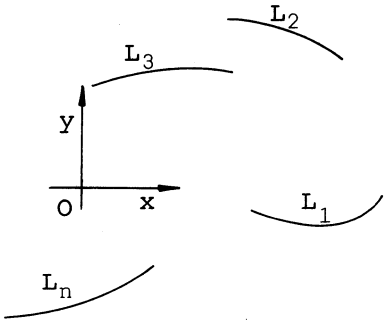
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΣΥΝΘΕΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΡΩΓΜΩΝ

Β1. ΡΩΓΜΑΙ ΕΝΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΙΣΟΤΡΟΠΟΥ ΜΕΣΟΥ

Θεωροῦμεν σύστημα n λείων ρωγμῶν κατά τυχόντα τρόπον διατεταγμένων έντός άπείρου ίσοτρόπου μέσου, ὡς εἰς τό Σχῆμα 1. Αἱ ρωγμαί θεωροῦνται κατά τυχόντα τρόπον φορτισμέναι, ὑφίσταται δέ προσέτι καί φόρτισις εἰς τό ἄπειρον. Τό πρόβλημα τοῦτο ἀποτελεῖ ἄμεσον ἐπέκτασιν τοῦ προβλήματος τῆς μιᾶς μόνον ρωγμῆς έντός ἀπείρου ίσοτρόπου μέσου. Οὕτως εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος έργαζόμεθα ἀκριβῶς ὅπως εἰς τό τμῆμα Α1 διά μίαν μόνον λείαν ρωγμήν καί χρησιμοποιοῦντες τόν αὐτόν συμβολισμόν καταλήγομεν εἰς τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (Α1.15) μέ μόνην τήν παρατήρησιν ὅτι ὡς ὁλοκλήρωσις ἐπί τῆς καμπύλης L νοεῖται ἡ ὁλοκλήρωσις ἐφ'ὅλων τῶν ρωγμῶν L_k $(k = 1,2,\ldots,n)$, ἤτοι $L = \sum_{k=1}^{n} L_k$, ἔνθα n ὁ ἀριθμός τῶν ἁπλῶν ρωγμῶν.



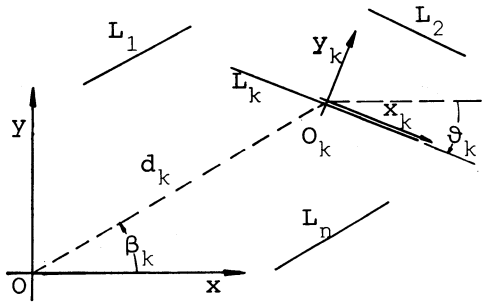
Σχῆμα 1

Διαφορά παρουσιάζεται μόνον εἰς τό σημεῖον ὅτι ἐνταῦθα αἱ ἀπαιτήσεις τοῦ μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων ὁδηγοῦν εἰς n συνθήκας τῆς μορφῆς (Α1.23), ἔνθα ἡ ὁλοκλήρωσις δέν νοεῖται ταύτοχρόνως ἐφ'ὅλων τῶν ρωγμῶν, ἀλλά διαδοχικῶς ἐπί μιᾶς ἑκάστης τούτων, ἤτοι δέον ὅπως εἶναι,

$$\int_{L_k} \varphi(\tau)d\tau = \frac{2}{\varkappa+1} \int_{L_k} q(\tau)d\tau \quad , k = 1,2,\ldots,n. \qquad (1)$$

Δέν θά ἐπεκταθῶμεν εἰς τήν ἐξέτασιν τῶν ἄλλων θεμελιωδῶν προβλημάτων. Θά δώσωμεν ὅμως τούς ἰσχύοντας τύπους εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος, καθ'ἣν αἱ ρωγμαί L_k εἶναι εὐθύγραμμοι.

Θεωροῦμεν οὕτως τό σύστημα τῶν n εὐθυγράμμων ρωγμῶν τοῦ Σχήματος 2. Ἔστω O_k τό μέσον τῆς ρωγμῆς L_k. Μέ βοηθητικόν σύστημα ἀξόνων $O_k x_k y_k$ μέ τόν ἄξονα $O_k x_k$ ἐκτεινόμενον κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς L_k, αὕτη δύναται νά θεωρηθῇ ἐκτεινομένη εἰς τό διάστημα $-\alpha_k < x_k < \alpha_k$. Δηλοῦμεν ὡσαύτως d_k τήν ἀπόστασιν τοῦ μέσου O_k τῆς ρωγμῆς L_k ἀπό τό κέντρον O τοῦ κυρίου συστήματος συντεταγμένων, ϑ_k τήν γωνίαν ἀπό τοῦ ἄξονος Ox μέχρι τοῦ βοηθητικοῦ ἄξονος $O_k x_k$ ἤτοι τῆς διευθύνσεως τῆς ρωγμῆς L_k καί β_k τήν γωνίαν μεταξύ τοῦ ἄξονος Ox καί τῆς εὐθείας OO_k. Ἐάν τά σημεῖα τ καί t εἰς τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (A1.15) θεωρηθοῦν κείμενα ἐπί τῆς ρωγμῆς L_k, δυνάμεθα νά θέσωμεν :



Σχῆμα 2

$$\tau = x_k e^{i\vartheta_k} + d_k e^{i\beta_k} \quad , \quad t = x_{ok} e^{i\vartheta_k} + d_k e^{i\beta_k}. \qquad (2)$$

Βάσει τῶν ἀνωτέρω ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (A1.15) δύναται νά γραφῇ ὡς κάτωθι μέ πραγματικάς μεταβλητάς τάς x_k καί x_{ok} ἀντί τῶν μιγαδικῶν τ καί t, ὅτε ἀναλύεται εἰς n ἰδιομόρφους ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις ἐπί τῶν n ρωγμῶν :

$$\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{-\alpha_i}^{\alpha_i} \frac{\tilde{\varphi}(x_i)}{x_i - x_{ok} e^{i(\vartheta_k - \vartheta_i)} + (d_i e^{i\beta_i} - d_k e^{i\beta_k}) e^{-i\vartheta_i}} \, dx_i + \right.$$

$$+ \int_{-\alpha_i}^{\alpha_i} \frac{\overline{\tilde{\varphi}(x_i)}}{x_i - x_{ok} e^{-i(\vartheta_k - \vartheta_i)} + (d_i e^{-i\beta_i} - d_k e^{-i\beta_k}) e^{i\vartheta_i}} \, dx_i +$$

$$+e^{2i(\vartheta_k-\vartheta_i)}\left[\int_{-\alpha_i}^{\alpha_i}\frac{\overline{\tilde{\varphi}(x_i)}}{x_i-x_{ok}e^{i(\vartheta_k-\vartheta_i)}+(d_ie^{i\beta_i}-d_ke^{i\beta_k})e^{-i\vartheta_i}}dx_i-\right.$$

$$\left.-\int_{-\alpha_i}^{\alpha_i}\tilde{\varphi}(x_i)\frac{x_i-x_{ok}e^{-i(\vartheta_k-\vartheta_i)}+(d_ie^{-i\beta_i}-d_ke^{-i\beta_k})e^{i\vartheta_i}}{[x_i-x_{ok}e^{i(\vartheta_k-\vartheta_i)}+(d_ie^{i\beta_i}-d_ke^{i\beta_k})e^{-i\vartheta_i}]^2}dx_i\right]\Bigg\}=$$

$$=2\overline{\tilde{p}(x_{ok})}+\frac{2}{\pi}e^{2i\vartheta_k}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\alpha_i}^{\alpha_i}\frac{\overline{\tilde{q}(x_i)}}{x_i-x_{ok}e^{i(\vartheta_k-\vartheta_i)}+(d_ie^{i\beta_i}-d_ke^{i\beta_k})e^{-i\vartheta_i}}dx_i,$$

$$k=1,2,\ldots,n, \tag{3}$$

ἔνθα ἐτέθησαν ἐπί τῆς ρωγμῆς L_k:

$$\tilde{\varphi}(x_k)=-i\varphi(x_ke^{i\vartheta_k}),\quad \tilde{p}(x_{ok})=p(x_{ok}e^{i\vartheta_k}),$$

$$\tilde{q}(x_k)=-iq(x_ke^{i\vartheta_k}) \tag{4}$$

χάριν ἁπλότητος εἰς τούς συμβολισμούς.

Ἐπίσης αἱ συνθῆκαι τοῦ μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων (1) δύνανται νά γραφοῦν ὡς ἑξῆς :

$$\int_{-\alpha_k}^{\alpha_k}\tilde{\varphi}(x_k)dx_k=\frac{2}{\varkappa+1}\int_{-\alpha_k}^{\alpha_k}\tilde{q}(x_k)dx_k,\quad k=1,2,\ldots,n. \tag{5}$$

Ἐάν τεθῇ ὡσαύτως :

$$S_{ki}(x_i,\ x_{ok})=\frac{1}{2}\left[x_i-x_{ok}e^{-i(\vartheta_k-\vartheta_i)}+(d_ie^{-i\beta_i}-d_ke^{-i\beta_k})e^{i\vartheta_i}\right]^{-1} \tag{6}$$

καί ληφθῇ ἡ συζυγής ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις τῆς (3), αὕτη γράφεται λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν καί τῆς ἐπερχομένης ἁπλοποιήσεως εἰς τούς ὅρους μέ $i=k$ ὡς κάτωθι :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_k}^{\alpha_k}\frac{\tilde{\varphi}(x_k)}{x_k-x_{ok}}dx_k+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\int_{-\alpha_i}^{\alpha_i}\Big\{\Big[\overline{S_{ki}(x_i,\ x_{ok})}+$$

$$+e^{2i(\vartheta_i-\vartheta_k)}S_{ki}(x_i,\ x_{ok})\Big]\tilde{\varphi}(x_i)+\Big[S_{ki}(x_i,\ x_{ok})-$$

$$-e^{2i(\vartheta_i-\vartheta_k)}\frac{S^2_{ki}(x_i,\ x_{ok})}{\overline{S_{ki}(x_i,\ x_{ok})}}\Big]\overline{\tilde{\varphi}(x_i)}\ \Big\}\ dx_i = \tilde{p}(x_{ok})+$$

$$+\frac{2}{\pi}e^{-2i\vartheta_k}\cdot\sum_{i=1}^{n}\int_{-\alpha_i}^{\alpha_i} S_{ki}(x_i,\ x_{ok})\tilde{q}(x_i)dx_i,\quad k=1,2,\ldots,n. \quad (7)$$

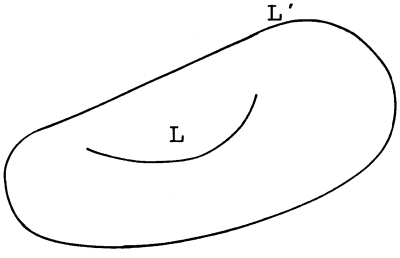
ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Τό ἐξετασθέν εἰς τό τμῆμα τοῦτο πρόβλημα τῶν πολλῶν ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου ἔχει μελετηθῆ κυρίως διά τήν εἰδικήν περίπτωσιν, ὅπου αἱ ρωγμαί κεῖνται ἐπ' εὐθείας (πρβλ. GREEN and ZERNA {1968, §8.15}, MILNE-THOMSON {1968, §4.12-4.16}, ERDOGAN {1962}, RICE {1968}). Ὁ TAMATE {1970} ἐμελέτησε τό πρόβλημα τοῦ ἐξησθενημένου διά δύο ρωγμῶν σχήματος τόξων ὁμοκέντρων κύκλων ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου, οἱ δέ YOKOBORI , UOZUMI and ICHIKAWA {1971} τό πρόβλημα τοῦ ἐξησθενημένου διά δύο εὐθυγράμμων καί ἐπί παραλλήλων εὐθειῶν κειμένων ρωγμῶν ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου. Ἀκολούθως ὁ ISIDA {1973} δι' ἀναπτύξεως τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν εἰς σειράς ἐμελέτησε διάφορα προβλήματα εὐθυγράμμων ρωγμῶν καί ἀλληλεπιδράσεως αὐτῶν.

Τέλος οἱ DATSYSHIN and SAVRUK {1973,1974} ἀντεμετώπισαν τό γενικόν πρόβλημα τοῦ ἐξησθενημένου δι' εὐθυγράμμων ρωγμῶν ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου μέ μόνην τήν παραδοχήν τῆς αὐτῆς φορτίσεως ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν ἑκάστης ρωγμῆς. Τήν παραδοχήν ταύτην ἐξηλείψαμεν εἰς τό τμῆμα τοῦτο, ὅπου ἐθεωρήσαμεν τάς εὐθυγράμμους ρωγμάς δυναμένας νά φορτίζωνται κατά διάφορον τρόπον ἐπί τῶν δύο πλευρῶν των, καίτοι ἠκολουθήσαμεν κατά τά ἄλλα τήν μέθοδον τῶν DATSYSHIN and SAVRUK.

Ὅσον ἀφορᾷ τέλος εἰς τό πρόβλημα τοῦ ἐξησθενημένου διά τυχόντων σχημάτων ρωγμῶν ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου, τούτου δέν γνωρίζομεν νά ἔχῃ δοθῆ γενική λύσις πέραν τῆς εἰς τό τμῆμα τοῦτο ὑποδεικνυομένης.

B2. ΡΩΓΜΗ ΕΝΤΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΙΣΟΤΡΟΠΟΥ ΜΕΣΟΥ

Εἰς τό παρόν τμῆμα θά δώσωμεν τήν λύσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος δι'ἁπλῆν λείαν ρωγμήν L ἐντός πεπερασμένου ἰσοτρόπου μέσου περιοριζομένου ὑπό ἁπλῆς λείας καμπύλης L' ὡς εἰς τό παραπλεύρως Σχῆμα 1. Θά ἴδωμεν ὅτι τό πρόβλημα τῆς ρωγμῆς ἐντός πεπερασμένου ἰσοτρόπου μέσου δέν παρουσιάζει ἰδιαιτέρας δυσκολίας κατά τήν ἐπίλυσίν του καί ὅτι ὁ τρόπος ἐπιλύσεως εἶναι ἀρκετά ἀνάλογος τοῦ εἰς τό τμῆμα A1 ἐκτιθεμένου διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος διά ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου.



Σχῆμα 1

Ἤδη ἀνατρέχοντες εἰς τό τμῆμα A1 παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τούς τύπους (A1.1) αἱ σταθεραί Γ καί Γ' τῆς φορτίσεως εἰς τό ἄπειρον δύνανται νά θεωρηθοῦν ἐν προκειμένῳ μηδενικαί. Θεωροῦμεν ὡσαύτως τήν συνάρτησιν $\Phi(z)$ διδομένην ὑπό τοῦ τύπου (A1.7) καί ἀνάγομεν οὕτω τό πρόβλημά μας εἰς τόν προσδιορισμόν τῆς συναρτήσεως $\varphi(t)$. Πρέπει ὅμως ἐνταῦθα τό ὁλοκλήρωμα CAUCHY (A1.7) νά ἐκτείνεται ὄχι μόνον ἐπί τῆς ρωγμῆς L, ἀλλά καί ἐπί τοῦ ὁρίου L' τοῦ πεπερασμένου ἰσοτρόπου μέσου, ἐάν δέ τεθῇ $L_0 = L+L'$, ὁ τύπος (A1.7) δύναται νά γραφῇ ὡς ἑξῆς :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau\,. \qquad (1)$$

Ἐπί τῆς ρωγμῆς L ἰσχύουν πάλιν αἱ ὁριακαί συνθῆκαι (A1.4), αἵτινες λόγῳ τοῦ τύπου (1) καί τῶν τύπων τοῦ PLEMELJ γράφονται καί ὡς ἑξῆς :

$$\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}+\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\bar{t}\varphi'(t)+\Psi^{+}(t)-\Psi^{-}(t)\right] = 2\overline{q(t)}, \qquad (2a)$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{L_o}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_{L_o}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{d\tau}+\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\frac{\overline{t}}{\pi i}\int_{L_o}\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau+\Psi^+(t)+\right.$$
$$\left.+\Psi^-(t)\right] = 2\overline{p(t)}. \qquad (2\beta)$$

Ἐπί τῆς ἐξωτερικῆς καμπύλης L′, ὅπου θεωρεῖται, ὡς καί ἐπί τῆς ρωγμῆς, γνωστή ἡ φόρτισις, ἡ ὁριακή συνθήκη, λόγῳ τοῦ τύπου (A1.3), θά εἶναι :

$$\Phi^+(t)+\overline{\Phi^+(t)}+\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\overline{t}\Phi'^+(t)+\Psi^+(t)\right] = \overline{p(t)}, \qquad (3)$$

ἔνθα ἐτέθη ἐπί τῆς καμπύλης L′,

$$p(t) = \sigma_n+i\sigma_t. \qquad (4)$$

Αἱ συναρτήσεις Φ(z) καί Ψ(z) δέν ὁρίζονται κατ' ἀρχήν εἰς τό ἄπειρον τμῆμα τοῦ ἐπιπέδου ἐκτός τῆς καμπύλης L′. Δυνάμεθα ὅμως ἡμεῖς νά θεωρήσωμεν ταύτας ὁριζομένας καί ἐκεῖ βάσει τῶν αὐτῶν τύπων, ὡς τοῦ (1) διά τήν συνάρτησιν Φ(z), τῶν ἰσχυόντων διά τό πεπερασμένον τμῆμα τοῦ ἐπιπέδου τό καταλαμβανόμενον ὑπό τοῦ ἰσοτρόπου μέσου καί κείμενον ἐντός τῆς καμπύλης L′. Δυνάμεθα οὕτω νά εἰσαγάγωμεν διά τάς ὁριακάς τιμάς $\Phi^-(t)$ καί $\Psi^-(t)$ τῶν συναρτήσεων Φ(z) καί Ψ(z) ἐκτός τῆς καμπύλης L′ αὐθαίρετον ὁριακήν συνθήκην ἀνάλογον τῆς (3). Ὡς τοιαύτη δέ προτιμᾶται ἡ ἑξῆς :

$$\Phi^-(t)+\overline{\Phi^-(t)}+\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\overline{t}\Phi'^-(t)+\Psi^-(t)\right] = \overline{p(t)}, \qquad (5)$$

ὅτε διά προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (3) καί (5) λόγῳ καί τῆς ἐκφράσεως (1) τῆς συναρτήσεως Φ(z) καί τῶν τύπων τοῦ PLEMELJ προκύπτουν καί ἐπί τῆς καμπύλης L′ ὁριακαί συνθῆκαι ἐντελῶς ἀνάλογοι τῶν ἐπί τῆς ρωγμῆς L ἰσχυουσῶν (2) μέ μόνην τήν διαφοράν ὅτι ἐπί τῆς καμπύλης L′ ἡ συνάρτησις q(t) εἶναι μηδενική καί τοῦτο λόγῳ τῆς ἐκλογῆς τῆς ὁριακῆς συνθήκης (5).

Εἶναι πλέον προφανές ὅτι οἱ τύποι (A1.11-15) ἰσχύουν καί ἐν προκειμένῳ, ἀρκεῖ νά τεθῇ L_o ἀντί τοῦ L πλήν τῶν ὁ-

λοκληρωμάτων τῶν περιλαμβανόντων τήν συνάρτησιν q(t), ἅτινα ἐκτείνονται πάλιν μόνον ἐπί τῆς ρωγμῆς L. Ἡ λύσις δηλαδή τοῦ προβλήματός μας δίδεται ὑπό τοῦ τύπου (1) τοῦ ἐκφράζοντος τήν Φ(z) καί τοῦ τύπου :

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-z}\overline{d\tau} - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_o}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-z}\overline{d\tau} - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_o}\frac{\overline{\tau}\varphi(\tau)}{(\tau-z)^2}d\tau \quad (6)$$

τοῦ δίδοντος τήν Ψ(z), τῆς συναρτήσεως φ(t) εὑρισκομένης ὡς λύσεως τῆς ἀντιστοίχου πρός τήν (A1.15) ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως :

$$\frac{1}{\pi i}\int_{L_o}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau - \frac{1}{\pi i}\int_{L_o}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{d\tau} - \frac{dt}{\overline{dt}}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{L_o}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi i}\int_{L_o}\varphi(\tau)\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{(\tau-t)^2}d\tau\right] = 2\overline{p(t)} - \frac{2}{\pi i}\frac{dt}{\overline{dt}}\int_L\frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau} \quad (7)$$

ἰσχυούσης τόσον ἐπί τῆς ρωγμῆς L ὅσον καί ἐπί τοῦ ἐξωτερικοῦ ὁρίου L', τῆς συναρτήσεως p(t) ὁριζομένης ἐπί μέν τῆς ρωγμῆς L βάσει τοῦ τύπου :

$$2p(t) = (\sigma_n^+ + \sigma_n^-) + i(\sigma_t^+ + \sigma_t^-), \quad (8)$$

προκύπτοντος ἀπό τόν (A1.5α), ἐάν τεθῇ, ὡς προανεφέρθη, Γ = = Γ' = 0, ἐπί δέ τῆς καμπύλης L' βάσει τοῦ τύπου (4).

Πέραν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (7) ἡ συνάρτησις φ(t) πρέπει ὁπωσδήποτε νά πληροῖ καί τήν συνθήκην μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων (A1.23).

Πρέπει ὡσαύτως καί ἐπί τῆς ἐξωτερικῆς καμπύλης L' νά ἰσχύῃ ἡ συνθήκη τοῦ μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων :

$$\int_{L'} d\{-u^+(\tau) + iv^+(\tau)\} = 0. \quad (9)$$

Θά δείξωμεν ὅτι αὕτη ἰσχύει καί δέν ἀπαιτεῖται νά ληφθῇ ἰδιαιτέρως ὑπ' ὄψιν, ὡς ἡ (A1.23), κατά τήν λύσιν ἑνός συγκεκριμένου προβλήματος.

Πράγματι ἡ συνθήκη (9) δύναται νά γραφῇ καί ὡς ἑξῆς :

$$\int_{L'}\left\{\frac{du^+(\tau)}{\overline{d\tau}} + i\frac{dv^+(\tau)}{\overline{d\tau}}\right\}\overline{d\tau} = 0, \quad (10)$$

λαμβανομένου δέ ὑπ'ὄψιν καί τοῦ τύπου (A1.19) αὕτη περαι - τέρω γράφεται :

$$\int_{L'} \left\{ \Phi^{+}(\tau) - \kappa\overline{\Phi^{+}(\tau)} + \frac{d\tau}{\overline{d\tau}} \left[\overline{\tau}\Phi'^{+}(\tau) + \Psi^{+}(\tau) \right] \right\} \overline{d\tau} = 0 \quad (11)$$

ἤ ἀκόμη, λόγῳ τοῦ τύπου (3) καί τοῦ τύπου (A1.25α) :

$$(\kappa+1) \int_{L'} \Phi^{+}(\tau)d\tau = \int_{L'} p(\tau)d\tau = i(X_n+iY_n), \quad (12)$$

ἔνθα (X_n, Y_n) εἶναι ἡ συνολικῶς ἐξασκουμένη δύναμις ἐπί τῆς καμπύλης L'. Δεδομένου ὅμως ὅτι τό θεωρηθέν ἰσότροπον μέσον ἰσορροπεῖ, ἀντίθετος τῆς προαναφερθείσης δυνάμεως (X_n, Y_n) πρέπει νά εἶναι ἡ συνολικῶς ἐξασκουμένη ἐπί τῆς ρωγμῆς δύναμις (X,Y), ἤτοι νά ἔχωμεν λόγῳ καί τοῦ τύπου (A1.26) :

$$X+iY = -2i \int_{L} q(\tau)d\tau = -(X_n+iY_n) = i(\kappa+1) \int_{L'} \Phi^{+}(\tau)d\tau. \quad (13)$$

Βάσει ὅμως τοῦ τύπου τοῦ CAUCHY, δεδομένου ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$ εἶναι τμηματικῶς ὁλόμορφος ἐντός τῆς καμπύλης L' πλήν τῆς ρωγμῆς L, εἶναι :

$$\int_{L'} \Phi^{+}(\tau)d\tau = -\int_{L} \left\{ \Phi^{+}(\tau) - \Phi^{-}(\tau) \right\} d\tau = -\int_{L} \varphi(\tau)d\tau, \quad (14)$$

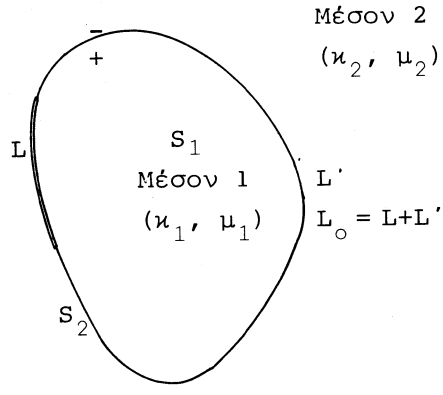
ὁπότε ἡ συνθήκη (13) τοῦ μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων ἐπί τῆς καμπύλης L' ἀνάγεται εἰς τήν συνθήκην (A1.23) τοῦ μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων ἐπί τῆς ρωγμῆς L, ἐφ'ὅσον δηλαδή ἰσχύει ἡ μία συνθήκη, ἰσχύει καί ἡ ἑτέρα.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Τό ἐξετασθέν εἰς τό τμῆμα τοῦτο πρόβλημα τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός πεπερασμένου ἰσοτρόπου μέσου δέν ἔχει τύχει μέχρι σήμερον γενικῆς μεθόδου ἀντιμετωπίσεως, καίτοι πλεῖσται εἰδικαί περιπτώσεις αὐτοῦ ἔχουν ἐπιλυθῆ ὑπό διαφόρων ἐρευνητῶν. Μεταξύ τῶν σχετικῶν ἐργασιῶν, ἀλλ'εἰς εἰδικά προβλήματα εὐθυγράμμων ρωγμῶν ἐντός πεπερασμένου ἰσοτρόπου μέσου ἀναφερομένων, δυνάμεθα νά ἀναφέρωμεν τό ἄρθρον τῶν SRIVASTAVA and KUMAR

{1971},εἰς τό ὁποῖον ἐπιλύεται τό πρόβλημα τῆς ἁπλῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς κειμένης ἐντός κυκλικοῦ δίσκου κατά μῆκος μιᾶς διαμέτρου τούτου, τό ἄρθρον τοῦ WILSON {1971}, εἰς τό ὁποῖον μελετᾶται τό πρόβλημα τῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς ἐντός πεπερασμένου καί τυχόντος σχήματος ἰσοτρόπου μέσου, τό ἄρθρον τῶν BOWIE, FREESE and NEAL {1973}, εἰς τό ὁποῖον μελετᾶται ἐπίσης τό αὐτό πρόβλημα τῇ χρήσει καί τῆς μεθόδου τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως, καί τό ἄρθρον τῶν HARTRANFT and SIH {1973,§4.2}, εἰς τό ὁποῖον ἐξετάζεται τό πρόβλημα ρωγμῆς καταληγούσης ἐπί τοῦ ὁρίου τοῦ πεπερασμένου ἰσοτρόπου μέσου τῆς λύσεως εὑρισκομένης διά διαδοχικῶν δοκιμῶν. Βάσιν τῶν χρησιμοποιουμένων εἰς τά τρία πρῶτα τῶν προαναφερθέντων ἄρθρων μεθόδων ἀποτελεῖ ἡ μέθοδος τῶν μιγαδικῶν μεταβλητῶν, τῆς δέ χρησιμοποιουμένης εἰς τό τέταρτον ἄρθρον μεθόδου ἡ μέθοδος τῶν μετασχηματισμῶν FOURIER.

