγκρίσεως τῶν σχέσεων (6) καί (7) συνάγομεν τήν κάτωθι ἔκφρασιν τῆς πρός ὁλοκλήρωσιν συναρτήσεως $f(z)$ ἐπί τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως L :

$$f(t) = p_n(t) \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{f(t_k)}{(t-t_k)p_n'(t_k)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\rho_k}{(t-z_k)p_n(z_k)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\tau)d\tau}{(\tau-t)p_n(\tau)} \right\}. \tag{8}$$

Τήν ἔκφρασιν ταύτην τῆς συναρτήσεως $f(t)$ εἰσάγοντες ἐντός τοῦ ὁλοκληρώματος (2) λαμβάνομεν :

$$I = \int_\alpha^\beta w(t)f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\rho_k}{p_n(z_k)} \int_\alpha^\beta \frac{w(t)p_n(t)dt}{t-z_k} + E_n, \tag{9}$$

ἔνθα ἐτέθησαν :

$$A_k = \int_\alpha^\beta \frac{w(t)p_n(t)dt}{(t-t_k)p_n'(t_k)} \tag{10}$$

καί :

$$E_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta w(t)p_n(t) \int_C \frac{f(\tau)d\tau}{(\tau-t)p_n(\tau)} dt. \tag{11}$$

Αἱ σταθεραί A_k εἶναι τά προηγουμένως κληθέντα βάρη τῆς προσεγγιστικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS, τό δέ μέγεθος E_n τό καλούμενον σφάλμα τῆς προσεγγιστικῆς ὁλοκληρώσεως. Ἀξιοσημείωτον εἶναι ὅτι τόσον αἱ τετμημέναι t_k καί τά βάρη A_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ ὅσον καί τό σφάλμα E_n τῆς προσεγγιστικῆς κατά GAUSS ὁλοκληρώσεως δέν ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν πόλων τῆς ὁλοκληρουμένης συναρτήσεως $f(z)$ ἐπί τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος L, ὅπερ σημαίνει ὅτι αἱ γνωσταί τιμαί των ἐκ τῶν διαφόρων περιπτώσεων προσεγγιστικοῦ κατά GAUSS ὑπολογισμοῦ ἁπλῶν ὁλοκληρωμάτων, γνωσταί ἀπό πολλῶν ἐτῶν, καθ'ἃ ἀνεφέρθησαν εἰς τό τμῆμα Γ1, ἰσχύουν ἐξ ἴσου καλῶς καί διά τόν προσεγγιστικόν κατά GAUSS ὑπολογισμόν ἰδιομόρφων κατά CAUCHY ὁλοκληρωμάτων ἀρκεῖ νά εἰσαχθῇ ὁ πρόσθετος διά τοῦ ἁ-

θροίσματος ἀπό 1 ἕως m ἐκφραζόμενος ὅρος τοῦ τύπου (9), ὅστις κατά τά ἄλλα εἶναι ὁ γνωστός τύπος προσεγγιστικῆς ὁλοκληρώσεως κατά GAUSS.

Τό σφάλμα E_n δύναται νά γραφῇ ἁπλούστερον κατά τόν ἑξῆς τρόπον : Ἀντιστρέφομεν τήν σειράν ὁλοκληρώσεως εἰς τό ὁλοκλήρωμα τοῦ τύπου (11), τούτου ἐπιτρεπομένου {WOODS, 1971, §1.9} , καθ'ὅσον, ἄν καί ἡ ὁλοκληρουμένη συνάρτησις ἐπί τῆς καμπύλης C εἶναι ἰδιόμορφος κατά CAUCHY, λόγῳ τοῦ ὅρου $(\tau-t)$ εἰς τόν παρονομαστήν, ἐν τούτοις ἡ συνάρτησις $w(t)p_n(t)$ ἡ ὑπεισερχομένη εἰς τήν ὁλοκλήρωσιν ἐπί τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως (α,β) δέν παρουσιάζει ἰδιομορφίαν κατά CAUCHY, ὁπότε εὑρίσκομεν :

$$E_n = \frac{1}{\pi i}\int_C \frac{f(\tau)}{p_n(\tau)}\,\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{w(t)p_n(t)\,dt}{\tau-t}\,d\tau. \tag{12}$$

Θέτοντες περαιτέρω :

$$q_n(z) = -\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{w(t)p_n(t)}{t-z}\,dt \tag{13}$$

καί καλοῦντες τήν συνάρτησιν $q_n(z)$ συνάρτησιν δευτέρου εἴδους ἀντίστοιχον τοῦ πολυωνύμου $p_n(z)$ λαμβάνομεν βάσει τοῦ δευτέρου τύπου τοῦ PLEMELJ ἐπί τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως (α,β) :

$$q_n^+(\tau)+q_n^-(\tau) = -\int_\alpha^\beta \frac{w(t)p_n(t)}{t-\tau}\,dt. \tag{14}$$