Β3. ΡΩΓΜΗ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΙΣΟΤΡΟΠΩΝ ΜΕΣΩΝ

Θεωροῦμεν ἄπειρον ἐπίπεδον μέσον συνισταμένου ἐξ ἑνός ἀπείρου τμήματος S_2 καταλαμβανομένου ὑπό ἰσοτρόπου μέσου 2 μέ σταθεράς κ_2 καί μ_2, ἐντός τοῦ ὁποίου ἔχει ἐγκλεισθῆ πεπερασμένον ἔγκλεισμα S_1 ἐξ ἰσοτρόπου μέσου 1 μέ σταθεράς κ_1 καί μ_1, ὡς εἰς τό παραπλεύρως Σχῆμα 1. Τό ἔγκλεισμα S_1 καταλήγει εἰς λείαν καμπύλην L_o συνισταμένην ἐξ ἑνός τμήματος L', καθ'ὅ αἱ περιοχαί S_1 καί S_2 εἶναι συνηνωμέναι, καί ἐξ ἑνός τμήματος L, καθ'ὅ αἱ περιοχαί S_1 καί S_2 εἶναι ἐλεύθεραι νά μετατοπισθοῦν σχετικῶς μεταξύ των, σχηματιζομένης οὕτω μιᾶς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς μεταξύ τῶν περιοχῶν S_1 καί S_2. Ἐπί τῆς ρωγμῆς ταύτης L θεωροῦμεν ἐφαρμοζομένας ἐξωτερικάς φορτίσεις γνωστῆς ἐντάσεως κατ' ἀμφοτέρας τάς πλευράς αὐτῆς. Ἔχομεν δηλαδή τρόπον τινά περίπτωσιν πρώτου θεμελιώδους προβλήματος. Ἐπί τοῦ τμήματος L' ἀφ'ἑτέρου τῆς καμπύλης L_o ἀφ'ἑνός μέν ὑπάρχει συνέχεια τῆς καθέτου καί τῆς ἐφαπτομενικῆς συνιστώσης τῶν τάσεων μεταξύ τῶν περιοχῶν S_1 καί S_2, ἀφ'ἑτέρου δέ ὑπάρχει γνωστή ἀσυνέχεια μεταξύ τῶν μετατοπίσεων τῶν ἀντιστοίχων σημείων τῶν δύο περιοχῶν.



Σχῆμα 1

Κατά τά ἀνωτέρω ἔχομεν συνεπῶς ἐπί μέν τῆς ρωγμῆς L ὁριακάς συνθήκας τῆς μορφῆς (Α1.3), θεωροῦντες τήν καμπύλην L_o διαγραφομένην κατά τήν ἀνθωρολογιακήν φοράν, ἐπί δέ τῆς καμπύλης L' ἔχομεν τάς ἑξῆς δύο ὁριακάς συνθήκας :

$$\Phi_0^+(t)+\overline{\Phi_0^+(t)}+\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\bar{t}\Phi_0'^+(t)+\Psi_0^+(t)\right] =$$

$$= \Phi_0^-(t)+\overline{\Phi_0^-(t)}+\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\bar{t}\Phi_0'^-(t)+\Psi_0^-(t)\right], \qquad (1\alpha)$$

$$\Phi_0^+(t)-\varkappa_1\overline{\Phi_0^+(t)}+\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\bar{t}\Phi_0'^+(t)+\Psi_0^+(t)\right] =$$

$$= \Gamma_0\left\{\Phi_0^-(t)-\varkappa_2\overline{\Phi_0^-(t)}+\frac{dt}{\overline{dt}}\left[t\Phi_0'^-(t)+\Psi_0^-(t)\right]\right\}+g_0(t), \qquad (1\beta)$$

τῆς μέν πρώτης, λόγῳ καί τῶν τύπων (A1.3), ἐξασφαλιζούσης τήν συνέχειαν τῆς καθέτου καί τῆς ἐφαπτομενικῆς συνιστώσης τῶν τάσεων, τῆς δέ δευτέρας, λόγῳ καί τῶν τύπων (A1.19), ἐξασφαλιζούσης τήν θεωρουμένην ὡς γνωστήν ἀσυνέχειαν μεταξύ τῶν μετατοπίσεων τῶν ἀντιστοίχων σημείων τῶν δύο μέσων, τῆς συναρτήσεως $g_0(t)$ ὁριζομένης ὡς :

$$g_0(t) = 2\mu_1\left\{-\frac{d\left[u^+(t)-u^-(t)\right]}{\overline{dt}}+i\frac{d\left[v^+(t)-v^-(t)\right]}{\overline{dt}}\right\}. \qquad (2)$$

Ἡ ὑπεισερχομένη εἰς τήν σχέσιν (1β) σταθερά Γ_0 ὁρίζεται ὡς :

$$\Gamma_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \qquad (3)$$

Διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ὁριακῶν συνθηκῶν, ἤτοι καθορισμόν τῶν συναρτήσεων $\Phi_0(z)$ καί $\Psi_0(z)$ εἰς ὁλόκληρον τό ἐπίπεδον θά χρησιμοποιηθῇ μέθοδος ἀποτελοῦσα ἐπέκτασιν τῆς ἐφαρμοσθείσης εἰς τό τμῆμα A1 δι'ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου μέσου. Εἰσάγομεν οὕτως ἀντί τῶν συναρτήσεων $\Phi_0(z)$ καί $\Psi_0(z)$, τάς $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ βάσει τῶν σχέσεων (A1.1) ἐξασφαλίζοντες τήν συμπεριφοράν (A1.6) εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου τῶν ἀγνώστων συναρτήσεών μας.

Ἤδη ἐπί μέν τῆς ρωγμῆς L ἰσχύουν αἱ ὁριακαί συνθῆκαι (A1.4), ἐπί δέ τοῦ τόξου L' αἱ κάτωθι ὁριακαί συνθῆκαι προκύπτουσαι ἐκ τῶν (1) λόγῳ τῶν σχέσεων (A1.1):

$$\left[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)\right] + \left[\overline{\Phi^+(t)}-\overline{\Phi^-(t)}\right] + \frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\bar{t}\left[\Phi'^+(t)-\Phi'^-(t)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\Psi^+(t)-\Psi^-(t)\right]\right\} = 0, \qquad (4\alpha)$$

$$[\Phi^+(t)-\Gamma_0\Phi^-(t)] - [\varkappa_1\overline{\Phi^+(t)}-\Gamma_0\varkappa_2\overline{\Phi^-(t)}] + \frac{d\bar{t}}{dt}\Big\{\bar{t}\,[\Phi'^+(t)-$$

$$-\Gamma_0\Phi'^-(t)] + [\Psi^+(t)-\Gamma_0\Psi^-(t)]\Big\} = g(t), \qquad (4\beta)$$

ἔνθα ἐτέθη :

$$g(t) = g_0(t)+(\Gamma_0-1)\Gamma-(\Gamma_0\varkappa_2-\varkappa_1)\bar{\Gamma}+\frac{d\bar{t}}{dt}(\Gamma_0-1)\Gamma'. \qquad (5)$$

Θεωροῦμεν ἤδη τήν συνάρτησιν $\Phi(z)$ παρισταμένην ὑπό τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (A1.7) ἐκτεινομένου ὅμως ὄχι μόνον ἐπί τῆς ρωγμῆς L, ἀλλ'ἐφ'ὅλης τῆς καμπύλης L_0. Ἰσχυόντων ἤδη τῶν τύπων (A1.8-10) ἰσχύει καί ἡ ὁριακή συνθήκη (A1.11) ἐπί τῆς ρωγμῆς L, ὡσαύτως δέ ἡ κάτωθι ὁριακή συνθήκη προκύπτουσα ἐκ τῆς (4α) ἐπί τοῦ τόξου L':

$$\Psi^+(t)-\Psi^-(t) = -\frac{d\bar{t}}{dt}\left\{\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}\right\} - \bar{t}\varphi'(t). \qquad (6)$$

Ἀναλόγως πρός τήν παράστασιν (A1.12) διά τήν συνάρτησιν $\Psi(z)$ διά τήν περίπτωσιν ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $\Psi(z)$ διά τό ἐνταῦθα ἐξεταζόμενον πρόβλημα λόγῳ τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (A1.11) καί (6) δέον ὅπως δίδεται ὑπό τοῦ κάτωθι τύπου :

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-z}d\bar{\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-z}d\bar{\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\bar{\tau}\varphi(\tau)}{(\tau-z)^2}d\tau\ . \qquad (7)$$

Οἱ τύποι τοῦ PLEMELJ δίδουν διά τάς ὁριακάς τιμάς τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ ἐπί τῆς καμπύλης L_0 :

$$\Phi^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\ , \qquad (8)$$

ἐνῷ διά τάς ὁριακάς τιμάς τῆς συναρτήσεως $\Psi(z)$ ἰσχύει ἐπί μέν τῆς ρωγμῆς L ὁ τύπος :

$$\Psi^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}\left\{\frac{d\bar{t}}{dt}\left[2\overline{q(t)}-\varphi(t)-\overline{\varphi(t)}\right] - \bar{t}\varphi'(t)\right\} +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-t}d\bar{\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-t}d\bar{\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\bar{\tau}\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau\ , \qquad (9)$$

ἐπί δέ τοῦ τόξου L'ὁ αὐτός ὡς ἄνω τύπος μέ μόνην τήν διαφοράν ὅτι δέν ὑφίσταται ὁ ὅρος q(t) ἐντός τῆς πρώτης ἀγκύλης τοῦ πρώτου μέλους.

Ἤδη ἡ πρώτη ὁριακή συνθήκη (A1.4α) ἐπί τῆς ρωγμῆς L λόγῳ καί τῶν τύπων (A1.8-9) καταλήγει εἰς τήν κάτωθι ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν ἐντελῶς ἀνάλογον τῆς (A1.15):

$$\frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{d\tau}-\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\varphi(\tau)\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{(\tau-t)^2}d\tau\right\}=2\overline{p(t)}-\frac{2}{\pi i}\frac{dt}{\overline{dt}}\int_{L}\frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}\ . \quad (10)$$

Ἐπί τοῦ τόξου L' εὑρίσκεται ὁμοίως λόγῳ τῆς ὁριακῆς συνθήκης (4β) ἡ κάτωθι ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις :

$$(1+\Gamma_0)\varphi(t)+\frac{1-\Gamma_0}{\pi i}\int_{L_0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-(\varkappa_1+\Gamma_0\varkappa_2)\overline{\varphi(t)}+\frac{\varkappa_1-\Gamma_0\varkappa_2}{\pi i}\int_{L_0}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{d\tau}+$$
$$+\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\overline{t}\left[(1+\Gamma_0)\varphi'(t)+\frac{1-\Gamma_0}{\pi i}\int_{L_0}\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau\right]-\right.$$
$$-(1+\Gamma_0)\left[\frac{\overline{dt}}{dt}\left[\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}\right]+\overline{t}\,\varphi'(t)\right]+(1-\Gamma_0)\left[\frac{2}{\pi i}\int_{L}\frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}-\frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\frac{\overline{\tau}\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau\right]\right\}=2g(t)\ , \quad (11)$$

ἥτις ἀπλοποιουμένη γράφεται ὡς ἐξῆς :

$$-\left\{(\varkappa_1+1)+\Gamma_0(\varkappa_2+1)\right\}\overline{\varphi(t)}+\frac{1-\Gamma_0}{\pi i}\int_{L_0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+$$
$$+\frac{\varkappa_1-\Gamma_0\varkappa_2}{\pi i}\int_{L_0}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{d\tau}-(1-\Gamma_0)\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\varphi(\tau)\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{(\tau-t)^2}d\tau\right\}=2g(t)-\frac{2(1-\Gamma_0)}{\pi i}\int_{L}\frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}. \quad (12)$$

Εἰς τήν περίπτωσιν, καθ'ἣν ἔχομεν ἓν μόνον μέσον ἀντί δύο, ὅτε εἶναι :

$$\Gamma_0 = 1, \qquad \varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa, \quad (13)$$

τότε ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (12) δίδει ἐπί τοῦ τόξου L':

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\varkappa+1}\overline{g(t)}\,. \quad (14)$$

Γενικῶς ἔχομεν πάντως νά ἐπιλύσωμεν τάς ἰδιομόρφους ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις (10) καί (12), τῆς μέν πρώτης ἰσχυούσης ἐπί τῆς ρωγμῆς L, τῆς δέ δευτέρας ἐπί τοῦ τόξου L; πρός εὕρεσιν τῆς πυκνότητος $\varphi(t)$ τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (A1.7) καί προσδιορισμόν τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ καί εἶτα, βάσει τοῦ τύπου (7), προσδιορισμόν τῆς συναρτήσεως $\Psi(z)$.

Πρέπει ὅμως νά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν καί τήν συνθήκην τοῦ μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων. Αὕτη εἶναι διά τό ἐξεταζόμενον πρόβλημα ἰσοδύναμος μέ τάς ἑξῆς δύο συνθήκας :

$$\int_{L_o} d[-u^+(\tau)+iv^+(\tau)] = 0 \ , \quad \int_{L_o} d[-u^-(\tau)+iv^-(\tau)] = 0 \qquad (15)$$

ἐξασφαλιζούσας τό μονοσήμαντον τῶν μετατοπίσεων τόσον διά τό ἔγκλεισμα S_1 ὅσον καί διά τό ἄπειρον μέσον S_2. Ἐκ τούτων ἡ πρώτη συμπίπτουσα μέ τήν συνθήκην (9) τοῦ τμήματος B2 πληροῦται κατά τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα ἐκεῖνο αὐτομάτως διά τήν περίπτωσιν τοῦ ἐνταῦθα ἐξεταζομένου προβλήματος, ὅπου δέν ὑφίσταται ρωγμή ἐντός τοῦ ἐγκλείσματος S_1, ἀπομένει δέ ἡ πλήρωσις τῆς δευτέρας τῶν συνθηκῶν (15). Πρός τοῦτο ἀφαιροῦμεν ταύτην ἀπό τῆς πρώτης, ἥτις ἐθεωρήθη πληρουμένη ἀφ' ἑαυτῆς, ὅτε προκύπτει ἡ κάτωθι συνθήκη ἐκφράζουσα τό μονοσήμαντον τῶν μετατοπίσεων :

$$\int_{L_o} d\left\{-[u^+(\tau)-u^-(\tau)]+i[v^+(\tau)-v^-(\tau)]\right\} = 0 \ , \qquad (16)$$

ἥτις λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τοῦ ὁρισμοῦ (2) τῆς ἐπί τῆς καμπύλης L' διδομένης συναρτήσεως $g_o(t)$, τοῦ ὁρισμοῦ (5) τῆς συναρτήσεως $g(t)$ καί τοῦ τύπου (A1.19) δύναται νά λάβῃ τήν κάτωθι μορφήν :

$$\int_{L'}\left\{[\Phi^+(\tau)-\Gamma_o\Phi^-(\tau)]-[\varkappa_1\overline{\Phi^+(\tau)}-\Gamma_o\varkappa_2\overline{\Phi^-(\tau)}]+\frac{d\tau}{\overline{d\tau}}\{\overline{\tau}[\Phi'^+(\tau)-\right.$$
$$\left.-\Gamma_o\Phi'^-(\tau)]+[\Psi^+(\tau)-\Gamma_o\Psi^-(\tau)]\}\right\}\overline{d\tau} = -\int_{L'} g(\tau)\overline{d\tau} \ , \qquad (17)$$

ἔνθα ἡ σταθερά Γ_o δίδεται πάλιν ὑπό τῆς σχέσεως (3).

Ἡ συνθήκη μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων (17) δύναται νά γραφῇ καί συναρτήσει μόνον τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως $\varphi(t)$ ἐπί τῆς καμπύλης L_o, ἐάν ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν οἱ τύποι (8) καί (9) οἱ δίδοντες τάς ὁριακάς τιμάς τῶν ζητουμένων συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ ἐπί τῆς καμπύλης L_o συναρτήσει τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως $\varphi(t)$.

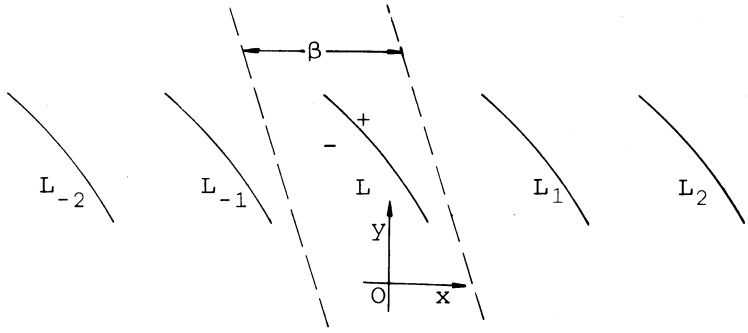
ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Τό ἐξετασθέν εἰς τό τμῆμα τοῦτο πρόβλημα τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς μεταξύ δύο ἰσοτρόπων μέσων ἔχει μελετηθῆ εἰς τάς εἰδικάς περιπτώσεις αὐτοῦ, ὅπου τό ὅριον μεταξύ τῶν δύο μέσων εἶναι εὐθύγραμμον καί κατά συνέπειαν καί ἡ ρωγμή εὐθύγραμμος ἤ περιφέρεια κύκλου καί κατά συνέπειαν ἡ ρωγμή σχήματος τόξου κύκλου. Μεταξύ τῶν ἀσχοληθέντων μέ τό πρόβλημα τῆς ρωγμῆς μεταξύ δύο ἰσοτρόπων ἡμιεπιπέδων ἦτο ὁ ERDOGAN {1963,1965}, πλήρη δέ σειράν σχετικῶν παραπομπῶν δύναται νά εὕρῃ τις εἰς τήν ἐργασίαν τοῦ ΙΩΑΚΕΙΜΙΔΗ {1973, §12}, ὅπου ἐπιλύεται καί ἡ γενική μορφή τοῦ προβλήματος τούτου διά τάς περιπτώσεις καί τῶν τριῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων. Ἀφ' ἑτέρου μέ τό πρόβλημα τῆς σχήματος τόξου κύκλου ρωγμῆς τῆς εὑρισκομένης μεταξύ κυκλικοῦ ἰσοτρόπου ἐγκλείσματος καί τοῦ περιβάλλοντος τοῦτο ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου ἠσχολήθησαν οἱ ENGLAND {1966}, PERLMAN and SIH {1967} καί TOYA {1973}.

Ὑπό πλέον γενικήν μορφήν ἔχει ἀντιμετωπισθῆ τό πρόβλημα τοῦ τυχόντος σχήματος ἰσοτρόπου ἐγκλείσματος ἐντός ἀπείρου ἤ πεπερασμένου ἰσοτρόπου μέσου. Τό πρόβλημα τοῦτου ἐμελέτησεν ὁ SHERMAN {1959}, ὅστις διά χρήσεως τῆς μεθόδου τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν $\varphi(z)$ καί $\psi(z)$ τό ἀνήγαγεν εἰς ἓν σύστημα ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων, τάς ὁποίας μάλιστα ἀκολούθως μετέτρεψεν εἰς ἰσοδυνάμους ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις FREDHOLM δευτέρου εἴδους, οἱ LIST and SILBERSTEIN {1966}, οἵτινες κατά βάσιν ἠσχολήθησαν μέ τό πρόβλημα τοῦ τετραγωνικοῦ ἐγκλείσματος ἀκολουθήσαντες παραπλησίαν μέθοδον μέ τήν χρησιμοποιηθεῖσαν ὑπό τοῦ SHERMAN, οἱ JAWSON and BHARGAVA

{1961}, οἵτινες ἐχρησιμοποίησαν τήν μέθοδον τῶν συγκεντρωμένων δυνάμεων ἐπί τοῦ ὁρίου τοῦ ἐγκλείσματος, ἐπέλυσαν δέ ἀναλυτικῶς τό πρόβλημα τοῦ ἐλλειπτικοῦ ἐγκλείσματος καί οἱ AGARWALA and KUMAR {1971}, οἵτινες ἐπέλυσαν πλήρως διά τῆς μεθόδου τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ τό πρόβλημα τοῦ κυκλικοῦ ἐγκλείσματος.

Τέλος ὁ TSAMASFYROS {1973} ἐμελέτησε τό γενικόν πρόβλημα ἑνός μέσου ἀποτελουμένου ἐκ περισσοτέρων τοῦ ἑνός ἰσοτρόπων τμημάτων συγκεκολλημένων μεταξύ των κατά τμήματα τῶν ὁρίων των καί ἐλευθέρων κατά τό ὑπόλοιπον μέρος τῶν ὁρίων των, ἀναγαγών τοῦτο εἰς ἕν σύστημα ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων διά χρήσεως τῆς μεθόδου τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν $\varphi(z)$ καί $\psi(z)$. Ἐν τούτοις, ἡ λύσις αὕτη τοῦ TSAMASFYROS, ὡς καί αἱ λοιπαί λύσεις τῶν προβλημάτων τῆς ἐπιπέδου ἐλαστικότητος δι' ἰσότροπα μέσα, δέν δύναται νά ἐφαρμοσθῇ, εἰς ἣν περίπτωσιν κατά τό ὅριον δύο μέσων ὑφίσταται ρωγμή ἤ καθ' οἱονδήποτε ἄλλον τρόπον σχηματίζεται γωνιακόν σημεῖον μέ γωνίαν 180° κατά τό ὅριον ἑνός τῶν ἰσοτρόπων τμημάτων τοῦ ὅλου μέσου ἤ μεταξύ τῶν ὁρίων δύο τοιούτων ἰσοτρόπων τμημάτων.

Β4. ΣΕΙΡΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΡΩΓΜΩΝ ΕΝΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΙΣΟΤΡΟΠΟΥ ΜΕΣΟΥ



Σχῆμα 1

Θεωροῦμεν σύστημα περιοδικῶς διατεταγμένων λείων ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου, ὡς εἰς τό ἀνωτέρω Σχῆμα 1. Ἑκάστη ρωγμή προκύπτει ἐκ τῆς προηγουμένης της διά μετατοπίσεως κατά μῆκος β κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος Ox. Σχηματίζεται οὕτως ἡ διάταξις τῶν ρωγμῶν : ..., L_{-k}, ..., L_{-2}, L_{-1}, L, L_1, L_2, ..., L_k, ..., ἔνθα μία τούτων θεωρουμένη ὡς θεμελιώδης συμβολίζεται ἁπλῶς διά τοῦ συμβόλου L. Χάριν διευκολύνσεως θέτομεν :

$$L_o = \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_k .$$

Θά ἐξετάσωμεν ἐνταῦθα τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος μέ φόρτισιν τήν αὐτήν ἐφ' ὅλων τῶν ρωγμῶν καί μάλιστα τοιαύτην, ὥστε ἡ συνολικῶς ἐξασκουμένη ἐφ' ἑκάστης ρωγμῆς δύναμις νά εἶναι μηδενική. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τήν τυχόν ὑπάρχουσαν φόρτισιν εἰς τό ἄπειρον, τῇ βοηθείᾳ τῶν τύπων (A1.1) καί (A1.5) καί διά τῆς εἰσαγωγῆς τῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ τεινουσῶν εἰς τό μηδέν διά $y \to \pm\infty$ αὕτη ἐνσωματοῦται εἰς τήν φόρτισιν τῶν ρωγμῶν, χωρίς μάλιστα νά αἴρεται ἡ ὑπόθεσις τῆς μηδενικῆς συνισταμένης δυνάμεως ἐφ' ἑκάστης τούτων.

Ἐκ τῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$, λόγῳ τῶν ἀνωτέρω ὑποθέσεων, ἡ μέν πρώτη εἶναι περιοδική μέ περίοδον β, ἡ δευτέρα ὅμως ὄχι, ἀναλυτικώτερον δέ ἰσχύει { MIKHLIN, 1957, § 55 } :

$$\Phi(z+\beta) = \Phi(z), \tag{1α}$$

$$\Psi(z+\beta) = \Psi(z)-\beta\Phi'(z). \tag{1β}$$

Διά τό γεγονός ὅτι ἡ συνάρτησις $\Psi(z)$ δέν εἶναι περιοδική εἰσάγομεν ἀντ'αὐτῆς τήν περιοδικήν βοηθητικήν συνάρτησιν $T(z)$ ὁριζομένην ὡς ἐξῆς :

$$T(z) = \Psi(z)+z\Phi'(z), \tag{2}$$

εὐχερῶς διαπιστουμένου βάσει τῶν σχέσεων (1) ὅτι :

$$T(z+\beta) = T(z). \tag{3}$$

Αἱ ὁριακαί συνθῆκαι (A1.4) ἐφ'ἑκάστης ρωγμῆς L_k δι'εἰσαγωγῆς τῆς περιοδικῆς συναρτήσεως $T(z)$ ἀντί τῆς μή περιοδικῆς $\Psi(z)$ γράφονται ὡς ἐξῆς :

$$[\Phi^+(t)+\Phi^-(t)] + [\overline{\Phi^+(t)}+\overline{\Phi^-(t)}] + \frac{dt}{\overline{dt}}\left\{(\bar{t}-t)\,[\Phi'^+(t)+\Phi'^-(t)]+ + [T^+(t)+T^-(t)]\right\} = 2\overline{p(t)}, \tag{4α}$$

$$[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)] + [\overline{\Phi^+(t)}-\overline{\Phi^-(t)}] + \frac{dt}{\overline{dt}}\left\{(\bar{t}-t)\,[\Phi'^+(t)-\Phi'^-(t)]+ + [T^+(t)-T^-(t)]\right\} = 2\overline{q(t)}. \tag{4β}$$

Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι λόγῳ τῆς περιοδικῆς διατάξεως τῶν ρωγμῶν, τοῦ γεγονότος ὅτι ὑπάρχει ἡ ἰδία φόρτισις ἐφ' ὅλων τῶν ρωγμῶν καί τῆς περιοδικότητος τῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$ καί $T(z)$, ἀρκεῖ ἡ πλήρωσις τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (4) ἐπί τῆς θεμελιώδους ρωγμῆς L, ἵνα αὗται πληροῦνται ἐφ'ὅλων τῶν ρωγμῶν. Ἡ θεμελιώδης αὕτη ρωγμή L κεῖται ἐντός τῆς οὕτως καλουμένης θεμελιώδους περιοχῆς, ἐμφαινομένης εἰς τό

Σχῆμα 1, ἥτις εἶναι ἡ περιοχή ἡ περιεχομένη μεταξύ δύο καμπύλων διηκουσῶν ἀπό τοῦ $y = -\infty$ μέχρι τοῦ $y = +\infty$ καί διερχομένων τῆς μέν πρώτης μεταξύ τῶν ρωγμῶν L_{-1} καί L, τῆς δέ δευτέρας μεταξύ τῶν ρωγμῶν L καί L_{+1}, χωρίς βεβαίως νά τέμνουν τάς ρωγμάς ταύτας, προερχομένης δέ τῆς δευτέρας ἐκ τῆς πρώτης διά μετατοπίσεως κατά μῆκος β κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος Ox.

Ἡ ἔκφρασις τῆς περιοδικῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ δέν γίνεται ἐν προκειμένῳ δι'ἑνός ἁπλοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY, ὡς τό (A1.7), καθ'ὅσον τοῦτο θά ἔπρεπε νά ἐκτείνεται ἐφ'ὅλων τῶν ρωγμῶν, ἀλλά δι' ἑνός γενικευμένου ὁλοκληρώματος CAUCHY, ἐκτεινομένου μόνον ἐπί τῆς θεμελιώδους ρωγμῆς L, τῆς μορφῆς :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\tau)\frac{F'(\tau)}{F(\tau)-F(z)}d\tau, \tag{5}$$

ἐξασφαλιζούσης τήν περιοδικότητα τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$, καθ' ὅσον ὡς συνάρτησις $F(z)$ λαμβάνεται μία περιοδική συνάρτησις καλουμένη θεμελιώδης περιοδική συνάρτησις, χαρακτηριστικόν γνώρισμα τῆς ὁποίας εἶναι ὅτι λαμβάνει ἐντός τῆς θεμελιώδους περιοχῆς ἑκάστην τιμήν αὐτῆς μόνον ἅπαξ. Τοιαύτη συνάρτησις εἶναι ἡ ἑξῆς {GAKHOV, 1966, § 52} :

$$F(z) = e^{\frac{2\pi i z}{\beta}}, \tag{6}$$

ὅτε τό γενικευμένον ὁλοκλήρωμα CAUCHY (5) γράφεται :

$$\Phi(z) = \frac{1}{\beta}\int_L \varphi(\tau)\frac{e^{\frac{2\pi i\tau}{\beta}}}{e^{\frac{2\pi i\tau}{\beta}}-e^{\frac{2\pi i z}{\beta}}}\,d\tau, \tag{7}$$

ἔτι δέ ἁπλούστερον :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\beta i}\int_L \varphi(\tau)\left\{\cot\frac{\pi(\tau-z)}{\beta}+i\right\}d\tau. \tag{8}$$

Ἡ πυκνότης $\varphi(\tau)$ τοῦ γενικευμένου τούτου ὁλοκληρώματος CAUCHY θά προσδιορισθῇ βάσει τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (4) ὀφείλουσα ὡσαύτως νά πληροῖ τήν συνθήκην μονοσημάντου τῶν

μετατοπίσεων (A1.21) ἐφ'ἑκάστης ρωγμῆς. Ἡ τελευταία αὕτη λόγῳ τῆς περιοδικότητος τῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$ καί $T(z)$ ὡς καί τῆς σχέσεως (2) εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν συνθήκην (A1.23), ἐάν δέ μάλιστα ἡ τελευταία πληροῦται ἐπί τῆς θεμελιώδους ρωγμῆς L, τότε θά πληροῦται ἐφ'ὅλων τῶν ρωγμῶν. Περαιτέρω δέ, λόγῳ τῆς ὑποθέσεως ὅτι ἡ συνισταμένη ἐφ'ἑκάστης ρωγμῆς ἐξασκουμένη δύναμις εἶναι μηδενική, ἕπεται ὅτι τό ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς συνθήκης (A1.23) λόγῳ καί τοῦ τύπου (A1.26) εἶναι ἐπίσης μηδενικόν, ὅτε εἰς τήν περίπτωσίν μας ἡ συνθήκη μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων λαμβάνει τήν μορφήν :

$$\int_L \varphi(\tau)d\tau = 0. \tag{9}$$

Λόγῳ τῆς συνθήκης (9) τό γενικευμένον ὁλοκλήρωμα CAUCHY (8) δύναται νά γραφῇ ἁπλούστερον ὡς ἑξῆς :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\beta i}\int_L \varphi(\tau)\cot\frac{\pi(\tau-z)}{\beta}d\tau. \tag{10}$$

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι διά $z \to \pm i\infty$ ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$ τείνει εἰς τό μηδέν λαμβανομένης πάλιν ὑπ'ὄψιν τῆς συνθήκης (9).

Εἰς τήν περιοχήν τῆς ρωγμῆς L ἡ συνάρτησις $\cot\frac{\pi(\tau-z)}{\beta}$ δύναται νά παρασταθῇ ὡς :

$$\frac{\pi}{\beta}\cot\frac{\pi(\tau-z)}{\beta} = \frac{1}{\tau-z}+\Omega(\tau,z) \tag{11}$$

(ἔνθα $\Omega(\tau,z)$ συνεχής συνάρτησις ἐπί τῆς ρωγμῆς L), παρουσιάζουσα οὕτως ἀσυνέχειαν ἐπί τῆς ρωγμῆς L, οὖσα κατά τά λοιπά τμηματικῶς ὁλόμορφος συνάρτησις ἐντός τῆς θεμελιώδους περιοχῆς. Λόγῳ τοῦ ὅτι περί τήν ρωγμήν L ἡ συνάρτησις-πυρήν τοῦ γενικευμένου ὁλοκληρώματος CAUCHY(10) παρουσιάζει τήν συμπεριφοράν (11), δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τούς τύπους τοῦ PLEMELJ διά τάς ὁριακάς τιμάς τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ ἐπί τῆς ρωγμῆς L εὑρίσκοντες λόγῳ τῆς σχέσεως

(10) :

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t) = \varphi(t), \tag{12α}$$

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t) = \frac{1}{\beta i}\int_L \varphi(\tau)\cot\frac{\pi(\tau-t)}{\beta}d\tau. \tag{12β}$$

Παραγωγίζοντες ὡς πρός z τόν τύπον (10) εὑρίσκομεν τήν ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως $\Phi'(z)$:

$$\Phi'(z) = \frac{\pi}{2\beta^2 i}\int_L \varphi(\tau)\csc^2\frac{\pi(\tau-z)}{\beta}d\tau, \tag{13}$$

ἐνῷ, λόγῳ καί τοῦ τύπου (A1.9), παραγωγίζοντες ὡς πρός t τούς τύπους (12) λαμβάνομεν :

$$\Phi'^+(t)-\Phi'^-(t) = \varphi'(t), \tag{14α}$$

$$\Phi'^+(t)+\Phi'^-(t) = \frac{\pi}{\beta^2 i}\int_L \varphi(\tau)\csc^2\frac{\pi(\tau-t)}{\beta}d\tau. \tag{14β}$$

Λόγῳ τῶν τύπων (12α) καί (14α) ἡ ὁριακή συνθήκη (4β) δίδει :

$$T^+(t)-T^-(t) = \frac{\overline{dt}}{dt}\left\{2\overline{q(t)}-\varphi(t)-\overline{\varphi(t)}\right\} - (\bar{t}-t)\varphi'(t). \tag{15}$$

Ἡ σχέσις (15) λόγῳ τῆς ταυτότητος (3), ἐπίσης δέ καί τῆς ταυτότητος (A1.13) μᾶς ἀναγκάζει, λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν καί τῶν τύπων τοῦ PLEMELJ (12) καί (14) διά συνάρτησιν $\Phi(z)$ διδομένην ὑπό ἐκφράσεως τῆς μορφῆς (10) καί τήν παράγωγον αὐτῆς $\Phi'(z)$ διδομένην ὑπό τῆς ἐκφράσεως (13), νά δεχθῶμεν ὡς ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως $T(z)$ τήν ἐξῆς :

$$T(z) = \frac{1}{\beta i}\int_L \overline{q(\tau)}\cot\frac{\pi(\tau-z)}{\beta}\overline{d\tau} - \frac{1}{2\beta i}\int_L \cot\frac{\pi(\tau-z)}{\beta}\left[\varphi(\tau)d\tau + \overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}\right] - \frac{\pi}{2\beta^2 i}\int_L (\bar{\tau}-\tau)\varphi(\tau)\csc^2\frac{\pi(\tau-z)}{\beta}d\tau, \tag{16}$$

ληφθείσης ὑπ'ὄψιν καί τῆς ἐξῆς προφανοῦς ταυτότητος :

$$[\,t\varphi(t)\,]' = t\varphi'(t)+\varphi(t). \tag{17}$$

Περαιτέρω λόγῳ τοῦ τύπου (2) εὑρίσκεται ὡς ἔκφρασις τῆς

συναρτήσεως $\Psi(z)$ ἡ ἐξῆς :

$$\Psi(z) = \frac{1}{\beta i}\int_L \overline{q(\tau)}\cot\frac{\pi(\tau-z)}{\beta}\overline{d\tau} - \frac{1}{2\beta i}\int_L \cot\frac{\pi(\tau-z)}{\beta}\left[\varphi(\tau)d\tau + \right.$$
$$\left. + \overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}\right] - \frac{\pi}{2\beta^2 i}\int_L \left\{\bar{\tau}-(\tau-z)\right\}\varphi(\tau)\csc^2\frac{\pi(\tau-z)}{\beta}d\tau, \qquad (18)$$

ληφθέντος ὑπ' ὄψιν πέραν τοῦ τύπου (16) καί τοῦ (13).

Ἡ συνάρτησις $\Psi(z)$ ὡς διδομένη ὑπό τῆς ἐκφράσεως (18) συμφωνεῖ μέ τήν ἀπαίτησιν νά τείνῃ αὕτη, ὡς καί αἱ $\Phi(z)$ καί $T(z)$ βεβαίως, εἰς τό μηδέν διά $z \to \pm i\infty$, δεδομένης βεβαίως τῆς συνθήκης μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων (9) ὡς καί τῆς ὑποθέσεως μηδενικῆς συνισταμένης ἐξασκουμένης ἐπί τῆς ρωγμῆς δυνάμεως, ἐξ ἧς, λόγῳ τοῦ τύπου (A1.26), ἕπεται ὅτι :

$$\int_L q(\tau)d\tau = 0. \qquad (19)$$

Ἐφαρμόζοντες τόν δεύτερον τύπον τοῦ PLEMELJ εἰς τήν σχέσιν (16) εὑρίσκομεν :

$$T^+(t)+T^-(t) = \frac{2}{\beta i}\int_L \overline{q(\tau)}\cot\frac{\pi(\tau-t)}{\beta}\overline{d\tau} - \frac{1}{\beta i}\int_L \cot\frac{\pi(\tau-t)}{\beta}$$
$$\left[\varphi(\tau)d\tau + \overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}\right] - \frac{\pi}{\beta^2 i}\int_L (\bar{\tau}-\tau)\varphi(\tau)\csc^2\frac{\pi(\tau-t)}{\beta}d\tau. \qquad (20)$$

Ἤδη ἡ ὁριακή συνθήκη (4α) λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν τύπων (12β), (14β) καί (20) μᾶς δίδει τήν ζητουμένην ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν ἐπί τῆς θεμελιώδους ρωγμῆς L μέ ἄγνωστον συνάρτησιν τήν $\varphi(t)$:

$$\frac{1}{\beta i}\int_L \varphi(\tau)\cot\frac{\pi(\tau-t)}{\beta}d\tau - \frac{1}{\beta i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}\cot\frac{\pi(\bar{\tau}-\bar{t})}{\beta}\overline{d\tau} -$$
$$-\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{1}{\beta i}\int_L \cot\frac{\pi(\tau-t)}{\beta}\left[\varphi(\tau)d\tau + \overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi}{\beta^2 i}\int_L \left[(\bar{\tau}-\tau)-(\bar{t}-t)\right]\varphi(\tau)\csc^2\frac{\pi(\tau-t)}{\beta}d\tau\right\} =$$
$$= 2\overline{p(t)} - \frac{2}{\beta i}\,\frac{dt}{\overline{dt}}\int_L \overline{q(\tau)}\cot\frac{\pi(\tau-t)}{\beta}\overline{d\tau}. \qquad (21)$$

Ἀφ' ἧς στιγμῆς ἐπιλυθῇ ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (21), ἐν συνδυασμῷ μέ τήν συνθήκην (9) τοῦ μονοσημάν -

του τῶν μετατοπίσεων, καί εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις $\varphi(t)$ ἐπί τῆς ρωγμῆς L, αἱ μιγαδικαί συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ εὑρίσκονται βάσει τῶν τύπων (10) καί (18), ἡ δέ βοηθητική μιγαδική συνάρτησις $T(z)$ βάσει τοῦ τύπου (16).

Ἄς δώσωμεν ἤδη μίαν ἑτέραν ἐξήγησιν τῆς ἐκφράσεως (10) τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$. Οὕτως ἄς θεωρήσωμεν ὅτι ἔχομεν ἐν προκειμένῳ ἁπλῶς μίαν σειράν ρωγμῶν, ὁπότε συμφώνως πρός τά ἐκτεθέντα εἰς τά τμήματα A1 καί B1 δυνάμεθα νά παραστήσωμεν τήν συνάρτησιν $\Phi(z)$ διά τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (A1.7) ἐκτεινομένου ὅμως ἐφ' ὅλων τῶν ρωγμῶν, ἤτοι ἐπί τῆς καμπύλης L_0, ὡς προανεφέρθη. Εἶναι δηλαδή :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau. \tag{22}$$

Δεδομένου ὅμως ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$ εἶναι περιοδική, ὁπότε ἡ πυκνότης $\varphi(t)$ τοῦ ἀνωτέρω ὁλοκληρώματος CAUCHY λαμβάνει τήν αὐτήν τιμήν ἐπί τῶν ἀντιστοίχων σημείων ὅλων τῶν ρωγμῶν, ἐπίσης δέ ὅτι αἱ ρωγμαί εἶναι περιοδικῶς διατεταγμέναι μέ περίοδον β, εἶναι εὔκολον νά γράψωμεν τό ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα CAUCHY, ὥστε νά ἐκτείνεται μόνον ἐπί τῆς ρωγμῆς L ὡς ἑξῆς :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L}\varphi(\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\tau-n\beta)-z}d\tau \tag{23}$$

καί περαιτέρω ὡς :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\beta i}\int_{L}\varphi(\tau)\left\{\frac{1}{\frac{\tau-z}{\beta}}+2\frac{\tau-z}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\frac{\tau-z}{\beta})^2-n^2}\right\}d\tau. \tag{24}$$

Λαμβάνοντες περαιτέρω ὑπ' ὄψιν τήν ταυτότητα {PHILLIPS, 1966, § 7.6} :

$$\pi\cot\pi x = \frac{1}{x}+2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2-n^2}, \tag{25}$$

εὑρίσκομεν εὐθύς ὡς ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ τήν (10).

Ἀναλόγως σκεπτόμενοι διά τήν συνάρτησιν $\Psi(z)$ θεωροῦμεν ταύτην κατά τήν σχέσιν (A1.12) ἐκφραζομένην ὡς ἑξῆς :

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{L_o}\frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-z}\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_o}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-z}\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_o}\frac{\overline{\tau}\varphi(\tau)}{(\tau-z)^2}d\tau, \quad (26)$$

λόγω δέ τοῦ ὅτι αἱ συναρτήσεις $\varphi(t)$ καί $q(t)$ λαμβάνουν τάς αὐτάς τιμάς έπί τῶν άντιστοίχων σημείων ὅλων τῶν ρωγμῶν, ἔπεται ὅτι δυνάμεθα πάλιν νά γράψωμεν ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως $\Psi(z)$ μέ ὁλοκληρώματα έκτεινόμενα μόνον έπί τῆς ρωγμῆς L ὡς ἐξῆς :

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \overline{q(\tau)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\tau-n\beta)-z}\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\tau-n\beta)-z}\overline{d\tau}-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\tau}-n\beta}{\{(\tau-n\beta)-z\}^2}d\tau \quad (27)$$

καί περαιτέρω ὡς :

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi\beta i}\int_L\left\{\frac{1}{\frac{\tau-z}{\beta}}+2\frac{\tau-z}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\frac{\tau-z}{\beta})^2-n^2}\right\}\cdot$$
$$\cdot\left\{(2\overline{q(t)}-\overline{\varphi(\tau)})\overline{d\tau}-\varphi(\tau)d\tau\right\}-\frac{1}{2\pi\beta^2 i}\int_L\{\overline{\tau}-(\tau-z)\}\cdot$$
$$\cdot\varphi(\tau)\left\{\frac{1}{(\frac{\tau-z}{\beta})^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{\tau-z}{\beta})^2+n^2}{\left[(\frac{\tau-z}{\beta})^2-n^2\right]^2}\right\}d\tau. \quad (28)$$

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τήν ἀνωτέρω ταυτότητα (25) ὡς καί τήν διά παραγωγίσεώς της προκύπτουσαν :

$$\pi^2\csc^2\pi x = \frac{1}{x^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2-n^2}+4x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x^2-n^2)^2} =$$
$$= \frac{1}{x^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2+n^2}{(x^2-n^2)^2}, \quad (29)$$

εὑρίσκομεν εὐθύς ὡς ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως $\Psi(z)$ τήν (18). Παρατηροῦμεν τέλος ὅτι ἀναλόγως δυνάμεθα ἐκκινοῦντες ἐκ τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (A1.15) δι' ἁπλῆν ρωγμήν ἤ σύστημα ἁπλῶν ρωγμῶν νά καταλήξωμεν εἰς τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (21).

Πέραν τῶν δύο ἀνωτέρω ἐξετασθέντων τρόπων ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος τῶν περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν, εἷς τρίτος τρόπος συνίσταται εἰς τήν ἐφαρμογήν τῆς μεθόδου

τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως. Μέ ἀπεικονίζουσαν συνάρτησιν τήν F(z) τοῦ τύπου (6) ἀπό τοῦ πραγματικοῦ ἐπιπέδου z εἰς ἕν βοηθητικόν ἐπίπεδον ζ, ἡ θεμελιώδης περιοχή τοῦ ἐπιπέδου z καταλαμβάνει ὁλόκληρον τό ἐπίπεδον ζ, μέ τήν εἰκόνα τῆς ρωγμῆς ἐντός τοῦ ἐπιπέδου ζ. Ὁ περαιτέρω τρόπος ἐργασίας εἶναι προφανής, προκύπτουν δέ τελικῶς τά αὐτά ἀποτελέσματα οἷα καί διά τῶν δύο προηγουμένων μεθόδων.

Σημειοῦται ὡσαύτως ὅτι, ἐάν ἡ περίοδος β, ἥτις ἐθεωρήθη ἐν προκειμένῳ πραγματική, ἦτο μιγαδική, ὀλίγον θά μετεβάλλοντο οἱ εὑρεθέντες προηγουμένως τύποι. Χρήσιμον εἶναι εἰς περίπτωσιν καθαρῶς φανταστικῆς περιόδου νά ἐκφρασθοῦν οἱ προηγούμενοι τύποι συναρτήσει τῆς ὑπερβολικῆς συνεφαπτομένης καί συντεμνούσης ἀντί τῶν τριγωνομετρικῶν τοιούτων.

Εἰς τάς ἐφαρμογάς Δ1 καί Δ2 ἐξετάζονται αἱ περιπτώσεις σειρᾶς συγγραμμικῶν καί παραλλήλων ἀντιστοίχως περιοδικῶς διατεταγμένων εὐθυγράμμων ρωγμῶν τῆς ἀντιστοίχου ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως εὑρισκομένης ἀπ' εὐθείας ἐκ τῆς διεπούσης τήν ἁπλῆν εὐθύγραμμον ρωγμήν. Εἰς τήν πρώτην ἐφαρμογήν ἡ περίοδος β εἶναι πραγματική, εἰς δέ τήν δευτέραν φανταστική.

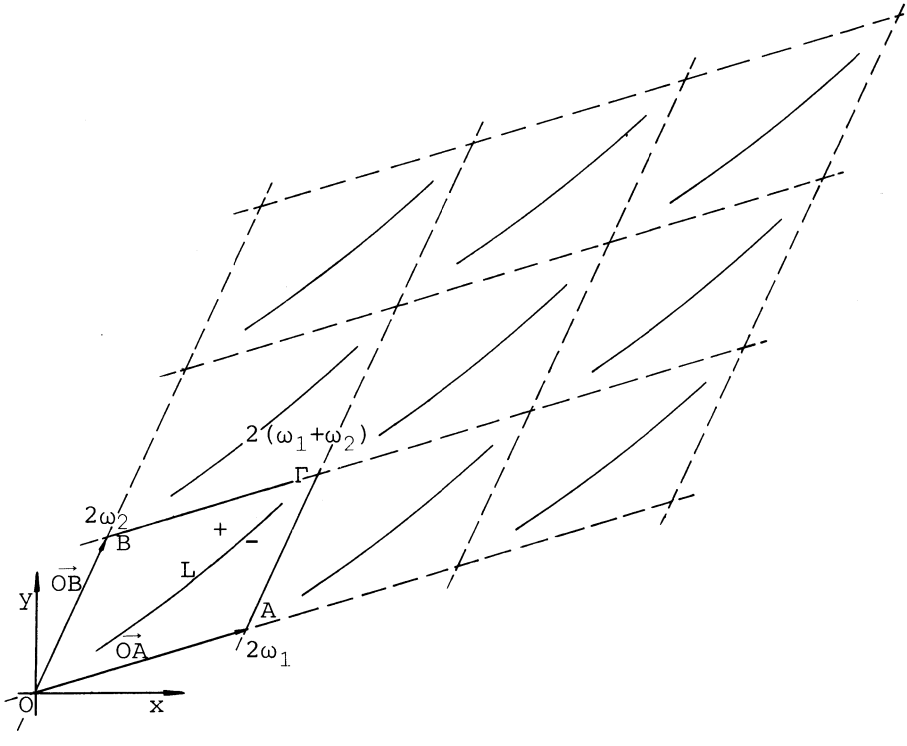
ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Τό ἐξετασθέν εἰς τό τμῆμα τοῦτο πρόβλημα τῆς σειρᾶς περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου ἐμελετήθη μέχρι σήμερον μόνον εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν, ὅπου αἱ ρωγμαί εἶναι εὐθεῖαι. Αἱ σχετικαί ἐργασίαι δίδονται εἰς τάς ἐφαρμογάς Δ1 καί Δ2. Ἐκ τούτων δέ μόνον αἱ ἐργασίαι τῶν ISIDA {1973} καί τῶν DATSYSHIN and SAVRUK {1974} ἀσχολοῦνται μέ τό γενικόν πρόβλημα τῶν περιοδικῶς διατεταγμένων εὐθυγράμμων ρωγμῶν. Ἐξ ἄλλου ἡ χρησιμοποιηθεῖσα ὑπό τῶν DATSYSHIN and SAVRUK μέθοδος ὁμοιάζει ἀρκετά μέ τήν ἐνταῦθα ἀναπτυχθεῖσαν, καίτοι περιορίζεται μόνον εἰς προβλήματα εὐθυγράμμων περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν.

Καίτοι τό γενικόν πρόβλημα τῶν περιοδικῶς διατεταγμέ-

νων ρωγμῶν δέν ἔχει μελετηθῆ μέχρι σήμερον, ἐν τούτοις τό γενικόν πρόβλημα τῶν περιοδικῶς διατεταγμένων ὀπῶν ἔχει μελετηθῆ διά χρήσεως τῆς μεθόδου τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν ὁμοῦ μετά συμμόρφου ἀπεικονίσεως, ὥστε ὅλαι αἱ ὀπαί νά συμπέσουν. Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου δίδεται ὑπό τοῦ MIKHLIN {1957, § 55}. Παρατηρεῖται ὅμως ὅτι ἐφαρμογή τῆς λύσεως ταύτης διά τό πρόβλημα τῶν περιοδικῶς διατεταγμένων ὀπῶν εἰς τό πρόβλημα τῶν περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν δέν εἶναι δυνατή, ἀκριβῶς ὡς συμβαίνει καί μέ τό πρόβλημα τῆς μιᾶς ὀπῆς ἐντός ἀπείρου μέσου, τοῦ ὁποίου ἡ λύσις δέν δύναται νά ἐφαρμοσθῆ εἰς τό πρόβλημα τῆς μιᾶς ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου μέσου.

Ὅσον ἀφορᾷ τέλος εἰς τήν θεωρίαν τῶν αὐτομόρφων συναρτήσεων, τῶν ὁποίων εἰδικήν περίπτωσιν ἀποτελοῦν αἱ περιοδικαί συναρτήσεις, καί τῶν ὁμάδων τῶν γραμμικῶν μετασχηματισμῶν, στοιχεῖα τῆς ὁποίας ἐχρησιμοποιήσαμεν ἀνωτέρω, παραπέμπομεν εἰς τά βιβλία τῶν FORD {1957} καί GAKHOV {1966, § 51}.