Ὁρίζοντες ἀκολούθως ἐπί τοῦ διαστήματος (α,β) ὡς ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως $q_n(z)$, ἥτις κατά τόν τύπον (13) εἶναι τμηματικῶς ὁλόμορφος ἐπί τοῦ ἐπιπέδου ἐξαιρουμένου τοῦ διαστήματος (α,β), τήν :

$$q_n(\tau) = \frac{1}{2}\left[q_n^+(\tau)+q_n^-(\tau)\right], \tag{15}$$

εὑρίσκομεν βάσει καί τοῦ τύπου (14) :

$$q_n(\tau) = -\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{w(t)p_n(t)}{t-\tau}\,dt, \tag{16}$$

ὁπότε ἡ ἔκφρασις (12) τοῦ σφάλματος E_n τῆς προσεγγιστικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS μέ n σημεῖα καθίσταται :

$$E_n = \frac{1}{\pi i}\int_C \frac{q_n(\tau)}{p_n(\tau)} f(\tau)d\tau. \tag{17}$$

Δέν θά ἐπιμείνωμεν ἐπί τῆς ἐκφράσεως (17), καθ'ὅσον, ὡς προανεφέρθη, οὐδόλως ἐπηρεάζεται ἐκ τῆς ὑπάρξεως ἤ μή ἰδιομορφιῶν τύπου ἀπλῶν πόλων τῆς πρός ὁλοκλήρωσιν συναρτήσεως f(z). Δυνάμεθα δέ νά παρατηρήσωμεν περαιτέρω ὅτι οἱ τύποι (13) καί (16) οἱ ὁρίζοντες τήν συνάρτησιν δευτέρου εἴδους $q_n(z)$ ἐκτός καί ἐπί τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως ἀντιστοίχως ὁδηγοῦν καί εἰς ἀπλουστέραν ἔκφρασιν τῆς κατά τόν τύπον (9) προσεγγιστικῆς τιμῆς τοῦ πρός ὑπολογισμόν ὁλοκληρώματος ὡς κάτωθι :

$$I = \int_\alpha^\beta w(t)f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k) - 2\sum_{k=1}^{m} \frac{\rho_k q_n(z_k)}{p_n(z_k)} + E_n. \tag{18}$$

Οἱ δύο πρῶτοι ὅροι τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς ἰσότητος (18) ἀποτελοῦν τήν προσεγγιστικήν κατά GAUSS ἔκφρασιν τοῦ ὁλοκληρώματος I, ἐνῷ ὁ τρίτος ὅρος E_n τό σφάλμα κατά τόν προσεγγιστικόν ὑπολογισμόν τοῦ ὁλοκληρώματος. Ἐκ τῶν δύο πρώτων ὅρων τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς ἰσότητος (18), ὁ μέν πρῶτος εἶναι ὁ μονίμως ὑπάρχων ἀνεξαρτήτως τῶν ἰδιομορφιῶν τύπου ἀπλῶν πόλων τῆς συναρτήσεως f(z), ἐνῷ ὁ δεύτερος ὀφείλεται εἰς τούς ἀπλοῦς πόλους τῆς συναρτήσεως f(z) τόσον ἐπί τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως L ὅσον καί ἐκτός αὐτοῦ ἀλλ' ἐντός τῆς καμπύλης C, ἥτις ἐν πάσῃ περιπτώσει εἶναι κατ'ἀρχήν αὐθαίρετος ἐκλεγομένη ὅμως οὕτως, ὥστε τό σφάλμα E_n νά καθίσταται ὅσον τό δυνατόν μικρότερον.

Σημειοῦμεν ὡσαύτως ὅτι ἐκφράζοντες τήν συνάρτησιν f(z) συναρτήσει μιᾶς νέας συναρτήσεως g(z), ἥτις πλέον δέν ἔχει πόλους ἐντός τῆς καμπύλης C, ὡς ἐξῆς :

$$f(z) = g(z)/\prod_{k=1}^{m}(z-z_k) \tag{19}$$

καί λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν ὅτι διά $|z| \to \infty$ ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\frac{q_n(z)}{p_n(z)} = \mathcal{O}(z^{-2n-1}), \tag{20}$$

δυναμένη σχετικῶς εὐκόλως νά ἀποδειχθῇ {McNAMEE, 1964}, προκύπτει βάσει τῆς ἐκφράσεως (17) τοῦ σφάλματος ὅτι ἡ προσεγγιστική μέθοδος ὁλοκληρώσεως κατά GAUSS εἶναι ἀκριβής διά συναρτήσεις f(z) τοιαύτας, ὥστε ἡ ἀντίστοιχος συνάρτησις g(z) νά εἶναι πολυώνυμον μέχρι (2n+m-1) βαθμοῦ, ἔνθα n ὁ ἀριθμός τῶν χρησιμοποιουμένων διά τήν προσεγγιστικήν ὁλοκλήρωσιν σημείων τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως καί m ὁ ἀριθμός τῶν ἁπλῶν πόλων τῆς συναρτήσεως f(z) ἐντός τῆς καμπύλης C θεωρουμένης τεινούσης νά συμπέσῃ μέ τόν ἄπειρον κύκλον.