B5. ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΡΩΓΜΩΝ ΕΝΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΙΣΟΤΡΟΠΟΥ ΜΕΣΟΥ



Σχῆμα 1

Θεωροῦμεν σύστημα δίς περιοδικῶς διατεταγμένων λείων ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου, ὡς εἰς τό ἀνωτέρω Σχῆμα 1. Λαμβάνοντες μίαν τῶν ρωγμῶν ὡς θεμελιώδη καί δηλοῦντες ταύτην διά τοῦ συμβόλου L παρατηροῦμεν ὅτι τό σύστημα τῶν ρωγμῶν προκύπτει διά μετατοπίσεως τῆς θεμελιώδους ταύτης ρωγμῆς κατά ἕν διάνυσμα : $\vec{R} = m\vec{OA}+n\vec{OB}$, ἔνθα $\vec{OA}$ καί $\vec{OB}$ σταθερά διανύσματα καί m καί n πάντες οἱ συνδυασμοί τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Θεωροῦντες σύστημα συντεταγμένων Oxy παριστῶμεν τά διανύσματα $\vec{OA}$ καί $\vec{OB}$ διά τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $2\omega_1$ καί $2\omega_2$, οἵτινες εἶναι αἱ περίοδοι τοῦ σχηματιζο-

μένου πλέγματος ρωγμῶν. Τήν ρωγμήν τήν προκύπτουσαν ἐκ τῆς θεμελιώδους ρωγμῆς L διά μετατοπίσεως τῶν σημείων της κατά τόν μιγαδικόν ἀριθμόν $2(m\omega_1+n\omega_2)$ συμβολίζομεν L_{mn} καί τήν ὅλην διάταξιν τῶν ρωγμῶν L_o , ἤτοι εἶναι :

$$L_o = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_{mn} \qquad (L \equiv L_{oo}).$$

Θά ἐξετάσωμεν ἐνταῦθα τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος μέ φόρτισιν τήν αὐτήν ἐφ'ὅλων τῶν ρωγμῶν καί μάλιστα τοιαύτην, ὥστε ἡ συνολικῶς ἐξασκουμένη ἐφ' ἑκάστης ρωγμῆς δύναμις νά εἶναι μηδενική. Ὡσαύτως θεωροῦμεν ὑφισταμένας μέσας τάσεις $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ καί $\bar{\tau}_{xy}$ εἰς τό ρηγματωμένον ἐπίπεδον, ἀναλόγως πρός τήν θεώρησιν τῶν τάσεων εἰς τό ἄπειρον εἰς τό ἐπίπεδον μετά μιᾶς μόνον ἁπλῆς ρωγμῆς.

Τό ὅλον ἐπίπεδον δύναται νά διαχωρισθῇ εἰς δίς περιοδικήν διάταξιν παραλληλογράμμων, ἑκάστου τούτων περιέχοντος μίαν ρωγμήν, ὡς εἰς τό Σχῆμα 1 σαφέστερον φαίνεται. Ἐν ἀνάγκῃ αἱ πλευραί τῶν παραλληλογράμμων τούτων δύνανται νά μή εἶναι εὐθύγραμμοι, ἀλλά καμπυλόγραμμοι. Κορυφάς τῶν παραλληλογράμμων ἀποτελοῦν προφανῶς τά σημεῖα $2(m\omega_1+n\omega_2)$, ἔνθα m καί n πάντες οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί. Λόγῳ τῆς δίς περιοδικῆς διατάξεως τῶν ρωγμῶν προφανῶς αἱ τάσεις ὡς καί αἱ παραμορφώσεις εἰς τά ἀντίστοιχα σημεῖα ὅλων τῶν παραλληλογράμμων θά εἶναι αἱ αὐταί ἤ ἄλλως τόσον αἱ τάσεις ὅσον καί αἱ παραμορφώσεις πρέπει νά εἶναι συναρτήσεις δίς περιοδικαί μέ περιόδους $2\omega_1$ καί $2\omega_2$. Οὕτω διά μέν τάς τάσεις πρέπει νά εἶναι :

$$\sigma_x(z+w)+\sigma_y(z+w) = \sigma_x(z)+\sigma_y(z), \tag{1α}$$

$$\sigma_x(z+w)-\sigma_y(z+w)+2i\tau_{xy}(z+w) = \sigma_x(z)-\sigma_y(z)+2i\tau_{xy}(z), \tag{1β}$$

ἔνθα ἐτέθη :

$$w = 2(m\omega_1+n\omega_2), \qquad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{2}$$

Αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι (1) γράφονται συναρτήσει τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ ὡς ἐξῆς :

$$\Phi(z+w)+\overline{\Phi(z+w)} = \Phi(z)+\overline{\Phi(z)}. \tag{3α}$$

$$(\bar{z}+\bar{w})\Phi'(z+w)+\Psi(z+w) = \bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z). \tag{3β}$$

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν σχέσεων (3), ἐάν τεθῇ :

$$\Phi(z) = u(x,y)+iv(x,y), \tag{4}$$

ἔνθα $u(x,y)$ καί $v(x,y)$ πραγματικαί συναρτήσεις τῶν Καρτεσιανῶν συντεταγμένων (x,y), προκύπτει ὅτι :

$$u(x+m\omega_1,\ y+n\omega_2) = u(x,y). \tag{5}$$

Διά παραγωγίσεως τῆς σχέσεως (5) ὡς πρός x καί y προκύπτει:

$$\frac{\partial u(x+m\omega_1,\ y+n\omega_2)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \tag{6α}$$

$$\frac{\partial u(x+m\omega_1,\ y+n\omega_2)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \tag{6β}$$

Λόγῳ τῶν συνθηκῶν CAUCHY-RIEMANN θά ἔχωμεν ὡσαύτως

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}, \tag{7}$$

ὁπότε λόγῳ καί τῶν τύπων (4) καί (6) προκύπτει ὅτι ἡ συνάρτησις :

$$\Phi'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}, \tag{8}$$

εἶναι δίς περιοδική μέ περιόδους $2\omega_1$ καί $2\omega_2$ καί συνεπῶς, βάσει καί τοῦ συμβολισμοῦ (2), ἔχομεν :

$$\Phi'(z+w) = \Phi'(z). \tag{9}$$

Ὁλοκληροῦντες τόν τύπον (9) εὑρίσκομεν :

$$\Phi(z+w) = \Phi(z)+iC, \tag{10}$$

ἔνθα C πραγματική σταθερά δεδομένου ὅτι πρέπει νά ἰσχύῃ καί ἡ συνθήκη (5).

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τήν συνθήκην (3β), αὕτη γραφομένη ὡς :

$$\Psi(z+w)-\Psi(z) = -\bar{w}\Phi'(z), \tag{11}$$

ληφθέντος ὑπ' ὄψιν καί τοῦ τύπου (9), δηλοῖ ὅτι ἡ συνάρτησις $\Psi(z)$ οὐδόλως ἔχει δίς περιοδικόν χαρακτῆρα ἀντιθέτως πρός τήν συνάρτησιν $\Phi(z)$. Ἵνα ὑπερπηδήσωμεν τήν δυσχέρειαν ταύτην, εἰσάγομεν, ἀναλόγως πρός τήν συνάρτησιν $T(z)$ εἰς τήν περίπτωσιν τῆς ἁπλῆς σειρᾶς περιοδικῶν ρωγμῶν, τήν δίς περιοδικήν συνάρτησιν $T(z)$ βάσει τοῦ τύπου :

$$T(z) = \Psi(z)-\chi(z)\Phi'(z), \tag{12}$$

ἔνθα $\chi(z)$ προσδιοριστέα μιγαδική συνάρτησις. Τό τέχνασμα τοῦτο τῆς εἰσαγωγῆς μιᾶς συναρτήσεως $T(z)$ εἰς τήν περίπτωσιν δίς περιοδικῶν προβλημάτων ὀφείλεται εἰς τόν KOITER {1960}, εἰς τήν ἐκεῖ ὅμως ἐξετασθεῖσαν περίπτωσιν ἡ εἰσαχθεῖσα, ἀναλόγως πρός τήν $T(z)$, συνάρτησις $\Omega(z)$ δέν ἦτο δίς περιοδική, ὡς ἡ $T(z)$, ἀλλά ψευδο-δίς περιοδική.

Ἐκ τῆς ἀπαιτήσεως ὅπως ἡ συνάρτησις $T(z)$ εἶναι δίς περιοδική καί δεδομένου ὅτι, ὡς ἀπεδείχθη πρότερον, καί ἡ συνάρτησις $\Phi'(z)$ εἶναι δίς περιοδική, ἕπεται λόγῳ καί τοῦ τύπου (11) ὅτι ἡ συνάρτησις $\chi(z)$ δέον ὅπως πληροῖ τήν σχέσιν:

$$\chi(z+w)-\chi(z) = -\bar{w}, \tag{13}$$

ἤτοι εἶναι ψευδο-δίς περιοδική μέ περιόδους πάλιν $2\omega_1$ καί $2\omega_2$ καί μέ κυκλικάς αὐξήσεις $(-2\bar{\omega}_1)$ καί $(-2\bar{\omega}_2)$. Ἀκολουθοῦντες πάλιν τόν KOITER {1960} θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν $\chi(z)$ ὡς διδομένην ὑπό τύπου τῆς μορφῆς :

$$\chi(z) = Az+B\zeta(z), \tag{14}$$

ἔνθα A καί B προσδιοριστέαι βάσει τῆς συνθήκης (13) σταθεραί καί $\zeta(z)$ ἡ συνάρτησις ζῆτα τοῦ WEIERSTRASS μέ περιό-

δους πάλιν $2\omega_1$ καί $2\omega_2$, μέ κυκλικάς δέ αύξήσεις :

$$2\eta_1 = \zeta(z+2\omega_1)-\zeta(z) = \zeta(\omega_1), \tag{15α}$$

$$2\eta_2 = \zeta(z+2\omega_2)-\zeta(z) = \zeta(\omega_2), \tag{15β}$$

ίσχυούσης ὡσαύτως καί τῆς σχέσεως τοῦ LEGENDRE :

$$\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}. \tag{16}$$

Ἤδη ἡ συνθήκη (13) λαμβάνει τήν ἑξῆς μορφήν :

$$A(m\omega_1+n\omega_2)+B(m\eta_1+n\eta_2) = -m\bar{\omega}_1-n\bar{\omega}_2. \tag{17}$$

Ἵνα ἰσχύῃ ἡ συνθήκη (17) διά πᾶν ζεῦγος ἀκεραίων (m,n), πρέπει νά εἶναι :

$$A\omega_1+B\eta_1 = -\bar{\omega}_1, \qquad A\omega_2+B\eta_2 = -\bar{\omega}_2. \tag{18}$$

Λύοντες τό σύστημα τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων (18) ὡς πρός A καί B εὑρίσκομεν λόγῳ καί τῆς σχέσεως τοῦ LEGENDRE (16) :

$$A = -\frac{2i}{\pi}(\bar{\omega}_1\eta_2-\bar{\omega}_2\eta_1), \quad B = -\frac{2i}{\pi}(\omega_1\bar{\omega}_2-\omega_2\bar{\omega}_1). \tag{19}$$

Ὁρισθείσης ἤδη πλήρως τῆς συναρτήσεως $\chi(z)$ τῆς σχέσεως (14) ἡ συνθήκη (3β) λόγῳ καί τοῦ ὁρισμοῦ (12) τῆς δίς περιοδικῆς συναρτήσεως $T(z)$ γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$T(z+w)+m(z+w)\Phi'(z+w) = T(z)+m(z)\Phi'(z), \tag{20α}$$

ἔνθα $m(z)$ εἶναι μία μή ἀναλυτική συνάρτησις ὁριζομένη ὡς :

$$m(z) = \bar{z}+\chi(z). \tag{20β}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $m(z)$ εἶναι δίς περιοδική, ὡς καί αἱ $\Phi'(z)$ καί $T(z)$, τῆς συνθήκης (20α), ἤ τῆς ἰσοδυνάμου αὐτῆς (3β), ἰσχυούσης, ὡς εἶναι ἐπιθυμητόν.

Τέλος ἡ ἀπαίτησις ὅπως αἱ παραμορφώσεις ἔχουν, ὡς καί αἱ τάσεις, δίς περιοδικῶς χαρακτῆρα μᾶς ἀναγκάζει νά δεχθῶμεν λόγῳ καί τοῦ τύπου (A1.19) ὅτι ἰσχύει ἡ κάτωθι συνθήκη :

$$\Phi(z+w)-\kappa\overline{\Phi(z+w)}+\frac{dz}{\overline{dz}}\left\{(\bar{z}+\bar{w})\Phi'(z+w)+\Psi(z+w)\right\} =$$
$$= \Phi(z)-\kappa\overline{\Phi(z)}+\frac{dz}{\overline{dz}}\left\{\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)\right\}, \qquad (21)$$

ἤτις λόγῳ τῶν συνθηκῶν (3) ἁπλοποιεῖται ὡς κάτωθι :

$$\Phi(z+w) = \Phi(z), \qquad (22)$$

ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$, ὡς καί ἡ $T(z)$, εἶναι δίς περιοδική, ἤτοι ἡ σταθερά C τοῦ τύπου (10) εἶναι μηδενική. Τό πρόβλημά μας ἤδη ἀνάγεται εἰς τόν προσδιορισμόν τῶν δίς περιοδικῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $T(z)$ ἐκ τῶν δεδομένων ὁριακῶν συνθηκῶν ἐπί τῶν ρωγμῶν L_{mn}. Λόγῳ τοῦ ὅτι αἱ ὁριακαί συνθῆκαι καί ἐν προκειμένῳ αἱ ἐξωτερικῶς ἐπιβαλλόμεναι φορτίσεις εἶναι αἱ αὐταί ἐφ'ὅλων τῶν ρωγμῶν, αἱ δέ συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $T(z)$ δίς περιοδικαί, ἀρκεῖ ἡ ἐπαλήθευσις τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν μόνον ἐπί τῆς θεμελιώδους ρωγμῆς L. Ἡ περαιτέρω πορεία ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος εἶναι ἀνάλογος μέ τήν ἀκολουθηθεῖσαν εἰς τό τμῆμα A1 διά τήν ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἤ εἰς τό τμῆμα B4 διά τήν σειράν περιοδικῶς διατεταγμένων λείων ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου.

Αἱ ὁριακαί συνθῆκαι (A1.4) ἐπί τῆς θεμελιώδους ρωγμῆς L κειμένης ἐντός τοῦ θεμελιώδους παραλληλογράμμου δι'εἰσαγωγῆς τῆς δίς περιοδικῆς συναρτήσεως $T(z)$ ἀντί τῆς μή περιοδικῆς $\Psi(z)$ γράφονται ὡς ἐξῆς βάσει τοῦ τύπου (12) :

$$\left[\Phi^+(t)+\Phi^-(t)\right] + \left[\overline{\Phi^+(t)}+\overline{\Phi^-(t)}\right] + \frac{dt}{\overline{dt}}\left\{m(t)\left[\Phi'^+(t)+\Phi'^-(t)\right] + \right.$$
$$\left. + \left[T^+(t)+T^-(t)\right]\right\} = 2\overline{p(t)}, \qquad (23a)$$

$$\left[\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)\right] + \left[\overline{\Phi^{+}(t)}-\overline{\Phi^{-}(t)}\right] + \frac{dt}{\overline{dt}}\left\{m(t)\left[\Phi'^{+}(t)-\Phi'^{-}(t)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[T^{+}(t)-T^{-}(t)\right]\right\} = 2\overline{q(t)}, \qquad (23\beta)$$

ληφθέντος ὑπ'ὄψιν τοῦ ὁρισμοῦ (20β) τῆς μή ἀναλυτικῆς συναρτήσεως m(z). Ἐάν συγκρίνωμεν τάς ὁριακάς συνθήκας (23) διά τήν περίπτωσιν τῆς δίς περιοδικῆς διατάξεως ρωγμῶν μέ τάς ὁριακάς συνθήκας (B4.4) διά τήν περίπτωσιν τῆς ἁπλῶς περιοδικῆς διατάξεως ρωγμῶν, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν ἀντίστοιχος τῆς m(z) μή ἀναλυτική συνάρτησις εἶναι ἡ $(\bar{z}-z)$.

Εἰς τήν παροῦσαν περίπτωσιν ἡ ἔκφρασις τῆς συναρτήσεως Φ(z) δέν γίνεται δι'ἑνός ἁπλοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY ὡς τό (A1.7), καθ'ὅσον τοῦτο θά ἔπρεπε νά ἐκτείνεται ἐφ'ὅλων τῶν ρωγμῶν, ἀλλά δι'ἑνός γενικευμένου ὁλοκληρώματος CAUCHY, ἐκτεινομένου μόνον ἐπί τῆς θεμελιώδους ρωγμῆς L, τῆς μορφῆς:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\tau)\zeta(\tau-z)\,d\tau + C_1 \qquad (24)$$

ἐξασφαλίζοντος τήν δίς περιοδικότητα τῆς συναρτήσεως Φ(z), καθ'ὅσον ἡ συνάρτησις ζ(z) τοῦ WEIERSTRASS εἶναι ψευδο-δίς περιοδική κατά τούς τύπους (15), ὡσαύτως δέ, λόγῳ τῆς ἐν ἀρχῇ γενομένης ὑποθέσεως περί μηδενικῆς συνολικῶς ἐξασκουμένης ἐφ'ἑκάστης ρωγμῆς δυνάμεως, ἔπεται ὅτι τό ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς συνθήκης μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων (A1.23), λόγῳ καί τοῦ τύπου (A1.26), εἶναι μηδενικόν, ὅτε εἰς τήν περίπτωσίν μας ἡ συνθήκη μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων λαμβάνει τήν μορφήν :

$$\int_L \varphi(\tau)\,d\tau = 0 \qquad (25)$$

ἐξασφαλιζομένης οὕτω τῆς δίς περιοδικότητος τῆς κατά τήν σχέσιν (24) ὁρισθείσης συναρτήσεως Φ(z). Σημειοῦται ὡσαύτως ὅτι ἡ συνθήκη μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων (A1.23), προκύπτουσα ἐκ τῆς (A1.21) λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν τῆς ὁρια-

κῆς συνθήκης (A1.4β), ἰσοδυνάμου πρός τήν (23β), ὡς καί τῆς ἐκφράσεως (24) τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$, κατ'ἐντελῶς ἀνάλογον τρόπον μέ τήν περίπτωσιν τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς, ἅπαξ πληρουμένη ἐπί τῆς θεμελιώδους ρωγμῆς L, λόγῳ τῆς δίς περιοδικότητος τῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$ καί $T(z)$ ὡς καί τῆς σχέσεως (2) πληροῦται αὐτομάτως ἐφ'ὅλων τῶν ρωγμῶν L_{mn}.

Ἵνα κατανοηθῇ καλύτερον ἡ ἔκφρασις (24) τῆς δίς περιοδικῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ σημειοῦται {KOITER, 1959B} ὅτι εἰς τήν περιοχήν τῆς ρωγμῆς L ἡ συνάρτησις ζῆτα τοῦ WEIERSTRASS δύναται νά παρασταθῇ ὡς :

$$\zeta(\tau-z) = \frac{1}{\tau-z}+\Omega(\tau,z), \tag{26}$$

(ἔνθα $\Omega(\tau,z)$ συνεχής συνάρτησις ἐπί τῆς ρωγμῆς L), παρουσιάζουσα οὕτως ἀσυνέχειαν ἐπί τῆς ρωγμῆς L, οὖσα κατά τά λοιπά τμηματικῶς ὁλόμορφος συνάρτησις ἐντός τοῦ θεμελιώδους παραλληλογράμμου.

Ὀφείλομεν νά σημειώσωμεν ὡσαύτως ἐνταῦθα ὅτι αἱ ἐν τῇ ἀρχῇ ἀναφερθεῖσαι ὡς δυνάμεναι νά ὑφίστανται μέσαι τάσεις $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ καί $\bar{\tau}_{xy}$ εἰς τό ρηγματωμένον ἐπίπεδον ὑπεισέρχονται ἐντός τῆς ἐκφράσεως (A1.5α) τῆς συναρτήσεως $p(t)$ κατ'ἐντελῶς ἀνάλογον τρόπον μέ τάς τάσεις εἰς τό ἄπειρον, αἵτινες ἐπίσης εἶναι μέσαι τάσεις διά τήν περίπτωσιν τῆς ἀπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου μέσου. Ἰσχύουν ἐν προκειμένῳ δηλαδή τόσον οἱ τύποι (A1.1), ὅσον καί οἱ (A1.2), οἵτινες συναρτήσει τῶν προαναφερθεισῶν μέσων τάσεων δύνανται νά γραφοῦν ὡς ἑξῆς :

$$\Gamma = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_x+\bar{\sigma}_y), \tag{27α}$$

$$\Gamma' = -\frac{1}{2}(\bar{\sigma}_x-\bar{\sigma}_y+2i\bar{\tau}_{xy}). \tag{27β}$$

Ἐφαρμόζοντες ἤδη τούς τύπους τοῦ PLEMELJ, λόγῳ τῆς συμπεριφορᾶς (26) περί τήν ρωγμήν L τῆς συναρτήσεως - πυρῆνος τοῦ γενικευμένου ὁλοκληρώματος CAUCHY (24) τοῦ δίδοντος τήν

μιγαδικήν συνάρτησιν $\Phi(z)$, εὑρίσκομεν διά τάς ὁριακάς τιμάς τῆς τελευταίας τούς τύπους {KOITER, 1959B} :

$$\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t) = \varphi(t), \tag{28α}$$

$$\Phi^{+}(t)+\Phi^{-}(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{L}\varphi(t)\zeta(\tau-t)\,d\tau. \tag{28β}$$

Παραγωγίζοντες ὡς πρός z τόν τύπον (24) εὑρίσκομεν τήν ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως $\Phi'(z)$:

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L}\varphi(\tau)\wp(\tau-z)\,d\tau, \tag{29}$$

ἔνθα $\wp(z)$ ἡ συνάρτησις $\wp$ τοῦ WEIERSTRASS συνδεομένη μετά τῆς $\zeta(z)$ διά τοῦ τύπου :

$$\wp(z) = -\zeta'(z). \tag{30}$$

Ἡ συνάρτησις $\wp(z)$ εἶναι δίς περιοδική συνάρτησις μέ περιόδους, ἐν προκειμένῳ, $2\omega_1$ καί $2\omega_2$, ὡς καί ἡ $\zeta(z)$.

Παραγωγίζοντες περαιτέρω ὡς πρός t τούς τύπους (28) λόγῳ καί τῆς σχέσεως (A1.9) λαμβάνομεν :

$$\Phi'^{+}(t)-\Phi'^{-}(t) = \varphi'(t), \tag{31α}$$

$$\Phi'^{+}(t)+\Phi'^{-}(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{L}\varphi(\tau)\wp(\tau-t)\,d\tau. \tag{31β}$$

Λόγῳ τῶν τύπων (28α) καί (31α) ἡ ὁριακή συνθήκη (23β) δίδει :

$$T^{+}(t)-T^{-}(t) = \frac{\overline{dt}}{dt}\left\{2\overline{q(t)}-\varphi(t)-\overline{\varphi(t)}\right\}-m(t)\varphi'(t). \tag{32}$$

Ἡ σχέσις (32) λόγῳ τῆς προφανοῦς ταυτότητος :

$$m(t)\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\left\{m(t)\varphi(t)\right\}-m'(t)\varphi(t) \tag{33}$$

μᾶς ἀναγκάζει, λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν καί τῶν τύπων τοῦ PLEMELJ (28) καί (31) διά συνάρτησιν $\Phi(z)$ διδομένην ὑπό ἐκφράσεως τῆς μορφῆς (24) καί τήν παράγωγον αὐτῆς $\Phi'(z)$ διδομένην ὑπό τῆς ἐκφράσεως (29), νά δεχθῶμεν ὡς ἔκφρασιν τῆς

συναρτήσεως T(z) τήν ἐξῆς :

$$T(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \overline{q(\tau)}\zeta(\tau-z)\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}\zeta(\tau-z)\overline{d\tau}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \chi'(\tau)\varphi(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L m(\tau)\varphi(\tau)\wp(\tau-z)d\tau+$$
$$+C\zeta(z)+C_2 \ , \qquad (34)$$

ὅπου ἐλήφθη ὑπ'ὄψιν ἡ σχέσις (20β), ἡ δέ σταθερά C θά προσδιορισθῇ, ὡς θέλει κατωτέρω ἐξηγηθῆ.

Περαιτέρω λόγῳ τοῦ τύπου (12) εὑρίσκεται ὡς ἔκφρασις τῆς συναρτήσεως Ψ(z) ἡ ἐξῆς, λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν καί τῆς ἐκφράσεως (29) τῆς συναρτήσεως Φ'(z) :

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \overline{q(\tau)}\zeta(\tau-z)\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}\zeta(\tau-z)\overline{d\tau}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \chi'(\tau)\varphi(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L \{m(\tau)-\chi(z)\}\varphi(\tau)\wp(\tau-z)d\tau+$$
$$+C\zeta(z)+C_2 \ . \qquad (35)$$

Ἡ ὡς ἄνω συνάρτησις Ψ(z) δέον νά εἶναι τμηματικῶς ὁλόμορφος εἰς τό ὅλον ἐπίπεδον πλήν τῶν ρωγμῶν. Δεδομένου ὅτι ἡ συνάρτησις ζ(z) παρουσιάζει πόλους εἰς τά σημεῖα z = w καί λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν τῆς ἐκφράσεως (14) τῆς συναρτήσεως χ(z), ἔπεται ὅτι, ἵνα ἀποφευχθῇ ἡ ὕπαρξις πόλων τῆς συναρτήσεως Ψ(z) εἰς τά προαναφερθέντα σημεῖα, πρέπει ἡ σταθερά C νά ἐκλεγῇ ὡς :

$$C = -\frac{B}{2\pi i}\int_L \varphi(\tau)\wp(\tau)d\tau, \qquad (36)$$

Ἐφαρμόζοντες ἤδη τόν δεύτερον τύπον τοῦ PLEMELJ εἰς τήν σχέσιν (34) εὑρίσκομεν :

$$T^+(t)+T^-(t) = \frac{2}{\pi i}\int_L \overline{q(\tau)}\zeta(\tau-t)\overline{d\tau}-\frac{1}{\pi i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}\zeta(\tau-t)\overline{d\tau}+$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_L \chi'(\tau)\varphi(\tau)\zeta(\tau-t)d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_L m(\tau)\varphi(\tau)\wp(\tau-t)d\tau+$$
$$+2C\zeta(t). \qquad (37)$$

Ἤδη ἡ ὁριακή συνθήκη (23α) λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν τύπων (28β), (31β), (36) καί (37) μᾶς δίδει τήν ζητουμένην ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν ἐπί τῆς θεμελιώδους ρωγμῆς L μέ ἄγνωστον συνάρτησιν τήν $\varphi(t)$:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\zeta(\tau-t)\,d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}\,\overline{\zeta(\tau-t)}\,\overline{d\tau}-\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}\zeta(\tau-t)\,\overline{d\tau}-\right.$$
$$-\frac{1}{\pi i}\int_L \chi'(\tau)\varphi(\tau)\zeta(\tau-t)\,d\tau+\frac{1}{\pi i}\int_L \left[m(\tau)-m(t)\right]\varphi(\tau)\wp(\tau-t)\,d\tau+$$
$$\left.+\frac{B\zeta(t)}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\wp(\tau)\,d\tau\right\} = 2\overline{p(t)}-\frac{2}{\pi i}\frac{dt}{\overline{dt}}\int_L \overline{q(\tau)}\zeta(\tau-t)\,\overline{d\tau}. \quad (38)$$

Ἀφ' ἧς στιγμῆς ἐπιλυθῇ ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (38), ἐν συνδυασμῷ μέ τήν συνθήκην (25) μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων, καί εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις $\varphi(t)$ ἐπί τῆς ρωγμῆς L, αἱ μιγαδικαί συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ εὑρίσκονται βάσει τῶν τύπων (24) καί (35), ἡ δέ βοηθητική μιγαδική συνάρτησις $T(z)$ βάσει τοῦ τύπου (34).

Τέλος διά τόν προσδιορισμόν τῶν μή εἰσέτι καθορισθεισῶν σταθερῶν C_1 καί C_2, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη ὑπεισέρχεται εἰς τήν ἔκφρασιν (24) τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$, ἡ δέ δευτέρα εἰς τάς ἐκφράσεις (34) καί (35) τῶν συναρτήσεων $T(z)$ καί $\Psi(z)$, λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν ὅτι, λόγῳ καί τῆς εἰσαγωγῆς τῶν σταθερῶν Γ καί Γ' κατά τάς σχέσεις (27), πρέπει νά πληροῦται ἡ συνθήκη {KOITER , 1960} :

$$g(z+2\omega_i)-g(z) = 0 \ , \ i = 1,2 \ , \quad (39)$$

ἔνθα $g(z)$ εἶναι μία μή ἀναλυτική συνάρτησις ὁριζομένη ὡς :

$$g(z) = \overline{\int\Phi(z)\,dz} + \bar{z}\,\Phi(z)+\int\Psi(z)\,dz \ , \quad (40)$$

ἔνθα διά τοῦ συμβόλου τοῦ ὁλοκληρώματος ὑποδηλοῦται τό ἀόριστον ὁλοκλήρωμα.

Αἱ συνθῆκαι (39) δέον ὅπως λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν, ὡς καί ἡ συνθήκη μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων (25) κατά τήν ἐπίλυσιν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (38).

Διά τήν άναλυτικωτέραν έκφρασιν τῆς συνθήκης (39) πρέπει, πέραν τῶν τύπων (24), (35) καί (40), νά ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν καί αἱ ἰδιότητες τῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων $\sigma(z)$, $\zeta(z)$ καί $\wp(z)$, αἵτινες δύνανται νά εὑρεθοῦν εἰς πλεῖστα βιβλία ἐπί μιγαδικῶν ἤ εἰδικῶν συναρτήσεων, ὡς τοῦ PHILLIPS {1966}. Λαμβάνοντες οὕτως ὑπ' ὄψιν ὅτι :

$$\wp(\tau-z-2\omega_{1,2}) - \wp(\tau-z) = 0 \ , \tag{41α}$$

$$\zeta(\tau-z-2\omega_{1,2}) - \zeta(\tau-z) = -2\eta_{1,2} \ , \tag{41β}$$

$$\ln\sigma(\tau-z-2\omega_{1,2}) - \ln\sigma(\tau-z) = -2\eta_{1,2}(\tau-z-\omega_{1,2})-\pi i, \tag{41γ}$$

ἔνθα αἱ σταθεραί η_1 καί η_2, ἐξαρτώμεναι μόνον ἐκ τῶν ἡμιπεριόδων ω_1 καί ω_2, ὁρίζονται βάσει τῶν τύπων (15), καί ἐπίσης ὅτι :

$$\zeta(z) = \frac{d}{dz}\ln\sigma(z) \quad , \qquad \wp(z) = -\frac{d}{dz}\zeta(z) \ , \tag{42}$$

εὑρίσκομεν εὐχερῶς ὅτι :

$$\int_z^{z+2\omega_{1,2}} \wp(\tau-z)\,dz = c_{1,2} \ , \tag{43α}$$

$$\int_z^{z+2\omega_{1,2}} \zeta(\tau-z)\,dz = 2\eta_{1,2}(\tau-z)+c_{3,4} \ , \tag{43β}$$

ἔνθα $c_{1,2,3,4}$ σταθεραί, τῶν ὁποίων ἡ τιμή δέν ἐνδιαφέρει, ἐάν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, πέραν τῶν τύπων (24) καί (35), καί ἡ συνθήκη μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων (25).

Λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν τύπων (41) καί (42) εἶναι δυνατόν νά ὑπολογισθῇ ἐπίσης ἡ τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος :

$$I_1 = \int_z^{z+2\omega_{1,2}} \bar{z}\,\wp(\tau-z)\,dz \ , \tag{44α}$$

ὡς καί τοῦ ὁλοκληρώματος :

$$I_2 = \int_z^{z+2\omega_{1,2}} \zeta(z)\,\wp(\tau-z)\,dz \ , \tag{44β}$$

ἐφ' ὅσον ληφθῇ ὑπ' ὄψιν καί ὁ τύπος :

$$-\frac{1}{2}\frac{\wp'(z)+\wp'(\tau)}{\wp(z)-\wp(\tau)} = \zeta(\tau-z)+\zeta(z)-\zeta(\tau) \ . \tag{45}$$

Εἶναι οὕτω δυνατή, λόγῳ καί τῶν σχέσεων (24),(35),(25) καί (40), ἡ ἔκφρασις τῶν συνθηκῶν (39) συναρτήσει τῶν ἀγνώστων σταθερῶν C_1 καί C_2 ὡς καί τῆς ὡσαύτως ἀγνώστου συναρτήσεως $\varphi(t)$. Αἱ προκύπτουσαι οὕτω συνθῆκαι συμπληροῦν τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (38) καί τήν συνθήκην μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων (25) καί πρέπει νά λαμβάνωνται ὁπωσδήποτε ὑπ' ὄψιν κατά τήν ἐπίλυσιν ἑνός συγκεκριμένου προβλήματος.

Ἡ χρησιμοποιηθεῖσα ἀνωτέρω συνάρτησις $\zeta(z)$ εἶναι τρόπον τινά ἀντίστοιχος τῆς $\cot\frac{\pi(\tau-z)}{\beta}$ χρησιμοποιηθείσης εἰς τό τμῆμα Β4 διά τήν σειράν περιοδικῶν ρωγμῶν. Ἐν τούτοις, ἐνῷ ἡ δευτέρα εἶναι περιοδική συνάρτησις, ἡ πρώτη εἶναι μόνον ψευδο-δίς περιοδική συνάρτησις.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Τό ἐξετασθέν εἰς τό τμῆμα τοῦτο πρόβλημα τοῦ συστήματος δίς περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου δέν ἔχει μελετηθῆ μέχρι σήμερον εἰς τήν γενικήν του περίπτωσιν πλήν διά τήν εἰδικήν περίπτωσιν , ὅπου αἱ ρωγμαί εἶναι εὐθύγραμμοι , ὑπό τοῦ FIL'SHTINSKII {1974}. Περισσότεραι παραπομπαί ἐπί τοῦ εἰδικοῦ τούτου προβλήματος δίδονται εἰς τήν ἐφαρμογήν Δ3.

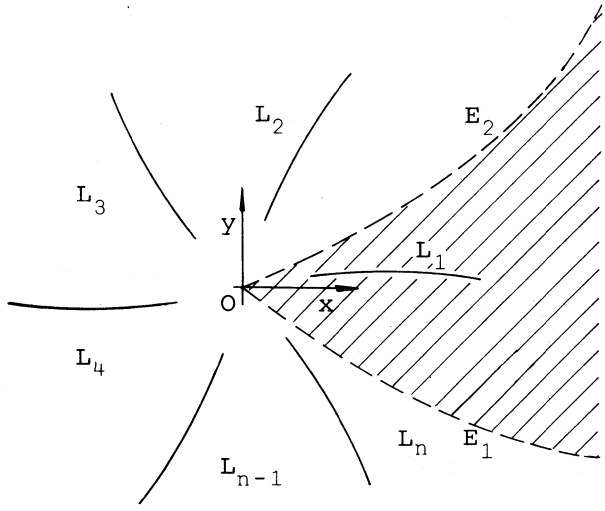
Ἐν τούτοις, ἀντιθέτως πρός τό πρόβλημα τῶν δίς περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν, τό πρόβλημα τῶν δίς περιοδικῶς διατεταγμένων ὀπῶν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου ἔχει πλήρως ἐπιλυθῆ. Ἡ πρώτη γενική ἐπίλυσίς του ἐδόθη ὑπό τοῦ

KOITER {1960}, ὅστις εἰργάσθη κατά τρόπον, τοῦ ὁποίου ἐπέκτασις δύναται νά θεωρηθῇ ἡ ἐνταῦθα διά τό πρόβλημα τῶν δίς περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν ἀναπτυχθεῖσα μέθοδος. Ὁ KOITER διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τῶν δίς περιοδικῶς διατεταγμένων ὀπῶν ἐστηρίχθη εἰς προηγουμένην του μελέτην {1959B} ἐπί τῶν ὁλοκληρωμάτων CAUCHY εἰς περίπτωσιν δίς περιοδικῶν συναρτήσεων. Περαιτέρω ὁ FIL'SHTINSKII ἐπέλυσε τά προβλήματα τῶν δίς περιοδικῶς διατεταγμένων κυκλικῶν ὀπῶν {1964}, τῶν δίς περιοδικῶς διατεταγμένων συστημάτων τυχόντων σχημάτων ὀπῶν{1972} καί τῶν δίς περιοδικῶς διατεταγμένων τυχόντων σχημάτων ἐγκλεισμάτων{1973}. Ἡ χρησιμοποιηθεῖσα ὑπό τοῦ FIL'SHTINSKII μέθοδος δέν διαφέρει οὐσιωδῶς τῆς χρησιμοποιηθείσης ὑπό τοῦ KOITER χρησιμοποιοῦσα τάς συναρτήσεις p(z) καί ζ(z) τοῦ WEIERSTRASS. Ἐν τούτοις ὁ FIL'SHTINSKII εἰσάγει μίαν εἰσέτι ψευδο-δίς περιοδικήν συνάρτησιν, ἥτις προκαλεῖ ὑπολογιστικῆς φύσεως δυσχερείας κατά τήν ἐπίλυσιν ἑνός συγκεκριμένου προβλήματος. Τέλος μία ἐντελῶς διάφορος μέθοδος ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος τοῦ συστήματος δίς περιοδικῶς διατεταγμένων ὀπῶν δίδεται ὑπό τῶν WILSON and HILL {1967}. Ἡ μέθοδος αὕτη στηρίζεται ἐπί τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως τῶν ὀπῶν εἰς τόν μοναδιαῖον κύκλον καί ἐν συνεχείᾳ ἐκφράσεως ὑπό μορφήν σειρῶν τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν μέ συντελεστάς τοιούτους, ὥστε νά ἐπαληθεύωνται αἱ ὁριακαί συνθῆκαι.

Δυνάμεθα νά ἀναφέρωμεν τέλος ὅτι τούς ὁρισμούς καί τάς ἰδιότητας τῶν συναρτήσεων p(z) καί ζ(z) τοῦ WEIERSTRASS δυνάμεθα νά ἀνεύρωμεν εἰς πλεῖστα βιβλία μιγαδικῶν συναρτήσεων ὡς τοῦ PHILLIPS {1966,Ch.1} ἤ ἐγχειρίδια ὡς τῶν ABRAMOWITZ and STEGUN {1965,Ch.18}, ἔνθα τό σχετικόν τμῆμα ἐγράφη ὑπό τοῦ SOUTHARD {1965}. Τέλος περί τῶν ἰδιοτήτων τῶν αὐτομόρφων συναρτήσεων, τῶν ὁποίων εἰδικήν περίπτωσιν ἀποτελοῦν αἱ δίς περιοδικαί συναρτήσεις, καί τῶν ὁμάδων τῶν γραμμικῶν μετασχηματισμῶν δυνάμεθα νά ἀνεύρωμεν στοιχεῖα εἰς τά βιβλία τοῦ FORD {1957} καί τοῦ GAKHOV {1966,Ch.VII}.

Β6. ΑΚΤΙΝΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΡΩΓΜΩΝ ΕΝΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΙΣΟΤΡΟΠΟΥ ΜΕΣΟΥ

Θεωροῦμεν σύστημα ἀκτινικῶς διατεταγμένων λείων ρωγμῶν ὡς εἰς τό παραπλεύρως Σχῆμα 1. Ἑκάστη ρωγμή προκύπτει ἐκ τῆς προηγουμένης της διά στροφῆς κατά γωνίαν 2π/n, ἔνθα n ὁ ἀριθμός τῶν θεωρουμένων ρωγμῶν, περί τό σταθερόν σημεῖον O, τό ὁποῖον θεωρεῖται ὡς κέντρον τοῦ Καρτεσιανοῦ συστήματος συντεταγμένων Oxy. Σχηματίζεται οὕτως ἡ διάταξις τῶν ρωγμῶν $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Χάριν διευκολύνσεως θέτομεν :



Σχῆμα 1

$$L_o = \sum_{k=1}^{n} L_n$$

καί ἐπίσης : $L \equiv L_1$. Αἱ ρωγμαί θεωροῦνται ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου καί θά ἐξετάσωμεν ἐνταῦθα τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος μέ φόρτισιν τήν αὐτήν ἐφ' ὅλων τῶν ρωγμῶν καί φόρτισιν εἰς τό ἄπειρον τοιαύτην, ὥστε ἡ μέν σταθερά Γ τοῦ τύπου (Α1.2α) νά εἶναι τυχοῦσα, ἡ δέ σταθερά Γ' τοῦ τύπου (Α1.2β) νά εἶναι μηδενική, ἤ, ὅπερ ταύτόν, μέ τήν κάτωθι φόρτισιν εἰς τό ἄπειρον :

$$\sigma_{x\infty} = \sigma_{y\infty} = \Gamma + \overline{\Gamma}, \qquad \sigma_{x\infty} - \sigma_{y\infty} = \Gamma' = 0, \tag{1}$$

ἐπί τῷ σκοπῷ ὅμως μή διαταράξῃ ἡ φόρτισις εἰς τό ἄπειρον τό ὁμοιόμορφον τῆς φορτίσεως ὅλων τῶν ρωγμῶν.

Ἐργαζόμενοι ἀναλόγως πρός τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα διά μίαν ἁπλῆν λείαν ρωγμήν εἰσάγομεν τάς συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$, ἀντί τῶν $\Phi_o(z)$ καί $\Psi_o(z)$, βάσει τῶν τύπων (A1.1), ὅτε εὑρίσκομεν πάλιν τάς ὁριακάς συνθήκας (A1.4) ἐφ' ἑκάστης ρωγμῆς L_k.

Λόγῳ τοῦ ὅτι ὑπάρχει ἡ αὐτή φόρτισις ἐφ' ὅλων τῶν ρωγμῶν, τό ἐξεταζόμενον πρόβλημα εἶναι ἀπολύτως συμμετρικόν καί αἱ τάσεις μεταβάλλονται ἀπό ἑνός σημείου z εἰς ἕτερον σημεῖον z' προκύπτοντος ἐκ τοῦ πρώτου διά στροφῆς κατά γωνίαν $2\pi/n$, ὅτε εἶναι :

$$z' = \varepsilon z, \tag{2}$$

ἔνθα ἐτέθη :

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \tag{3}$$

κατά τρόπον, ὥστε νά εἶναι :

$$\sigma_x(z)+\sigma_y(z) = \sigma_x(\varepsilon z)+\sigma_y(\varepsilon z), \tag{4α}$$

$$\bar{\varepsilon}^2 \left[\sigma_x(z)-\sigma_y(z)+2i\tau_{xy}(z) \right] = \sigma_x(\varepsilon z)-\sigma_y(\varepsilon z)+2i\tau_{xy}(\varepsilon z), \tag{4β}$$

ἤ ἐκφραζομένων τῶν τάσεων συναρτήσει τῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ εὑρίσκεται :

$$\Phi(z)+\overline{\Phi(z)} = \Phi(\varepsilon z)+\overline{\Phi(\varepsilon z)}, \tag{5α}$$

$$\bar{\varepsilon}^2 \left\{ \bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z) \right\} = \bar{\varepsilon}\bar{z}\Phi'(\varepsilon z)+\Psi(\varepsilon z). \tag{5β}$$

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν σχέσεων (5), ἐάν τεθῇ :

$$\Phi(z) = u(r,\vartheta)+iv(r,\vartheta), \tag{6}$$

ἔνθα $u(r,\vartheta)$ καί $v(r,\vartheta)$ πραγματικαί συναρτήσεις τῶν πολικῶν

συντεταγμένων (r,ϑ), προκύπτει ὅτι :

$$u(r,\vartheta) = u(r,\vartheta+\frac{2\pi}{n}). \tag{7}$$

Διαφορίζοντες τήν ἀνωτέρω ταυτότητα ὡς πρός τήν πολικήν ἀκτῖνα r καί τήν πολικήν γωνίαν ϑ εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως :

$$\frac{\partial u(r,\vartheta)}{\partial r} = \frac{\partial u(r,\vartheta+\frac{2\pi}{n})}{\partial r}, \tag{8α}$$

$$\frac{\partial u(r,\vartheta)}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u(r,\vartheta+\frac{2\pi}{n})}{\partial \vartheta}. \tag{8β}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (6) παραγωγίζοντες ὡς πρός z εὑρίσκομεν :

$$\Phi'(z) = \left(\frac{\partial u(r,\vartheta)}{\partial r} - i\frac{\partial u(r,\vartheta)}{r\partial \vartheta}\right)e^{-i\vartheta}, \tag{9}$$

ὁπότε λόγῳ τῶν ταυτοτήτων (8) προκύπτει ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi'(z)$ ἐπαληθεύει τήν ταυτότητα :

$$\Phi'(z) = \varepsilon\Phi'(\varepsilon z). \tag{10}$$

Ὁλοκλήρωσις τῆς τελευταίας ταύτης ταυτότητος δίδει :

$$\Phi(z) = \Phi(\varepsilon z)+iC, \tag{11}$$

ἔνθα C πραγματική σταθερά λόγῳ τοῦ τύπου (5α).

Περαιτέρω ἐφαρμογή τοῦ τύπου (11) n φοράς δίδει :

$$\Phi(z) = \Phi(\varepsilon^n z)+inC = \Phi(z)+inC, \tag{12}$$

δεδομένου ὅτι : $\varepsilon^n = 1$, λόγῳ τοῦ τύπου (3), ὁπότε συνάγομεν ὅτι ἡ σταθερά C πρέπει νά ἰσοῦται μέ μηδέν, ὅτε ἔχομεν :

$$\Phi(\varepsilon z) = \Phi(z). \tag{13}$$

Ἀκολούθως ἐκ τοῦ τύπου (5β) λόγῳ καί τῆς ταυτότητος (10) εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\Psi(\varepsilon z) = \bar{\varepsilon}^2\Psi(z). \tag{14}$$

Προφανῶς καί αἱ ἀρχικαί συναρτήσεις $\Phi_o(z)$ καί $\Psi_o(z)$ ἐπαληθεύουν τάς ταυτότητας (13) καί (14) ἀντιστοίχως, λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι ἡ σταθερά Γ' τοῦ τύπου (A1.1β) εἶναι, ὡς προανεφέρθη, μηδενική, ἤτοι εἶναι :

$$\Phi_o(\varepsilon z) = \Phi_o(z), \tag{15α}$$

$$\Psi_o(\varepsilon z) = \bar{\varepsilon}^2\Psi_o(z). \tag{15β}$$

Δι'ὁλοκληρώσεως τῶν ταυτοτήτων (15) εὑρίσκεται :

$$\varphi_o(\varepsilon z) = \varepsilon\varphi_o(z), \tag{16α}$$

$$\psi_o(\varepsilon z) = \bar{\varepsilon}\psi_o(z) \tag{16β}$$

χωρίς σταθεράς εἰς τό δεύτερον μέλος πάλιν, τούτου δικαιολογουμένου ἀναλόγως πρός τόν μηδενισμόν τῆς σταθερᾶς C εἰς τόν τύπον (12). Οἱ τύποι (16) δίδονται καί ὑπό τοῦ BUECKNER {1973, p.272}, χωρίς ὅμως τόσον πλήρη ἀπόδειξιν, ὡς ἡ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα.

Ὅσον ἀφορᾷ τέλος εἰς τάς μετατοπίσεις, ἡ συμμετρία τοῦ ἐξεταζομένου προβλήματος ἀπαιτεῖ ὅπως εἶναι :

$$u(\varepsilon z)+iv(\varepsilon z) = \varepsilon\left[u(z)+iv(z)\right], \tag{17}$$

ἤ ἐκφράζομένων τῶν μετατοπίσεων συναρτήσει τῶν συναρτήσεων $\varphi_o(z)$ καί $\psi_o(z)$ εὑρίσκεται :

$$\kappa\varphi_o(\varepsilon z)-\varepsilon z\overline{\Phi_o(\varepsilon z)}-\overline{\psi_o(\varepsilon z)} = \varepsilon\left\{\kappa\varphi_o(z)-z\overline{\Phi_o(z)}-\overline{\psi_o(z)}\right\}, \tag{18}$$

ἡ ὁποία σχέσις ἰσχύει ἐκ ταυτότητος λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν τύπων (15α) καί (16).

Ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$, ἤ ἡ $\Phi_o(z)$, ἐπαληθεύουσα τήν ταυτότητα (13), καλεῖται αὐτόμορφος συνάρτησις ὡς πρός τήν ὁμάδα τῶν γραμμικῶν μετασχηματισμῶν :

$$\omega_0(z) = z, \quad \omega_k(z) = \varepsilon\omega_{k-1}(z) = \varepsilon^k z, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{19}$$

Ἡ ἀνωτέρω ὁμάς γραμμικῶν μετασχηματισμῶν εἶναι πεπερασμένη μέ n στοιχεῖα, διότι, λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν καί τοῦ τύπου (3), ἔχομεν προφανῶς :

$$\omega_n(z) = \varepsilon^n z = z. \tag{20}$$

Δυνάμεθα ἐπίσης εὐκόλως νά εὕρωμεν μίαν θεμελιώδη περιοχήν τῆς ἀνωτέρω ὁμάδος τῶν γραμμικῶν μετασχηματισμῶν περιλαμβάνουσαν μίαν μόνον ρωγμήν, ἔστω τήν $L_1 \equiv L$, ὡς ἐξῆς : Φέρομεν μίαν ἡμιάπειρον καμπύλην E_1 ἐκκινοῦσαν ἐκ τοῦ σημείου O τοῦ Σχήματος 1, κέντρου τοῦ συστήματος τῶν ἀκτινικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν, καί διερχομένην μεταξύ τῶν ρωγμῶν L_n καί L_1 χωρίς νά τέμνῃ ἑκατέραν τούτων. Τοῦτο προκειμένου περί ἁπλῶν ρωγμῶν εἶναι ὁπωσδήποτε δυνατόν. Ἀκολούθως φέρομεν τήν ἐπίσης ἡμιάπειρον καμπύλην E_2, ἐμφαινομένην ὡς καί ἡ E_1 εἰς τό Σχῆμα 1, προκύπτουσαν δέ διά στροφῆς τῆς καμπύλης E_1 κατά τήν θετικήν φοράν κατά γωνίαν $2\pi/n$, ἤ ἄλλως, ὅπερ ταυτόσημον, προκύπτουσαν δι'ἐφαρμογῆς τοῦ μετασχηματισμοῦ $\omega_1(z)$ τοῦ τύπου (19) εἰς τά σημεῖα τῆς καμπύλης E_1. Ἡ περιοχή ἡ εὑρισκομένη μεταξύ τῶν καμπύλων E_1 καί E_2 καί διαγραμμισμένη εἰς τό Σχῆμα 1 εἶναι προφανῶς θεμελιώδης περιοχή τῆς ὁμάδος (19) τῶν γραμμικῶν μετασχηματισμῶν.

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τήν θεμελιώδη συνάρτησιν τῆς ἀνωτέρω ὁμάδος τῶν γραμμικῶν μετασχηματισμῶν, αὕτη δίδεται προφανῶς ὑπό τοῦ τύπου :

$$F(z) = z^n \tag{21}$$

λαμβάνουσα ἑκάστην τιμήν της ἐντός τῆς προηγουμένως ὁρισθείσης θεμελιώδους περιοχῆς μόνον μίαν φοράν.