Ἐάν κατά σύμπτωσιν ἁπλοῦς τις πόλος τῆς συναρτήσεως f(z) ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως (α,β) συμπίπτῃ μέ μίαν ρίζαν t_k (k = 1,2,...,n) τοῦ πολυωνύμου $p_n(z)$, τά προαναφερθέντα δέν ἰσχύουν, καθ' ὅσον τότε ἡ ὁλοκληρουμένη συνάρτησις τοῦ ὁλοκληρώματος (6) παρουσιάζει εἰς τό θεωρηθέν σημεῖον διπλοῦν πόλον. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην δυνάμεθα νά μεταβάλωμεν τόν ἀριθμόν n, ὁπότε ἡ προαναφερθεῖσα σύμπτωσις πιθανώτατα θά ἐκλείψῃ.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Ἡ πραγματοποιηθεῖσα εἰς τό τμῆμα τοῦτο ἐπέκτασις τῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS εἰς τόν ὑπολογισμόν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων ἀποτελεῖ γενίκευσιν τῆς ἀκολουθηθείσης ὑπό τοῦ HUNTER {1972} καί τῶν CHAWLA and RAMAKRISHNAN {1974A} μεθόδου, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος ἐπεξέτεινε τήν μέθοδον GAUSS-LEGENDRE, οἱ δ' ἄλλοι τήν μέθοδον GAUSS-JACOBI, καί ὡς εἰδικήν περίπτωσιν ταύτης τήν μέθοδον GAUSS-CHEBYSHEV, εἰς τόν ὑπολογισμόν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων.

Ἡ ἐπέκτασις τῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως GAUSS εἰς τόν ὑπολογισμόν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων ὀφείλεται βασικῶς εἰς τόν HUNTER, ὅστις εἰς τήν προαναφερθεῖσαν ἐργασίαν του ἀπέδειξεν ὅτι τυχόν ὑφιστάμενοι ἁπλοῖ πόλοι τῆς

πρός ὁλοκλήρωσιν συναρτήσεως ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως δύνανται νά ἀντιμετωπίζωνται κατά τόν αὐτόν τρόπον μέ τούς εὑρισκομένους ἐκτός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως ἁπλοῦς πόλους τῆς συναρτήσεως ταύτης. Ἡ περίπτωσις ὑπάρξεως ἁπλῶν πόλων τῆς πρός ὁλοκλήρωσιν συναρτήσεως ἐκτός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως ἔχει μελετηθῆ πλήρως ὑπό πολλῶν ἐρευνητῶν, μεταξύ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νά ἀναφέρωμεν τόν McNAMEE {1964}, τούς TAKAHASI and MORI {1970,1971} ὡς καί τούς DONALDSON and ELLIOTT {1972}.

Πρέπει νά παρατηρηθῇ εἰς τό σημεῖον τοῦτο ὅτι εἰς τήν περίπτωσιν τῶν εἰς τήν μελέτην ταύτην θεωρουμένων ἰδιομόρφων, κατά CAUCHY, ὁλοκληρωμάτων ἡ πρός ὁλοκλήρωσιν συνάρτησις παρουσιάζει ἕνα μόνον ἁπλοῦν πόλον ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, καίτοι ὁ HUNTER {1972} ὡς καί οἱ CHAWLA and RAMAKRISHNAN {1974A} ἐθεώρησαν ὅτι ἡ πρός ὁλοκλήρωσιν συνάρτησις δύναται νά ἔχῃ πολλούς ἁπλοῦς πόλους ἐντός τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως.

Δυνάμεθα τέλος νά ἀναφέρωμεν ὅτι διά τόν ὑπολογισμόν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωμάτων ἀνεπτύχθη πέραν τῆς προαναφερθείσης μεθόδου τοῦ GAUSS καί ἑτέρα ἀρκετά συγγενής κατά τά ἀποτελέσματά της μέθοδος ὑπό τῶν PAGET and ELLIOTT (ἰδ. PAGET and ELLIOTT {1972}, ELLIOTT and PAGET {1975}). Ἡ μέθοδος αὕτη στηρίζεται εἰς τήν ἀνάπτυξιν τῆς πρός ὁλοκλήρωσιν συναρτήσεως εἰς σειράν ὀρθογωνίων πολυωνύμων καί ἐν συνεχείᾳ ὑπολογισμόν τοῦ ὁλοκληρώματος.