Λαμβάνοντες ἤδη ὑπ'ὄψιν ὅτι αἱ συναρτήσεις $p(t)$ καί $q(t)$ αἱ ὁριζόμεναι βάσει τῶν τύπων (A1.5) εἶναι αἱ αὐταί, ὡς προϋπετέθη, ἐφ'ὅλων τῶν ρωγμῶν, ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$ ἐπαληθεύει τήν ταυτότητα (13), διά τοῦτο δέ καί ἐκλήθη αὐ-

τόμορφος ὡς πρός τήν ὁμάδα τῶν μετασχηματισμῶν (19), καί ὅτι ἡ συνάρτησις $\Psi(z)$ ἐπαληθεύει τήν ταυτότητα (14), διά τοῦτο καί δύναται νά κληθῇ ψευδοαυτόμορφος ὡς πρός τήν ἀνωτέρω ὁμάδα τῶν μετασχηματισμῶν, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ὁριακαί συνθῆκαι (A1.4) ἅπαξ ἰσχύουσαι ἐπί μιᾶς τῶν ρωγμῶν, ἔστω τῆς $L_1 \equiv L$, θά ἰσχύουν ὑποχρεωτικῶς καί ἐφ'ὅλων τῶν λοιπῶν ρωγμῶν, πρᾶγμα ἐμφανές ἐξ ἄλλου καί ἐκ τῶν τεθεισῶν συνθηκῶν (5) ὅσον ἀφορᾷ εἰς τήν συμπεριφοράν τῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$. Ἀρκεῖ συνεπῶς ἡ ἐπαλήθευσις τῶν συνθηκῶν (A1.4) μόνον ἐπί τῆς ρωγμῆς L κειμένης κατά τά προαναφερθέντα ἐντός τῆς θεωρηθείσης θεμελιώδους περιοχῆς τῆς ὁμάδος τῶν μετασχηματισμῶν $\omega_k(z)$.

Οὕτω θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν $\Phi(z)$ διδομένην ὑπό τοῦ ἐξῆς γενικευμένου ὁλοκληρώματος CAUCHY :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\tau)\frac{F'(\tau)}{F(\tau)-F(z)}d\tau, \tag{22}$$

τῆς συναρτήσεως $F(z)$ διδομένης ὑπό τοῦ τύπου (21), ὅτε προκύπτει :

$$\Phi(z) = \frac{n}{2\pi i}\int_L \varphi(\tau)\frac{\tau^{n-1}}{\tau^n - z^n}d\tau \tag{23}$$

μέ τήν πυκνότητα $\varphi(\tau)$ ἄγνωστον καί προσδιοριστέαν.

Ὑπενθυμίζεται ὅτι ἡ ὁλοκλήρωσις νοεῖται μόνον ἐπί τῆς θεμελιώδους ρωγμῆς L κειμένης ἐντός τῆς θεμελιώδους περιοχῆς. Σημειοῦται ὡσαύτως ὅτι εἰς περίπτωσιν ὑπάρξεως μιᾶς μόνον ρωγμῆς, $n = 1$, τό ὁλοκλήρωμα CAUCHY (23) συμπίπτει μέ τό ὁλοκλήρωμα CAUCHY (A1.7).

Ἡ συνάρτησις :

$$\frac{F'(\tau)}{F(\tau)-F(z)} = \frac{\tau^{n-1}}{\tau^n - z^n}, \tag{24}$$

παρουσιάζει προφανῶς ἀσυνέχειαν ἐπί τῆς ρωγμῆς L δυναμένη νά παρασταθῇ ὡς :

$$\frac{F'(\tau)}{F(\tau)-F(z)} = \frac{1}{\tau - z} + \Omega(\tau, z), \tag{25}$$

ἔνθα $\Omega(\tau,z)$ συνεχής συνάρτησις ἐπί τῆς ρωγμῆς L, οὖσα κατά τά λοιπά τμηματικῶς ὁλόμορφος συνάρτησις ἐντός τῆς θεμελιώδους περιοχῆς.

Διά νά ἀποφύγωμεν τήν ψευδοαυτόμορφον συνάρτησιν $\Psi(z)$ τήν ἐμφανιζομένην εἰς τάς ὁριακάς συνθήκας (A1.4), εἰσάγομεν τήν βοηθητικήν συνάρτησιν $T(z)$ βάσει τῆς σχέσεως :

$$T(z) = z^{2-n}\Psi(z). \tag{26}$$

Τῆς συναρτήσεως $\Psi(z)$ ὑπακουούσης εἰς τήν ταυτότητα (14), εὐκόλως προκύπτει ὅτι ἡ συνάρτησις $T(z)$ ὑπακούει εἰς τήν ταυτότητα :

$$T(\varepsilon z) = T(z), \tag{27}$$

εἶναι δηλαδή αὐτόμορφος ὡς καί ἡ $\Phi(z)$. Ἤδη γράφομεν τάς ὁριακάς συνθήκας (A1.4) συναρτήσει τῶν $\Phi(z)$ καί $T(z)$ ὡς ἐξῆς :

$$\left[\Phi^+(t)+\Phi^-(t)\right] + \left[\overline{\Phi^+(t)}+\overline{\Phi^-(t)}\right] + \frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\bar{t}\left[\Phi'^+(t)+\Phi'^-(t)\right] + t^{n-2}\left[T^+(t)+T^-(t)\right]\right\} = 2\overline{p(t)}, \tag{28α}$$

$$\left[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)\right] + \left[\overline{\Phi^+(t)}-\overline{\Phi^-(t)}\right] + \frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\bar{t}\left[\Phi'^+(t)-\Phi'^-(t)\right] + t^{n-2}\left[T^+(t)-T^-(t)\right]\right\} = 2\overline{q(t)}. \tag{28β}$$

Λόγῳ τῆς συμπεριφορᾶς (25) περί τήν ρωγμήν L τοῦ πυρῆνος τοῦ γενικευμένου ὁλοκληρώματος CAUCHY (22) δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τούς τύπους τοῦ PLEMELJ διά τάς ὁριακάς τιμάς τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ ἐπί τῆς ρωγμῆς L εὑρίσκοντες λόγῳ τῆς σχέσεως (23) :

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t) = \varphi(t), \tag{29α}$$

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t) = \frac{n}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\frac{\tau^{n-1}}{\tau^n-t^n}d\tau. \tag{29β}$$

Παραγωγίζοντες ὡς πρός t τούς τύπους (29) λαμβάνομεν :

$$\Phi'^{+}(t)-\Phi'^{-}(t) = \varphi'(t), \tag{30α}$$

$$\Phi'^{+}(t)+\Phi'^{-}(t) = \frac{n^2}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\frac{\tau^{n-1}t^{n-1}}{(\tau^n-t^n)^2}d\tau. \tag{30β}$$

Λόγῳ τῶν τύπων (29α) καί (30α) ἡ ὁριακή συνθήκη (28β) δίδει :

$$T^{+}(t)-T^{-}(t) = t^{2-n}\left\{\frac{\overline{dt}}{dt}\left[2\overline{q(t)}-\varphi(t)-\overline{\varphi(t)}\right]-\bar{t}\varphi'(t)\right\}. \tag{31}$$

Ἡ σχέσις (31) λόγῳ τῆς ταυτότητος (27) ἐπίσης δέ καί τῆς ταυτότητος (A1.13) μᾶς ἀναγκάζει, λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν καί τῶν τύπων τοῦ PLEMELJ (29) διά συνάρτησιν Φ(z) διδομένην ὑπό ἐκφράσεως τῆς μορφῆς (23), νά δεχθῶμεν ὡς ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως T(z) τήν ἐξῆς :

$$T(z) = \frac{n}{\pi i}\int_L \frac{\tau\overline{q(\tau)}}{\tau^n-z^n}\overline{d\tau}-\frac{n}{2\pi i}\int_L \frac{\tau\overline{\varphi(\tau)}}{\tau^n-z^n}\overline{d\tau}-\frac{n}{2\pi i}\int_L \bar{\tau}\varphi(\tau)\frac{(n-1)\tau^n+z^n}{(\tau^n-z^n)^2}d\tau \tag{32}$$

καί περαιτέρω λόγῳ τοῦ τύπου (26) ὡς ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως Ψ(z) τήν ἐξῆς :

$$\Psi(z) = \frac{n}{\pi i}\int_L \overline{q(\tau)}\frac{\tau z^{n-2}}{\tau^n-z^n}\overline{d\tau}-\frac{n}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}\frac{\tau z^{n-2}}{\tau^n-z^n}\overline{d\tau}-$$
$$-\frac{n}{2\pi i}\int_L \bar{\tau}\varphi(\tau)\frac{z^{n-2}\left[(n-1)\tau^n+z^n\right]}{(\tau^n-z^n)^2}d\tau. \tag{33}$$

Ἡ συνάρτησις Ψ(z) ὡς διδομένη ὑπό τῆς ἐκφράσεως (33) συμφωνεῖ μέ τήν ἀπαίτησιν νά μή παρουσιάζῃ ἡ συνάρτησις Ψ(z), ὡς καί ἡ Φ(z) βεβαίως, πόλους τόσον εἰς τό μηδέν ὅσον καί εἰς τό ἄπειρον.

Ἐφαρμόζοντες τόν δεύτερον τύπον τοῦ PLEMELJ εἰς τήν σχέσιν (32) εὑρίσκομεν :

$$T^{+}(t)+T^{-}(t) = \frac{2n}{\pi i}\int_L \overline{q(\tau)}\frac{\tau}{\tau^n-t^n}\overline{d\tau}-\frac{n}{\pi i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}\frac{\tau}{\tau^n-t^n}\overline{d\tau}-$$
$$-\frac{n}{\pi i}\int_L \bar{\tau}\varphi(\tau)\frac{(n-1)\tau^n+t^n}{(\tau^n-t^n)^2}d\tau. \tag{34}$$

Ἤδη ἡ ὁριακή συνθήκη (28α) λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν τύπων (29β), (30β) καί (34) μᾶς δίδει τήν ζητουμένην ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν ἐπί τῆς θεμελιώδους ρωγμῆς L μέ ἄγνωστον συνάρτησιν τήν φ(t) :

$$\frac{n}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\frac{\tau^{n-1}}{\tau^n-t^n}d\tau-\frac{n}{\pi i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}\frac{\overline{\tau}^{n-1}}{\overline{\tau}^n-\overline{t}^n}\overline{d\tau}-\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{n}{\pi i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}\frac{\tau t^{n-2}}{\tau^n-t^n}\overline{d\tau}+\right.$$
$$\left.+\frac{n}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\frac{t^{n-2}\left\{\left[(n-1)\tau^n+t^n\right]\overline{\tau}-n\tau^{n-1}t\overline{t}\right\}}{(\tau^n-t^n)^2}d\tau\right\}=\overline{2p(t)}-$$
$$-\frac{2n}{\pi i}\frac{dt}{\overline{dt}}\int_L \overline{q(\tau)}\frac{\tau t^{n-2}}{\tau^n-t^n}\overline{d\tau}. \qquad (35)$$

Ἀφ'ἧς στιγμῆς ἐπιλυθῇ ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (35) καί εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις φ(t) ἐπί τῆς ρωγμῆς L, αἱ μιγαδικαί συναρτήσεις Φ(z) καί Ψ(z) εὑρίσκονται βάσει τῶν τύπων (23) καί (33), ἡ δέ βοηθητική μιγαδική συνάρτησις T(z) βάσει τοῦ τύπου (32).

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τήν συνθήκην μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων ἐφ'ἑκάστης ρωγμῆς (A1.21), αὕτη λόγῳ τῶν τύπων (26) καί (31) λαμβάνει πάλιν τήν μορφήν (A1.23), ἀρκεῖ δέ ἡ ἐπαλήθευσίς της ἐπί τῆς ρωγμῆς L, ἵνα, δεδομένου τοῦ αὐτομόρφου τῆς συναρτήσεως Φ(z), ὅπερ ἔχει ὡς συνέπειαν ἡ συνάρτησις φ(t) νά εἶναι ἡ αὐτή ἐφ'ὅλων τῶν ρωγμῶν, ἐπαληθεύεται ἐφ'ὅλων τῶν ρωγμῶν. Ἀπαιτεῖται οὕτω τελικῶς ἡ ἐπίλυσις τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (35) λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν τῆς συνθήκης (A1.23).

Ἄς δώσωμεν ἤδη, ὡς ἐπράξαμεν καί εἰς τό τμῆμα B4 διά τήν περίπτωσιν τῶν περιοδικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν, μίαν ἐξήγησιν τῆς ἐκφράσεως (23) τῆς συναρτήσεως Φ(z). Οὕτως ἄς θεωρήσωμεν ὅτι ἔχομεν ἁπλῶς μίαν διάταξιν ρωγμῶν, ὁπότε συμφώνως πρός τά ἐκτεθέντα εἰς τά τμήματα A1 καί B1 δυνάμεθα νά παραστήσωμεν τήν συνάρτησιν Φ(z) διά τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (A1.7) ἐκτεινομένου ὅμως ἐφ'ὅλων τῶν ρωγμῶν, ἤτοι ἐπί τῆς καμπύλης L_0, ὡς προανεφέρθη. Εἶναι δηλαδή :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau. \qquad (36)$$

Δεδομένου ὅμως ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$ εἶναι αὐτόμορφος κατά τήν ἔννοιαν τῆς ταυτότητος (13), ὅτε ἡ πυκνότης $\varphi(t)$ τοῦ ἀνωτέρω ὁλοκληρώματος CAUCHY λαμβάνει τήν αὐτήν τιμήν ἐπί τῶν ἀντιστοίχων σημείων ὅλων τῶν ρωγμῶν, ἐπίσης δέ ὅτι αἱ ρωγμαί εἶναι ἀκτινικῶς διατεταγμέναι προκύπτουσαι ἡ μία ἐκ τῆς ἄλλης διά στροφῆς κατά γωνία $2\pi/n$, εἶναι εὔκολον νά γράψωμεν τό ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα CAUCHY, ὥστε νά ἐκτείνεται μόνον ἐπί τῆς ρωγμῆς L ὡς ἐξῆς :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\tau)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon^k}{\varepsilon^k\tau-z}d\tau. \tag{37}$$

Λαμβάνοντες περαιτέρω ὑπ'ὄψιν τήν ταυτότητα :

$$\frac{n\tau^{n-1}}{\tau^n-z^n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon^k}{\varepsilon^k\tau-z} \tag{38}$$

εὑρίσκομεν εὐθύς ὡς ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ τήν (23).

Ἀναλόγως σκεπτόμενοι διά τήν συνάρτησιν $\Psi(z)$ θεωροῦμεν ταύτην κατά τήν σχέσιν (A1.12) ἐκφραζομένην ὡς ἐξῆς :

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{L_o}\frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-z}\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_o}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-z}\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_o}\frac{\overline{\tau}\varphi(\tau)}{(\tau-z)^2}d\tau, \tag{39}$$

λόγῳ δέ τοῦ ὅτι αἱ συναρτήσεις $\varphi(t)$ καί $q(t)$ λαμβάνουν τάς αὐτάς τιμάς ἐπί τῶν ἀντιστοίχων σημείων ὅλων τῶν ρωγμῶν, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα πάλιν νά γράψωμεν τήν ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως $\Psi(z)$ μέ ὁλοκληρώματα ἐκτεινόμενα μόνον ἐπί τῆς ρωγμῆς L ὡς ἐξῆς :

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \overline{q(\tau)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\overline{\varepsilon}^k}{\varepsilon^k\tau-z}\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\overline{\varepsilon}^k}{\varepsilon^k\tau-z}\overline{d\tau}-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\tau}\varphi(\tau)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\varepsilon^k\tau-z)^2}d\tau. \tag{40}$$

Λαμβάνοντες περαιτέρω ὑπ'ὄψιν τήν ταυτότητα :

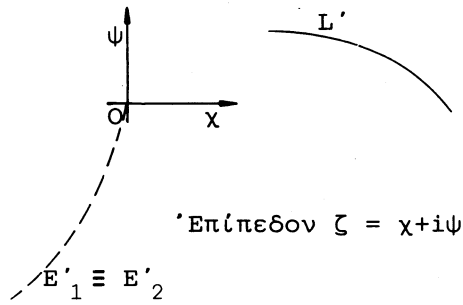
$$\frac{n\tau z^{n-2}}{\tau^n-z^n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\overline{\varepsilon}^k}{\varepsilon^k\tau-z} \tag{41}$$

καί τήν διά παραγωγίσεώς της ὡς πρός τ προκύπτουσαν :

$$\frac{nz^{n-2}\left[(n-1)\tau^n+z^n\right]}{(\tau^n-z^n)^2} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\varepsilon^k\tau-z)^2} \tag{42}$$

εὑρίσκομεν εὐθύς ὡς ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως $\Psi(z)$ τήν (33). Παρατηροῦμεν τέλος ὅτι ἀναλόγως δυνάμεθα ἐκκινοῦντες ἐκ τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (A1.15) δι'ἁπλῆν ρωγμήν ἤ σύστημα ἁπλῶν ρωγμῶν νά καταλήξωμεν εἰς τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (35).

Πέραν τῶν δύο ἀνωτέρω ἐξετασθέντων τρόπων ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος τῶν ἀκτινικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν, εἷς τρίτος τρόπος συνίσταται εἰς τήν ἐφαρμογήν τῆς μεθόδου τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως. Μέ ἀπεικονίζουσαν συνάρτησιν τήν $F(z)$ τοῦ τύπου (21) ἀπό τοῦ πραγματικοῦ ἐπιπέδου z εἰς ἓν βοηθητικόν ἐπίπεδον ζ, ἡ θεμελιώδης περιοχή τοῦ ἐπιπέδου z καταλαμβάνει ὁλόκληρον τό ἐπίπεδον ζ μέ τήν εἰκόνα τῆς ρωγμῆς L' ἐντός τοῦ ἐπιπέδου ζ, ὡς φαίνεται καί εἰς τό παραπλεύρως Σχῆμα 2. Αἱ εἰκόνες E'_1 καί E'_2 τῶν ἡμιαπείρων καμπύλων E_1 καί E_2 τῶν ὁριζουσῶν τήν θεμελιώδη περιοχήν εἰς τό ἐπίπεδον z συμπίπτουν εἰς τό ἐπίπεδον ζ. Ἡ τομή, τήν ὁποίαν ἀποτελεῖ εἰς τό ἐπίπεδον ζ ἡ $E'_1 \equiv E'_2$, λόγῳ τοῦ αὐτομόρφου τῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $T(z)$ εἰς τό ἐπίπεδον z, αἵτινες λαμβάνουν τάς αὐτάς τιμάς ἐπί τῶν ἀντιστοίχων σημείων τῶν E_1 καί E_2, μέ συνέπειαν νά λαμβάνουν τάς αὐτάς ὁριακάς τιμάς εἰς τάς δύο πλευράς τῆς προαναφερθείσης τομῆς, οὐδεμίαν σημασίαν κατά τήν λύσιν τοῦ προβλήματος εἰς τό ἐπίπεδον ζ ἔχει. Αἱ $\tilde{\Phi}(\zeta) = \Phi(\zeta^{1/n}) = \Phi(z)$ καί $\tilde{T}(\zeta) = T(\zeta^{1/n}) = T(z)$ εἶναι



Σχῆμα 2

τμηματικῶς ὁλόμορφοι εἰς τό ἐπίπεδον ζ πλήν τῆς εἰκόνος τῆς ρωγμῆς L'. Ὁ περαιτέρω τρόπος ἐργασίας εἶναι προφανής, προκύπτουν δέ τελικῶς τά αὐτά ἀποτελέσματα οἷα καί διά τῶν δύο προηγουμένων μεθόδων.

Σημειοῦται τέλος ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀκτινική διάταξις ρωγμῶν ἀνάγεται εἰς σειράν περιοδικῶν ρωγμῶν διά συμμόρφου ἀπεικονίσεως μέ ἀπεικονίζουσαν συνάρτησιν τήν :

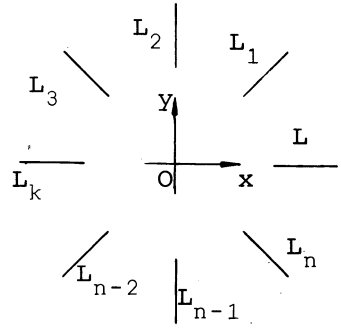
$$\zeta = \omega(z) = \ln z \tag{43}$$

μέ περίοδον εἰς τό ἐπίπεδον ζ τήν :

$$\beta = i\frac{2\pi}{n}. \tag{44}$$

Δέν χρειάζεται νά παρατηρήσωμεν ὅτι πρακτικῶς οὐδόλως συνίσταται μία τοιαύτη σύμμορφος ἀπεικόνισις.

Θά ἐφαρμόσωμεν ἤδη ὅσα ἀνωτέρω ἀνεφέρθησαν εἰς τήν περίπτωσιν ἀκτινικῶς διατεταγμένων εὐθυγράμμων ρωγμῶν ὡς εἰς τό Σχῆμα 3 μέ τήν ρωγμήν L κειμένην ἐπί τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος Ox, ὅτε ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (35) ἁπλοποιεῖται λαμβάνουσα τήν κάτωθι μορφήν :



Σχῆμα 3

$$\frac{n}{\pi i}\int_L \{\varphi(\tau)-\overline{\varphi(\tau)}\}\frac{\tau(\tau^{n-2}+t^{n-2})}{\tau^n-t^n}d\tau-\frac{n^2}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\frac{\tau^{n-1}t^{n-2}(\tau^2-t^2)}{(\tau^n-t^n)^2}d\tau =$$

$$= 2\overline{p(t)}-\frac{2n}{\pi i}\int_L \overline{q(\tau)}\frac{\tau t^{n-2}}{\tau^n-t^n}d\tau. \tag{45}$$

Εἰς τήν αὐτήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν καταλήγομεν ἐκκινοῦντες, ὡς προανεφέρθη ἐξ ἄλλου, ἐκ τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (A1.15), ἥτις εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν δύναται νά γραφῇ :

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon^k}{\varepsilon^k\tau-t}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\overline{\varepsilon}^k}{\overline{\varepsilon}^k\tau-t}d\tau-$$
$$-\frac{1}{\pi i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\overline{\varepsilon}^k}{\varepsilon^k\tau-t}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\tau-\varepsilon^k t}{(\varepsilon^k\tau-t)^2}d\tau =$$
$$= 2\overline{p(t)}-\frac{2}{\pi i}\int_L \overline{q(\tau)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\overline{\varepsilon}^k}{\varepsilon^k\tau-t}d\tau \qquad (46)$$

λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν ταυτοτήτων (38), (41) καί (42) ὡς καί τῆς ταυτότητος :

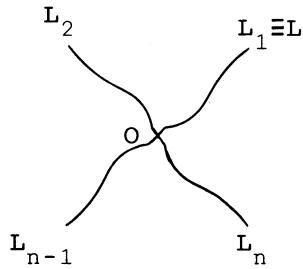
$$\frac{nz^{n-1}}{\tau^n-z^n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\varepsilon^k\tau-z}, \qquad (47)$$

διά παραγωγίσεως ὡς πρός τ τῆς ὁποίας προκύπτει :

$$\frac{n^2\tau^{n-1}z^{n-1}}{(\tau^n-z^n)^2} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon^k}{(\varepsilon^k\tau-z)^2} .$$

Πέραν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (45) πρέπει βεβαίως νά ληφθῇ ὑπ'ὄψιν καί ἡ συνθήκη (A1.23) τοῦ μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων.

Δέον τέλος νά παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀναφερθεῖσα μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήμα - τος δι'ἀκτινικῶς διατεταγμένας ρωγμάς ἰσχύει καί εἰς τήν περίπτωσιν, καθ'ἣν αἱ ρωγμαί ἔχουν ὡς κοινόν ἄκρον των τό κέντρον O, ὡς εἰς τό Σχῆμα 4 ἐμφαίνεται. Τότε, λόγῳ τῆς συμμετρίας τῆς γεωμετρίας καί τῆς φορτίσεως, ἀφ'ἑνός μέν ἡ συνθήκη μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων, διά τήν σύνθετον πλέον ρωγμήν, ἰσχύει προφανῶς αὐτομάτως, ἔστω καί ἐάν δέν ἰσχύῃ δι'ἕκαστον ἰδιαίτερον κλάδον, ἀφ'ἑτέρου δέ ἡ συνάρτησις φ(t) δέν παρουσιάζει ἰδιομορφίαν παρά τό σημεῖον O.



Σχῆμα 4

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Τό ἐξετασθέν εἰς τό τμῆμα τοῦτο πρόβλημα τῆς ἀκτινικῆς διατάξεως ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου ἐμελετήθη μέχρι σήμερον μόνον εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν, ὅπου αἱ ρωγμαί εἶναι εὐθύγραμμοι καί μάλιστα διευθύνσεων διερχομένων διά τοῦ αὐτοῦ σημείου ἤ ἔτι περαιτέρω ὅπου αὐταί αὗται αἱ εὐθύγραμμοι ρωγμαί εἶναι συντρέχουσαι. Αἱ σχετικαί ἐργασίαι δίδονται εἰς τήν ἐφαρμογήν Δ4. Ἐκ τούτων ἡ ἀναπτυχθεῖσα ὑπό τοῦ BUECKNER {1973, § 5.4} μέθοδος, καίτοι περιωρισμένη εἰς τήν ἀντι - μετώπισιν προβλημάτων εὐθυγράμμων ἀκτινικῶς διατεταγμένων ρωγμῶν, ἐν τούτοις δύναται νά θεωρηθῇ ἀρκετά συγγενής τῆς ἐνταῦθα παρουσιασθείσης, καθ'ὅσον χρησιμοποιεῖ τήν μέθοδον τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν, χωρίς ἐν τούτοις νά καταφεύγῃ εἰς συμμόρφους ἀπεικονίσεις. Ὅσον ἀφορᾷ τέλος εἰς τήν θεωρίαν τῶν αὐτομόρφων συναρτήσεων καί τῶν ὁμάδων τῶν γραμμικῶν μετασχηματισμῶν, στοιχεῖα τῆς ὁποίας ἐχρησιμοποιήσαμεν ἀνωτέρω, παραπέμπομεν εἰς τά βιβλία τῶν FORD {1957} καί GAKHOV {1966, § 51}.

B7. ΡΩΓΜΗ ΜΕΤΑ ΓΩΝΙΑΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ Ἢ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΩΝ ΡΩΓΜΩΝ ΕΝΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΙΣΟΤΡΟΠΟΥ ΜΕΣΟΥ

Μέχρι τοῦδε εἴχομεν θεωρήσει ὅτι ἡ ἐξεταζομένη ρωγμή ἦτο ἁπλῆ καί λεία, δέν παρουσίαζε δηλαδή γωνιακά σημεῖα οὐδέ διακλαδώσεις πρός ἑτέρας διευθύνσεις. Οὕτω καί ἐφ' ὅσον εἴχομεν πρός ἐξέτασιν τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα, ἡ ἄγνωστος συνάρτησις $\varphi(t)$, πυκνότης τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (A1.7), ἦτο συνάρτησις ὁμαλῶς μεταβαλλομένη ἐπί τῆς ρωγμῆς, ἐφ' ὅσον καί αἱ συναρτήσεις $p(t)$ καί $q(t)$ κατά τάς σχέσεις (A1.5) μετεβάλλοντο ὁμαλῶς ἐπί τῆς ρωγμῆς. Ἐν τούτοις καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἡ συνάρτησις $\varphi(t)$ παρουσιάζει ἰδιομορφίας εἰς τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς τάξεως $(-1/2)$. Ἀκριβέστερον ἡ συνάρτησις $\varphi(t)$ δύναται νά θεωρηθῇ κατά τόν τύπον (A1.27) ὡς ἄθροισμα δύο συναρτήσεων, τῆς $f(t)$, ἥτις παριστᾷ τήν πυκνότητα συγκεντρωμένων δυνάμεων κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς καί δίδεται ὑπό τοῦ τύπου (A1.28) συναρτήσει τῆς συναρτήσεως $q(t)$ διδομένης ὑπό τοῦ τύπου (A1.5β), οὕτω δέ μή παρουσιαζούσης ἰδιομορφίας εἰς τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς καί τῆς $g(t)$, ἥτις παριστᾷ τήν πυκνότητα τῶν μεταστάσεων κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς καί εὑρίσκεται ὡς λύσις τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (A1.30). Ἡ συνάρτησις αὕτη παρουσιάζει ἰδιομορφίας τάξεως $(-1/2)$ εἰς τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς, τοῦτο δέ διαπιστοῦται εὐκόλως, καθ' ὅσον ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (A1.30) δύναται νά θεωρηθῇ ἰσοδύναμος ἑνός συστήματος ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων τοῦ τύπου:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{\tau-t}\,d\tau + \int_L K(\tau,t)\,g(\tau)\,d\tau = h(t) \quad , \tag{1}$$

ἔνθα ὁ πυρήν $K(\tau,t)$ δέν παρουσιάζει ἰδιομορφίας κατά CAUCHY, ὁπότε ἡ συμπεριφορά τῆς συναρτήσεως $g(t)$ εἰς τά ἄκρα τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως L, δηλαδή εἰς τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς, θά εἶναι ἡ αὐτή μέ τήν συμεριφοράν τῆς συναρτήσεως $g^*(t)$, λύσεως μιᾶς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g^*(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = h^*(t) \quad . \tag{2}$$

Τῆς τελευταίας ὅμως ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως ἡ λύσις εἶναι γνωστή {MUSKHELISHVILI, 1953B, §88}:

$$g^*(t) = \frac{1}{\pi i\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}\int_L \frac{\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}\,h^*(\tau)}{\tau-t}\,d\tau + \frac{P(t)}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}} \quad , \tag{3}$$

ἔνθα $P(t)$ πολυώνυμον. Ἡ συνάρτησις $g^*(t)$ παρουσιάζει συνεπῶς ἰδιομορφίας τάξεως $(-1/2)$ εἰς τά ἄκρα α καί β τῆς ρωγμῆς, τό αὐτό δέ συμβαίνει καί διά τήν συνάρτησιν $g(t)$.

Τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (1) δυνάμεθα νά ἀναγάγωμεν ἐπίσης εἰς ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν FREDHOLM δευτέρου εἴδους γράφοντες ταύτην ὑπό τήν μορφήν:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = h(t)-\int_L K(\tau,t)g(\tau)\,d\tau \tag{4}$$

συμπίπτουσαν μέ τήν (2), ἐάν θεωρηθῇ ὅτι:

$$h^*(t) = h(t) - \int_L K(\tau,t)g(\tau)\,d\tau \quad , \quad g^*(t) = g(t) \quad . \tag{5}$$

Ἡ συνάρτησις $h^*(t)$ τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (4) δύναται νά θεωρηθῇ πρός στιγμήν ὡς γνωστή, ὁπότε βάσει τοῦ τύπου (3) τοῦ δίδοντος τήν λύσιν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (2) δυνάμεθα νά γράψωμεν τήν λύσιν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (4) ὑπό τήν μορφήν:

$$g(t) = \frac{1}{\pi i\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}\int_L \frac{\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}\,h(\tau)}{\tau-t}\,d\tau - \frac{1}{\pi i\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}\int_L \frac{\sqrt{(\tau'-\alpha)(\tau'-\beta)}}{\tau'-t}\int_L K(\tau,\tau')g(\tau)\,d\tau\,d\tau' + \frac{P(t)}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}} \tag{6}$$

ἤ περαιτέρω ὑπό τήν μορφήν:

$$\mu(t)+\int_L K_0(\tau,t)\mu(\tau)d\tau = h_0(t) \quad , \tag{7}$$

ἔνθα ἐτέθησαν:

$$K_0(\tau,t) = \frac{1}{\pi i\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}}\int_L \frac{\sqrt{(\tau'-\alpha)(\tau'-\beta)}}{\tau'-t}K(\tau,\tau')d\tau' \quad , \tag{8α}$$

$$h_0(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}}{\tau-t}h(\tau)d\tau + P(t) \quad , \tag{8β}$$

ἡ δέ συνάρτησις $\mu(t)$ εἰσήχθη ἀντί τῆς $g(t)$ βάσει τοῦ τύπου:

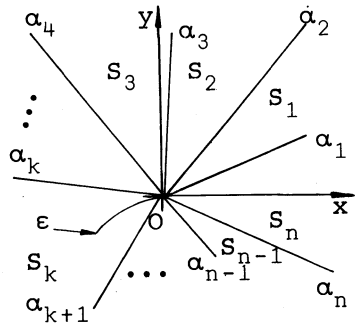
$$\mu(t) = \sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}g(t) \quad . \tag{9}$$

Ἡ συνάρτησις $\mu(t)$ προκύπτει ὡς λύσις τῆς ἐξισώσεως FREDHOLM δευτέρου εἴδους (7) καί δέν παρουσιάζει ἰδιομορφίας εἰς τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς, ὡς ἡ συνάρτησις $g(t)$, ἥτις παρουσιάζει ἰδιομορφίας τάξεως $(-1/2)$ εἰς τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τό πολυώνυμον $P(t)$, τοῦτο εἶναι διά τήν ἐξεταζομένην περίπτωσιν μηδενικοῦ βαθμοῦ, ἤτοι σταθερά, διότι ἄλλως ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$ διδομένη ὑπό τῆς ἐκφράσεως (A1.7) δέν θά ἔτεινεν εἰς τό μηδέν διά $z \to \infty$.

Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος ἀναγωγῆς μιᾶς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς (1) εἰς μίαν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν FREDHOLM δευτέρου εἴδους τῆς μορφῆς (7) εἶναι ἡ γνωστή μέθοδος τοῦ CARLEMAN. Εἰς τήν παροῦσαν ἐργασίαν δέν θά ἀκολουθήσωμεν τήν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς τῶν παρουσιαζομένων ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων εἰς ἐξισώσεις FREDHOLM δευτέρου εἴδους καί ἐπίλυσιν δι' ἀριθμητικῶν μεθόδων τῶν τελευταίων, καθ' ὅσον εἶναι ἀρκετά δυσχερής ἀπό ὑπολογιστικῆς ἀπόψεως ὁ προσδιορισμός τῶν συναρτήσεων $K_0(\tau,t)$ καί $h_0(t)$ κατά τούς τύπους (8). Ἀντιθέτως θά δώσωμεν μεθόδους ἐπιλύσεως ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων οὐδόλως πολυπλοκωτέρους τῶν ἐφαρμοζομένων δι' ἐξισώσεις FREDHOLM. Αἱ μέθοδοι αὗται θά ἐκτεθοῦν εἰς τό Κεφάλαιον Γ.

Πρίν προχωρήσωμεν εἰς τήν ἐξέτασιν συνθετωτέρων περιπτώσεων, ἔνθα παρουσιάζονται ἰδιομορφίαι εἰς τήν πυκνότητα

φ(t) τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (A1.7), ἀξίζει νά σημειώσωμεν ὅτι εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος ἡ συνάρτησις μεταστάσεων g(t) διδομένη ὑπό τοῦ τύπου (A6.10) παρουσιάζει οἷαν συμπεριφοράν καί ἡ συνάρτησις g(t), διδομένη ὑπό τοῦ τύπου (A6.2β), μή παρουσιάζουσα οὕτως ἰδιομορφίας εἰς τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς, ἐφ' ὅσον ἡ συνάρτησις g(t) δέν παρουσιάζει, ἐνῷ ἡ συνάρτησις δυνάμεων f(t) προκύπτουσα ὡς λύσις τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (A6.12) παρουσιάζει ἐν γένει ἰδιομορφίας τάξεως (-1/2) εἰς τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς. Κατ' αὐτόν τόν τρόπον καί ἡ συνάρτησις φ(t), πυκνότης τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (A1.7) καί ἴση κατά τόν τύπον (A1.27), μέ τό ἄθροισμα τῶν συναρτήσεων f(t) καί g(t), παρουσιάζει ἰδιομορφίας τάξεως (-1/2) εἰς τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς, ἀκριβῶς ὡς καί εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος δι' ἁπλῆν λείαν ρωγμήν.



Σχῆμα 1

Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη τήν σύνθετον ρωγμήν τοῦ Σχήματος 1 συντιθεμένην ἐξ n κλάδων ἐκκινούντων ἐκ κοινοῦ σημείου O, τό ὁποῖον δύναται νά θεωρηθῇ καί ὡς ἀρχή συστήματος συντεταγμένων Oxy. Οἱ κλάδοι Oa_k, καίτοι ἐσχεδιάσθησαν χάριν ἁπλότητος εὐθύγραμμοι, δέν εἶναι βεβαίως κατ' ἀνάγκην εὐθύγραμμοι. Τό σημεῖον O εἶναι ἀσφαλῶς ἓν σημεῖον, ἔνθα ἡ συνάρτησις φ(t), ὁριζομένη ἐφ' ὁλοκλήρου τῆς συνθέτου ρωγμῆς, παρουσιάζει ἰδιομορφίαν. Ἡ συνάρτησις φ(t) παρουσιάζει βεβαίως ἰδιομορφίας τάξεως (-1/2) καί εἰς τά σημεῖα a_k (k = 1, 2,...,n) κατά τά ἀναφερθέντα προηγουμένως διά τάς περιπτώσεις τοῦ πρώτου καί τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος. Ἐνταῦθα ὅμως θά μᾶς ἀπασχολήσῃ μόνον ἡ συμπεριφορά της παρά τό σημεῖον O. Ἡ συμπεριφορά αὐτη ἐξαρτᾶται, ὡς θά ἴδωμεν πληρέστερον κατωτέρω, πέραν τῆς γεωμετρίας τῶν διακλαδιζομένων ρωγμῶν περί τό σημεῖον O καί ἐκ τοῦ ἐάν ἔχωμεν δεδο-

μένας τάς τάσεις ἤ τάς μετατοπίσεις εἰς τάς πλευράς τῶν n συντρεχουσῶν εἰς τό σημεῖον O ρωγμῶν.

Ἀξίζει δέ νά σημειωθῇ ὅτι, ὁσονδήποτε σύνθετον διάταξιν ρωγμῶν καί ἄν ἔχωμεν πρός ἐξέτασιν, δυνάμεθα νά ἀπομονώσωμεν ὅλα τά ἀνώμαλα σημεῖα O ταύτης καί νά ἐξετάσωμεν ἕν ἕκαστον τούτων κεχωρισμένως βάσει τῆς ἐκτεθησομένης κατωτέρω μεθόδου. Ὡς τοιαῦτα ἀνώμαλα σημεῖα O δυνάμεθα νά νοήσωμεν τά σημεῖα τομῆς καί διακλαδώσεως ρωγμῶν, τά πέρατα τῶν ρωγμῶν ἤ ἀκόμη καί τά σημεῖα, ἔνθα ἔχομεν ἀπότομον μεταβολήν ἤ ἰδιομορφίαν τῶν δεδομένων, τάσεων ἤ μετατοπίσεων, ἐπί μιᾶς πλευρᾶς μιᾶς ρωγμῆς ἤ ἀλλαγήν τῶν δεδομένων ἐπί μιᾶς πλευρᾶς μιᾶς ρωγμῆς ἀπό τάσεις εἰς μετατοπίσεις καί ἀντιστρόφως ἑκατέρωθεν τοῦ θεωρουμένου σημείου O, ὡς συμβαίνει εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ μικτοῦ θεμελιώδους προβλήματος. Ὅλαι αἱ περιπτώσεις αὗται ἀποτελοῦν προφανῶς εἰδικάς περιπτώσεις τῆς διατάξεως τῶν ρωγμῶν τοῦ Σχήματος 1 μέ δεδομένας εἴτε τάς τάσεις εἴτε τάς μετατοπίσεις ἐπί τῶν πλευρῶν τούτων θεωρουμένων μάλιστα ἐντελῶς κεχωρισμένως.

Διά νά εὕρωμεν τήν ἰδιόμορφον συμπεριφοράν τῆς συναρτήσεως $\varphi(t)$ εἰς τό σημεῖον O, ἀρκεῖ νά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι βάσει τοῦ τύπου τοῦ PLEMELJ (A1.8α) εἶναι ἀρκετόν νά γνωρίζωμεν τήν συμπεριφοράν τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ παρά τό σημεῖον O. Ἐν τούτοις ἡ συμπεριφορά τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ ὅσον πλησιάζομεν εἰς τό σημεῖον O ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ τομέως S_k μεταξύ τῶν κλάδων Oa_k καί Oa_{k+1}, ἐντός τοῦ ὁποίου θεωροῦμεν ὅτι κινούμεθα κατά μίαν πορείαν ε πρός τό σημεῖον O, ὡς φαίνεται καί εἰς τό Σχῆμα 1. Μέ ἄλλας λέξεις δέν ἔχει νόημα νά ὁμιλῶμεν περί συμπεριφορᾶς τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ παρά τό σημεῖον O, ἀλλά πρέπει νά ὁμιλῶμεν περί συμεριφορᾶς τῶν συναρτήσεων $\Phi_k(z)$ εἰς τούς διαφόρους σχηματιζομένους τομεῖς S_k μέ κοινήν κορυφήν τό σημεῖον O. Ἡ διάταξις λοιπόν τοῦ Σχήματος 1 πρέπει νά νοηθῇ ὡς διάταξις σφηνῶν S_k παρακειμένων ἀλλήλων, ὅσον βεβαίως ἀφορᾷ εἰς τήν εὕρεσιν τῆς συμπεριφορᾶς τῶν συναρτήσεων $\Phi_k(z)$ εἰς τήν περιοχήν τοῦ σημείου

Ο. Ἑκάστη τῶν συναρτήσεων $\Phi_k(z)$ δύναται νά ἔχῃ ἐντελῶς διάφορον συμπεριφοράν ἀπό τάς ὑπολοίπους παρά τό σημεῖον Ο, καίτοι ἅπασαι αἱ συναρτήσεις αὗται μακράν τοῦ σημείου Ο ἀποτελοῦν οὐσιαστικῶς μίαν καί τήν αὐτήν συνάρτησιν, τήν $\Phi(z)$, τῆς ὁποίας ἡ διάκρισις εἰς τάς συναρτήσεις $\Phi_k(z)$ ἐγένετο πρός διευκόλυνσιν τῆς ἐξετάσεως τῆς συμπεριφορᾶς της παρά τό σημεῖον Ο.

Πρός εὕρεσιν τῆς συμπεριφορᾶς τῶν συναρτήσεων $\Phi_k(z)$ εἰς τόν τομέα S_k καί παρά τό σημεῖον Ο, ἀρκεῖ νά θεωρηθῇ ὁ τομεύς S_k ὡς σφήν μέ πλευράς Oa_k καί Oa_{k+1} μέ ἐφαπτομένας εἰς τό σημεῖον Ο σχηματιζούσας γωνίας ϑ_k καί ϑ_{k+1} ἀντιστοίχως μετά τοῦ ἄξονος Ox, ὁπότε ἡ γωνία τῆς κορυφῆς τοῦ σφηνός δ_k θά εἶναι:

$$\delta_k = \vartheta_{k+1} - \vartheta_k \ . \tag{10}$$

Ἤδη ὑφίστανται τρεῖς δυναταί περιπτώσεις: Νά εἶναι δεδομέναι καί ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τοῦ σφηνός Oa_k^+ καί Oa_{k+1}^- αἱ τάσεις ἤ νά εἶναι δεδομέναι αἱ μετατοπίσεις ἤ ἐπί τῆς μιᾶς πλευρᾶς νά εἶναι δεδομέναι αἱ τάσεις καί ἐπί τῆς ἑτέρας αἱ μετατοπίσεις. Τό ποία ἐκ τῶν τριῶν τούτων δυνατῶν περιπτώσεων ὑφίσταται εἰς ἕκαστον τομέα S_k ἐν συνδυασμῷ μέ τό μέτρον δ_k τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς αὐτοῦ χαρακτηρίζουν πλήρως τήν συμπεριφοράν τῆς συναρτήσεως $\Phi_k(z)$ παρά τό σημεῖον Ο. Ἡ συμπεριφορά αὕτη ἔχει διερευνηθῆ εἰς πᾶσαν περίπτωσιν καί ἐκτίθεται μετά πλήρους σειρᾶς παραπομπῶν εἰς τήν διπλωματικήν ἐργασίαν τοῦ γράφοντος {ΙΩΑΚΕΙΜΙΔΗΣ, 1973, Κεφ. Α} καί ὑπό πλέον συνεπτυγμένην μορφήν εἰς τό ἄρθρον τοῦ THEOCARIS {1974}. Ἀξίζει νά σημειωθῇ ἐνταῦθα μόνον τό γεγονός ὅτι διά γωνίαν τομέως $\delta_k = 2\pi$, ὁπότε κατ' οὐσίαν τό σημεῖον Ο εἶναι ἁπλῶς τό πέρας μιᾶς μόνης ρωγμῆς, ἡ συνάρτησις $\Phi_k(z)$ παρουσιάζει διά τάς περιπτώσεις τοῦ πρώτου καί τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος ἰδιομορφίαν τάξεως (-1/2), ἐν συμφωνίᾳ, λόγῳ καί τοῦ τύπου τοῦ PLEMELJ (Α1.8α), μέ τά ἐν ἀρχῇ τοῦ παρόντος τμήματος ἀναφερθέντα.

Δυνάμεθα οὕτω νά προσδιορίσωμεν πλήρως τάς ἰδιομορφίας τῶν συναρτήσεων $\Phi_k(z)$ εἰς τούς τομεῖς S_k ἀντιστοίχως καί παρά τό σημεῖον O, ἐφ' ὅσον βεβαίως ὑφίστανται τοιαῦται ἰδιομορφίαι, ὁπότε διά τήν συνάρτησιν $\varphi(t_k)$ ἐπί τῶν σημείων t_k τῆς ρωγμῆς Oa_k θά ἔχωμεν βάσει τοῦ τύπου (A1.8α):

$$\varphi(t_k) = \Phi_k(t_k) - \Phi_{k-1}(t_k). \tag{11}$$

Προφανῶς ἡ ἰδιομορφία τῆς συναρτήσεως $\varphi(t_k)$ παρά τό σημεῖον O θά χαρακτηρίζεται, ἐφ' ὅσον ὑπάρχει, ὑπό τῆς ἰδιομορφίας ἀπολύτως ἀνωτέρας τάξεως μεταξύ τῶν παρουσιαζομένων ἰδιομορφιῶν ὑπό τῶν συναρτήσεων $\Phi_k(z)$ καί $\Phi_{k-1}(z)$ παρά τό σημεῖον O.

Ἐφ' ὅσον ἔχουν κατά ταῦτα προσδιορισθῆ αἱ ἰδιομορφίαι τῶν συναρτήσεων $\varphi(t_k)$ παρά τό σημεῖον O καί ἐπί μιᾶς ἑκάστης τῶν ρωγμῶν Oa_k, εἶναι δυνατή ἀκολούθως ἡ ἀντιμετώπισις τοῦ ὅλου προβλήματος τῶν συντρεχουσῶν ρωγμῶν τοῦ Σχήματος 1, τῶν ὁποίων προφανῶς εἰδικήν περίπτωσιν ἀποτελεῖ ἡ ρωγμή μετά γωνιακοῦ σημείου, κατά τά ἀναφερθέντα εἰς τό τμῆμα A1, ἔνθα ὡς ρωγμή L δέον πλέον ὅπως νοῆται τό σύστημα τῶν συντρεχουσῶν ρωγμῶν.

Ἀξίζει νά παρατηρηθῇ εἰς τό σημεῖον τοῦτο ὅτι, ὡς διεπιστώθη ὑπό τοῦ ENGLAND {1971B}, ὁσονδήποτε μικρά καί ἄν εἶναι ἡ γωνία δ_k ἑνός τῶν σχηματιζομένων μεταξύ δύο διαδοχικῶν ρωγμῶν τοῦ Σχήματος 1 σφηνῶν, ὑπάρχει μεγάλη πιθανότης ἡ ἀντίστοιχος μιγαδική συνάρτησις $\Phi_k(z)$ νά παρουσιάζῃ παρά τήν κορυφήν O τοῦ σφηνός λογαριθμικήν ἰδιομορφίαν. Οὕτω κατά τόν τύπον (11) εἶναι πιθανώτατον ἡ συνάρτησις $\varphi(t)$ νά παρουσιάζῃ παρά τό σημεῖον O καί ἐφ' ἑκάστης ρωγμῆς λογαριθμικάς ἰδιομορφίας. Εἰς ἣν περίπτωσιν ἡ γωνία δ_k ὑπερβῇ τάς 180°, τότε ἡ συνάρτησις $\Phi_k(z)$ παρουσιάζει πέραν τῆς λογαριθμικῆς ἰδιομορφίας καί ἀπολύτως μεγαλυτέρας τάξεως ἰδιομορφίας, μέχρι καί $(-1/2)$ διά $\delta_k = 360^\circ$, ὡς ἀνεφέρθη καί εἰς τήν ἀρχήν τοῦ παρόντος τμήματος.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Τό ἐξετασθέν εἰς τό τμῆμα τοῦτο πρόβλημα τῆς παρουσιαζούσης γωνιακά σημεῖα ρωγμῆς ἤ τῶν συντρεχουσῶν εἰς ἓν σημεῖον ρωγμῶν δέν ἔχει μελετηθῆ μέχρι σήμερον εἰς τήν γενικήν του περίπτωσιν. Εἰδικαί περιπτώσεις τοῦ προβλήματος τούτου ἀφορῶσαι εἰς συγκεκριμένας διατάξεις ρωγμῶν ἐξετάζονται εἰς τάς ἐφαρμογάς Δ4, Δ5 καί Δ8, ἔνθα δίδονται καί αἱ ἀντίστοιχοι παραπομπαί.

Περισσοτέρας προσοχῆς ἔτυχε τό πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς τάξεως τῆς ἰδιομορφίας τῆς μιγαδικῆς συναρτήσεως Φ(z) παρά τό ἄκρον σφηνός ἤ, ὅπερ ταύτό, πλησίον γωνιακοῦ τινος σημείου παρουσιαζομένου εἰς τό ὅριον ἐνός μέσου. Ἡ καλυτέρα ἀντιμετώπισις τοῦ προβλήματος τούτου διά τήν περίπτωσιν τοῦ ἁπλοῦ σφηνός ἐγένετο ὑπό τοῦ ENGLAND {1971}. Πλέον σύνθετοι περιπτώσεις ἀφορῶσαι καί εἰς πολύσφηνα μετά ἤ ἄνευ ἐλευθέρων ὁρίων ἐξητάσθησαν ὑπό τοῦ TSAMASFYROS {1973}, τό δέ γενικόν πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς τάξεως τῆς ἰδιομορφίας παρά ἓν ἀνώμαλον σημεῖον ἐνός ἰσοτρόπου ἤ ἀνισοτρόπου μέσου ἤ καί συνθέτου μέσου ἐξ ἰσοτρόπων καί ἀνισοτρόπων μέσων μετά ἤ ἄνευ ἐλευθέρου ὁρίου ἐμελετήθη ὑπό τοῦ ΙΩΑΚΕΙΜΙΔΗ {1973, Κεφ. Α }, ἔνθα ἀναφέρονται καί ὅλαι αἱ σχετικαί ἐργασίαι αἱ γενόμεναι ἐπί εἰδικῶν περιπτώσεων τοῦ γενικοῦ τούτου προβλήματος. Ἡ εἰδικωτέρα περίπτωσις ὑπάρξεως περί τό ἀνώμαλον σημεῖον μόνον ἰσοτρόπων μέσων ἐμελετήθη ὑπό τοῦ THEOCARIS {1974}.

B8. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΩΝ ΜΕΣΩΝ - ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ

Τά ἐξετασθέντα προβλήματα εἰς τό Κεφάλαιον τοῦτο ἀφεώρων ἅπαντα εἰς ἰσότροπα μέσα. Τοῦτο ἐγένετο, καθ' ὅσον τά ἰσότροπα μέσα εἶναι τά συχνότερον ἀπαντώμενα εἰς τήν πρᾶξιν. Ἐν τούτοις ἡ ἀντιμετώπισις τῶν ἀντιστοίχων προβλημάτων διά τά ἀνισότροπα μέσα εἶναι ἀρκετά εὔκολος, ἐφ' ὅσον ἡ λύσις των διά τά ἰσότροπα μέσα εἶναι γνωστή. Διά τά ἀνισότροπα μέσα θά χρησιμοποιηθοῦν αἱ μιγαδικαί συναρτήσεις $\Phi(z_1)$ καί $\Psi(z_2)$, ἐνῷ διά τά ἰσότροπα μέσα ἐχρησιμοποιήθησαν αἱ μιγαδικαί συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$. Ἡ χρῆσις εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἀνισοτρόπων μέσων δύο μιγαδικῶν μεταβλητῶν, τῶν z_1 καί z_2, ἔναντι μιᾶς μόνον χρησιμοποιουμένης μιγαδικῆς μεταβλητῆς, τῆς z, εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἰσοτρόπων μέσων καθιστᾷ ἀσφαλῶς πολυπλοκωτέρους τούς τύπους διά τά ἀνισότροπα μέσα ὡς καί τάς ἰδιομόρφους ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις, εἰς τάς ὁποίας τελικῶς δύνανται νά ἀναχθοῦν τά προβλήματα ρωγμῶν ἐντός ἀνισοτρόπων μέσων, ὄχι ὅμως καί δυσκολωτέρους κατά τήν ἀνεύρεσίν των. Ἀντιθέτως ὅμως ἡ ὕπαρξις τῆς παραγώγου τῆς μιγαδικῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ εἰς τούς χρησιμοποιουμένους εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἰσοτρόπων μέσων τύπους ἀποτελεῖ συνεχῆ δυσχέρειαν κατά τήν ἐπίλυσιν ἑνός προβλήματος ρωγμῶν ἐντός ἑνός ἰσοτρόπου μέσου, ἥτις δυσχέρεια παύει ὑφισταμένη κατά τήν ἀντιμετώπισιν τοῦ αὐτοῦ προβλήματος ρωγμῶν ἐντός ὅμως ἀνισοτρόπου μέσου. Μία σύγκρισις τῶν ἀναπτύξεων τῶν τμημάτων A1 καί A8 καί ἔτι περισσότερον τῶν A2 καί A9, ὅπου τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα δι' ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐπιλύεται κατά δύο διαφόρους τρόπους τόσον διά τήν περίπτωσιν ἰσοτρόπου μέσου (τμήματα A1 καί A2) ὅσον καί διά τήν περίπτωσιν ἀνισοτρόπου μέσου (τμήματα A8 καί A9), ἀποτελεῖ τήν καλυτέραν ἀπόδειξιν τῶν ἀνωτέρω ἰσχυρισμῶν.

Ὅσον ἀφορᾷ ἐξ ἄλλου εἰς τό γεγονός ὅτι εἰς τό Κεφάλαιον τοῦτο ἐξητάσθησαν μόνον αἱ περιπτώσεις τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος, δύναται νά παρατηρηθῇ ὅτι αἱ μέν περιπτώ-

σεις τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος ἡμποροῦν νά ἀντιμετωπισθοῦν κατ' ἐντελῶς ἀνάλογον τρόπον, ὁπότε θά προκύψουν τελικῶς καί ἀρκετά ἀνάλογοι ἰδιόμορφοι ὁλοκληρωτικαί ἐξισώσεις, αἱ δέ περιπτώσεις τοῦ μικτοῦ θεμελιώδους προβλήματος, καίτοι παρουσιάζουν ὡρισμένας ἰδιομορφίας, ἐν τούτοις δύνανται ὡσαύτως εὐχερῶς νά ἀντιμετωπισθοῦν. Δέον ἐν προκειμένῳ νά ληφθῇ ἐπίσης ὑπ' ὄψιν ὅτι εἰς τά τμήματα Α6 καί Α7 ἐκτίθενται οἱ τρόποι ἀντιμετωπίσεως τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος καί τοῦ μικτοῦ θεμελιώδους προβλήματος ἀντιστοίχως δι' ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου, οἵτινες νομίζομεν ὅτι ἡμποροῦν εὐκόλως νά γενικευθοῦν, ὥστε νά καλύψουν καί τά ἐξετασθέντα εἰς τό παρόν Κεφάλαιον προβλήματα, παρ' ὅλον ὅτι συνήθως τίθεται πρός ἐπίλυσιν εἰς συγκεκριμένας ἐφαρμογάς τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα, διά τό ὁποῖον καί προετιμήσαμεν νά δώσωμεν τάς λύσεις εἰς πιθανάς νά παρουσιασθοῦν ἐφαρμογάς.

Δύναται τέλος νά παρατηρηθῇ ὅτι διά συνθέσεως τῶν λύσεων τῶν ἐξετασθέντων εἰς τό Κεφάλαιον τοῦτο προβλημάτων δύνανται εὐχεράστατα νά ἀντιμετωπισθοῦν ἔτι πολυπλοκώτερα προβλήματα, ὡς πολλαί ρωγμαί ἐντός πεπερασμένου μέσου, ρωγμή ἐντός ἐγκλείσματος ἐντός πεπερασμένου μέσου κ.ο.κ..Δέν ἠθελήσαμεν νά δώσωμεν γενικούς τύπους καί ἰδιομόρφους ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις διά τά προβλήματα ταῦτα, καθ' ὅσον θά ἦσαν λίαν πολυπλόκου μορφῆς καί δυσνόητοι. Προετιμήσαμεν ἀντιθέτως νά ἀναλύσωμεν ταῦτα εἰς τά συγκεκριμένα προβλήματα ρωγμῶν, τῶν ὁποίων ἀποτελοῦν ἁπλῶς σύνθεσιν, θέλοντες νά πιστεύωμεν ὅτι ἡ ἀντιμετώπισις παντός προβλήματος ρωγμῶν εἶναι εὐχερής μέ βάσιν τά ἐνταῦθα ἀναφερόμενα.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Θεωροῦμεν σκόπιμον νά ἀναφέρωμεν ἐνταῦθα ὡρισμένας ἐργασίας ἀφορώσας εἰς σύνθετα προβλήματα ρωγμῶν, τά ὁποῖα δέν δύνανται νά ὑπαχθοῦν εἰς τάς μελετηθείσας εἰς τά προηγούμενα τμήματα τοῦ παρόντος Κεφαλαίου περιπτώσεις συνθέτων προβλημάτων ρωγμῶν.

Ἓν τοιοῦτο πρόβλημα εἶναι τό πρόβλημα τῆς ἀλληλεπιδράσεως μεταξύ εὐθυγράμμου ρωγμῆς καί κυκλικοῦ ἰσοτρόπου ἐγκλείσματος ἀμφοτέρων εὑρισκομένων ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου μέ ἐλαστικάς σταθεράς ἐν γένει διαφόρους τῶν τοῦ ἐγκλείσματος. Τό πρόβλημα τοῦτο ἀντεμετώπισεν ὁ ATKINSON {1972} διά χρήσεως τῆς μεθόδου τῶν μεταστάσεων καί ἀναγωγῆς του εἰς ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν, ὁ R. R. BHARGAVA {1973} διά χρήσεως τῆς μεθόδου τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν Φ(z) καί Ψ(z) καί ἀναπτύξεως τούτων εἰς σειράς, οἱ R. D. BHARGAVA and R. R. BHARGAVA {1973}, ἐργασθέντες διά τῆς αὐτῆς μεθόδου, θεωρήσαντες ὅμως δύο συμμετρικῶς περί τό ἔγκλεισμα ὑφισταμένας ρωγμάς, καί οἱ ERDOGAN , GUPTA and RATWANI {1974}, οἵτινες ἐργασθέντες διά τῆς μεθόδου τῶν μεταστάσεων καί θεωρήσαντες τυχόντος σχήματος ρωγμήν ἀνήγαγον τό ὅλον πρόβλημα εἰς ἓν σύστημα ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων.

Τό πρόβλημα τῆς ὑφισταμένης ἐντός ἀπείρου μέσου συντιθεμένου ἐξ ἰσοτρόπων καί ἀπείρων λωρίδων ρωγμῆς ἐμελέτησαν εἰς διαφόρους δυναμένας νά παρουσιασθοῦν περιπτώσεις οἱ ERDOGAN and GUPTA {1971}, οἱ COOK and ERDOGAN {1972}, ὁ ASHBAUGH {1973}, ὁ BOGY {1973} καί οἱ ERDOGAN and AKSOGAN {1974}. Ὡσαύτως οἱ ERDOGAN and BIRICIKOGLU {1973} ἐθεώρησαν τήν ρωγμήν τέμνουσαν τό εὐθύγραμμον ὅριον τό σχηματιζόμενον μεταξύ δύο ἰσοτρόπων λωρίδων τοῦ ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου, οἱ δέ ERDOGAN and GUPTA {1971} ἐθεώρησαν τήν ρωγμήν κειμένην ἐπί τοῦ ὁρίου τούτου. Τά ἀνωτέρω προβλήματα ἀντεμετωπίσθησαν δι' ἀναγωγῆς των εἰς ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις καί συνήθως μάλιστα εἰς ἰδιομόρφους ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις τῇ χρήσει τῆς μεθόδου τῶν μεταστάσεων ἤ τῶν μεθόδων τῶν ὁλοκληρωτικῶν μετασχηματισμῶν.

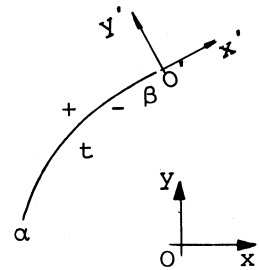
Πολλαί ἐργασίαι ὡσαύτως ἀφοροῦν εἰς διάφορα προβλήματα ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου μήκους λωρίδων ἐξ ἰσοτρόπου μέσου. Μέ τοιαῦτα προβλήματα ἠσχολήθησαν μεταξύ τῶν ἄλλων καί ὁ LAKSHMIKANTHAM {1973}, οἱ PETERSON , PRASAD and CHATTERJEE {1973} καί οἱ GUPTA and ERDOGAN {1974}. Ἐπίσης οἱ DMOWSKA

and KOSTROV {1973} ἐμελέτησαν τό πρόβλημα τῆς διατμητικῶς φορτιζομένης καί καταληγούσης ἐπί τοῦ εὐθυγράμμου ὁρίου ἡμιαπείρου ἰσοτρόπου μέσου ρωγμῆς διά χρήσεως τῆς μεθόδου τῶν μεταστάσεων καί ἀναγωγῆς του εἰς ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν.

Μεταξύ τῶν ἐργασιῶν τῶν ἀφορωσῶν εἰς εὐθυγράμμους ρωγμάς ἐντός ἀνισοτρόπων μέσων δύνανται νά ἀναφερθοῦν αἱ ἐργασίαι τοῦ ΙΩΑΚΕΙΜΙΔΗ {1973, §11, 13 καί 14}, ὅπου ἐπιλύεται τό πρόβλημα τῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου ἤ μεταξύ δύο ἡμιαπείρων ἀνισοτρόπων μέσων ἤ καί μεταξύ ἑνός ἡμιαπείρου ἀνισοτρόπου μέσου καί ἑνός ἡμιαπείρου ἰσοτρόπου μέσου διά τάς περιπτώσεις καί τῶν τριῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων καί δίδεται ἐπίσης πλήρης σειρά σχετικῶν παραπομπῶν, καί τοῦ SNYDER {1973}, ὅστις μελετᾷ τό πρόβλημα τῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς ἐντός πεπερασμένου ἀνισοτρόπου μέσου ἀνάγων τοῦτο εἰς ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν ἐπί τοῦ ἐξωτερικοῦ ὁρίου τοῦ πεπερασμένου ἀνισοτρόπου μέσου.

Θά ἠδυνάμεθα νά ἀναφέρωμεν καί πολλάς ἀκόμη ἐργασίας ἀφορώσας εἰς συγκεκριμένα προβλήματα ρωγμῶν. Ἐν τούτοις δέν θεωροῦμεν σκόπιμον νά πράξωμεν τοῦτο, ἀφ' ἑνός μέν λόγῳ τοῦ ὅτι θά ἀπῃτοῦντο πολλαί σελίδες διά τήν παράθεσίν των, ἀφ' ἑτέρου δέ διότι μία τοιαύτη παράθεσις, μεθ' ὅσης προσοχῆς καί ἄν ἐγίνετο, ὁπωσδήποτε θά ἦτο ἐλλιπής. Πιστεύομεν πάντως ὅτι αἱ διδόμεναι εἰς τήν παροῦσαν διατριβήν παραπομπαί καί ἀφορῶσαι εἰς προβλήματα ρωγμῶν καλύπτουν τάς κυριωτέρας ἐκ τῶν δημοσιευθεισῶν ἐργασιῶν ἐπί τῶν προβλημάτων τούτων.

B9. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΑΙ ΕΝΤΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ



Σχῆμα 1

Θεωροῦμεν ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἰσοτρόπου μέσου, ὡς εἰς τό Σχῆμα 1, καί σύστημα συντεταγμένων Oxy, ὡς πρός τό ὁποῖον τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς εἶναι τά σημεῖα α καί β, t δέ τυχόν σημεῖον τῆς ρωγμῆς. Εἰς τό ἄκρον β τῆς ρωγμῆς θεωροῦμεν ἕτερον σύστημα συντεταγμένων O'x'y' μέ κέντρον O' τό σημεῖον β καί ἄξονα O'x' κατά τήν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς ρωγμῆς εἰς τό σημεῖον β καί κατά τήν προέκτασιν ταύτης. Ἐάν θέσωμεν:

$$z = x+iy, \quad z' = x'+iy' \tag{1}$$

καί θεωρήσωμεν τό μέσον, ἐντός τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται ἡ ρωγμή φορτιζόμενον τόσον ἐπί τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς ὅσον καί πέραν τῆς ρωγμῆς κατά συγκεκριμένον τρόπον, τό οὕτω προκύπτον ἐλαστικόν πρόβλημα θά ἔχῃ λύσιν χαρακτηριζομένην ὑπό τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$. Ἐκ τούτων μᾶς ἐνδιαφέρει διά τόν ὁρισμόν τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων μόνον ἡ $\Phi(z)$.

Ἐάν ἤδη θεωρήσωμεν τήν γωνίαν θ, ἥντινα σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη O'x' εἰς τό ἄκρον β τῆς ρωγμῆς μετά τοῦ ἀρχικοῦ ἄξονος Ox, τότε μεταξύ τῶν κατά τούς τύπους (1) ὁρισθεισῶν μιγαδικῶν μεταβλητῶν z καί z' θά ἰσχύῃ ἡ προφανής σχέσις:

$$z = \beta+z'e^{i\theta}. \tag{2}$$

Ἐκ τῆς μιγαδικῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ προκύπτει εἰς τό σύστημα συντεταγμένων O'x'y' ἡ μιγαδική συνάρτησις $\tilde{\Phi}(z')$ ὁριζομένη ὡς:

$$\tilde{\Phi}(z') = \Phi(\beta+z'e^{i\theta}) = \Phi(z) \tag{3}$$

λόγῳ τῆς σχέσεως (2).

Ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$, ὡς καί ἡ ἴση της $\tilde{\Phi}(z')$, παρουσιάζει

ἐν γένει ἰδιομορφίας εἰς τά ἄκρα α καί β τῆς ρωγμῆς. Παρά τό ἄκρον β δυνάμεθα νά θέσωμεν:

$$4\lim_{z'\to 0}\tilde{\Phi}(z') = \sqrt{2}kz'^{-1/2}. \tag{4}$$

Ὁ συντελεστής k, ἐν γένει μιγαδικός, ὅστις παριστᾷ τήν ἔντασιν τῆς ἰδιομορφίας τῆς συναρτήσεως $\tilde{\Phi}(z')$ παρά τό ἄκρον τῆς ρωγμῆς β, εἶναι ὁ καλούμενος συντελεστής ἐντάσεως τῶν τάσεων παρά τό ἄκρον β τῆς ρωγμῆς {SIH, PARIS,ERDOGAN,1962}. Λαμβάνοντες πράγματι ὑπ'ὄψιν τόν τύπον:

$$\sigma_x+\sigma_y = \sigma_{x'}+\sigma_{y'} = 4Re\Phi(z) = 4Re\tilde{\Phi}(z'), \tag{5}$$

εὑρίσκομεν ἐκ τῆς σχέσεως (4):

$$\sigma_x+\sigma_y = \sigma_{x'}+\sigma_{y'} = Re\left\{k\left(\frac{2}{z}\right)^{1/2}\right\}, \tag{6}$$

ἡ ὁποία ἰσότης δικαιολογεῖ ἀσφαλῶς τήν ὀνομασίαν τοῦ συντελεστοῦ k.

Ὁ μετασχηματισμός μιγαδικῶν συντεταγμένων (2), ἐν συνδυασμῷ μέ τάς σχέσεις (3) καί (4), ἐπιτρέπει τήν εὕρεσιν ἐκφράσεως ἀντιστοίχου τῆς (4) διά τήν συμπεριφοράν τῆς συναρτήσεως Φ(z) περί τό σημεῖον β, ἥτις εἶναι τῆς μορφῆς:

$$4\lim_{z\to\beta}\Phi(z) = \sqrt{2}e^{i\frac{\theta}{2}}k(z-\beta)^{-1/2}. \tag{7}$$

Ἤδη ἡ σχέσις (6) λαμβάνει τήν μορφήν:

$$\sigma_x+\sigma_y = Re\left\{e^{i\frac{\theta}{2}}\,k\left(\frac{2}{z-\beta}\right)^{1/2}\right\}. \tag{8}$$

Γνωρίζοντες οὕτω τήν συνάρτησιν Φ(z) ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ ἐλαστικοῦ προβλήματος, δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν τόν μιγαδικόν συντελεστήν ἐντάσεως τῶν τάσεων k βάσει τοῦ τύπου:

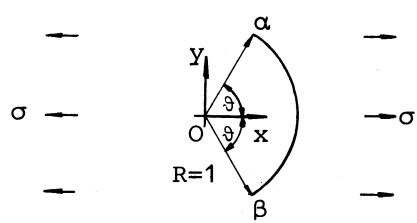
$$k = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\theta}{2}}\lim_{z\to\beta}\{(z-\beta)^{1/2}\Phi(z)\} \tag{9}$$

προκύπτοντος ἐκ τοῦ (7).

Ἀναλύοντες τόν μιγαδικόν συντελεστήν ἐντάσεως τῶν τάσεων k εἰς τό πραγματικόν καί τό φανταστικόν μέρος αὐτοῦ ἔχομεν:

$$k = k_1 - ik_2. \tag{10}$$

Οἱ πραγματικοί πλέον ἀριθμοί k_1 καί k_2 εἶναι οἱ γνωστοί συντελεσταί ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τό ἄκρον β τῆς ρωγμῆς. Διά διαφόρους περιπτώσεις ρωγμῶν καί φορτίσεων αὐτῶν πίνακες καί διαγράμματα συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων δύναται νά ἀνεύρῃ τις π.χ. εἰς τό βιβλίον τῶν TADA,PARIS and IRWIN {1973} μετά πλείστων παραπομπῶν καλυπτουσῶν ὅλας σχεδόν τάς μέχρι τότε σχετικάς ἐργασίας. Ἐνταῦθα ἡμεῖς θά δώσωμεν ἀπλῶς ἓν παράδειγμα εὑρέσεως τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων k_1 καί k_2, συγκεκριμένως δέ θά εὕρωμεν τούς συντελεστάς ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα ρωγμῆς σχήματος τόξου κύκλου εἰς ἄπειρον ἰσότροπον μέσον μέ φόρτισιν ἐφελκυστικήν εἰς τό ἄπειρον κατά διεύθυνσιν κάθετον ἐπί τήν ρωγμήν ὡς εἰς τό παραπλεύρως Σχῆμα 2. Τό σύστημα συντεταγμένων Oxy ἔχει κέντρον O τό κέντρον τοῦ κύκλου καί ἄξονα Ox τόν ἄξονα συμμετρίας τῆς σχήματος τόξου ρωγμῆς συμπίπτοντα ταυτοχρόνως μέ τήν διεύθυνσιν τῆς ἐφελκυστικῆς τάσεως σ εἰς τό ἄπειρον. Ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου εἶναι R=1, ἡ δέ γωνία τοῦ τόξου, τό ὁποῖον ἀποτελεῖ τήν ρωγμήν 2θ. Σημειοῦται ὅτι ὀρθήν ἔκφρασιν τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων διά τήν περίπτωσιν ταύτην δέν ἐπετύχομεν νά εὕρωμεν εἰς τάς διατιθεμένας σχετικάς ἐργασίας.



Σχῆμα 2

Ἡ συνάρτησις Φ(z) διά τήν ἐξεταζομένην περίπτωσιν ρωγμῆς δύναται νά εὑρεθῇ διά τῆς ἀναπτυσσομένης θεωρίας εἰς τό βιβλίον τοῦ MUSKHELISHVILI {1953, §124a}. Οὕτως ἐκ τῶν τύπων (124.12α) εὑρίσκομεν (μέ α=0):

$$\Gamma = \frac{\sigma}{4}\ , \quad \Gamma' = -\frac{\sigma}{2}, \tag{11}$$

ἐκ τοῦ τύπου (124.10α):

$$C_o = \frac{\sigma(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2})}{2(1+\sin^2\frac{\theta}{2})} \tag{12}$$

καί ἐκ τῶν τύπων (124.7α) λόγῳ καί τῶν (11):

$$D_2 = -\frac{\sigma}{2}\ , \quad D_1 = \frac{\sigma}{2}\cos\theta. \tag{13}$$

Ἤδη ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$ διδομένη ὑπό τοῦ τύπου (124.2α) λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν καί τῶν τύπων (124.4α) καί (124.11α) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\Phi(z) = \frac{\sigma}{4\sqrt{z^2-2z\cos\theta+1}}\left\{\frac{1-\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{1+\sin^2\frac{\theta}{2}}(z-\cos\theta)+\frac{2\cos\theta-1}{z^2}\right\} +$$

$$+\frac{D_o}{2} - \frac{\sigma}{2z^2}\ . \tag{14}$$

Οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι, οἵτινες δέν παρουσιάζουν ἰδιομορφίας παρά τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς, δέν ἐπηρεάζουν προφανῶς τήν βάσει τοῦ τύπου (9) εὑρεθησομένην τιμήν τοῦ μιγαδικοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων k. Θεωροῦμεν τό ἄκρον τῆς ρωγμῆς: $\beta = e^{-i\theta}$. Ἡ ἐφαπτομένη τῆς ρωγμῆς εἰς τό ἄκρον τοῦτο μέ διεύθυνσιν πρός τήν προέκτασιν τῆς ρωγμῆς σχηματίζει γωνίαν: $-(\theta+\frac{\pi}{2})$ μετά τοῦ ἄξονος Ox. Ἤδη, λόγῳ καί τῆς ἐκφράσεως (14) τῆς μιγαδικῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου (9) τήν ἐξῆς ἔκφρασιν τοῦ μιγαδικοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων k:

$$k = \frac{\sigma e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}}{2\sqrt{-i\sin\theta}}\left\{\frac{1-\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{1+\sin^2\frac{\theta}{2}}(-i\sin\theta)+(\cos\theta+i\sin\theta)\cos\theta-\right.$$

$$\left.-(\cos^2\theta-\sin^2\theta+2i\cos\theta\sin\theta)\right\}. \tag{15}$$

Ἡ ἔκφρασις (15) ἀπλοποιουμένη λαμβάνει τήν κάτωθι μορφήν:

$$k = k_1 - ik_2 = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\sin\theta}\left\{\frac{1-\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{1+\sin^2\frac{\theta}{2}}\, e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{3\theta}{2}}\right\}, \qquad (16)$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτουν αἱ ἐκφράσεις τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων ὡς:

$$k_1 = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\sin\theta}\left\{\frac{1-\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{1+\sin^2\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2}\right\}, \qquad (17\alpha)$$

$$k_2 = -\frac{\sigma}{2}\sqrt{\sin\theta}\left\{\frac{1-\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{1+\sin^2\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\right\}. \qquad (17\beta)$$

Ἀριθμητικήν ἐφαρμογήν στηριζομένην εἰς τό παράδειγμα τοῦτο θά εὕρωμεν εἰς τήν ἐφαρμογήν Δ7.

Ἐνταῦθα θά προσπαθήσωμεν νά εὕρωμεν ἑτέρας ἐκφράσεις τοῦ μιγαδικοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων k ὡς καί τῶν πραγματικῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων k_1 καί k_2, πέραν τῆς (9), συνδεούσας τά μεγέθη ταῦτα μέ τήν συνάρτησιν μεταστάσεων g(t), ἥτις ὡρίσθη εἰς τό τμῆμα A1, καί ἄλλων προκυπτουσῶν ἐξ αὐτῆς συναρτήσεων.

Ἡ μιγαδική συνάρτησις Φ(z) προκύπτουσα ἐκ τῆς ἐπιλύσεως ἑνός προβλήματος ρωγμῆς δίδεται κατά τά ἐκτεθέντα εἰς τό τμῆμα A1 ὑπό ἑνός ὁλοκληρώματος CAUCHY τῆς μορφῆς (A1.7) ἐκτεινομένου ἐπί τῆς ρωγμῆς L, ἐάν δέν ὑφίστανται ἕτερα ὅρια τοῦ σώματος, γενικώτερον δέ ἐφ'ὅλων τῶν ὁρίων τοῦ σώματος (ρωγμῶν καί μή) κατά τά ἐκτεθέντα εἰς τό Κεφάλαιον B (τμήματα B1-B6). Ἐνταῦθα μᾶς ἐνδιαφέρει τό τμῆμα τοῦ ὁλοκληρώματος (A1.7) τό προερχόμενον ἐξ ὁλοκληρώσεως μόνον ἐπί τῆς ρωγμῆς L, εἰς τά ἄκρα τῆς ὁποίας ἐπιθυμοῦμεν νά εὕρωμεν τούς συντελεστάς ἐντάσεως τῶν τάσεων καί δή κατά τόν τύπον (9) διά τό ἄκρον β, πέρας τῆς ρωγμῆς, ὡς καί διά τό ἄκρον

α, ἀρχήν τῆς ρωγμῆς, ἀρκεῖ νά τεθῇ α ἀντί β καί νά ληφθῇ ὡσαύτως ὑπ'ὄψιν ὁ ἀντίστοιχος ὁρισμός τῆς γωνίας θ εἰς τό ἄκρον α τῆς ρωγμῆς.

Ἡ συνάρτησις φ(t), πυκνότης τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY, δύναται κατά τόν τύπον (A1.27) νά θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα δύο συναρτήσεων: τῆς συναρτήσεως δυνάμεων f(t) καί τῆς συναρτήσεως μεταστάσεων g(t).

Ἐκ τούτων ἡ πρώτη f(t) δέν παρουσιάζει προφανῶς ἰδιάζουσαν συμπεριφοράν παρά τά ἄκρα α καί β τῆς ρωγμῆς L. Ἀντιθέτως ἡ δευτέρα g(t) προκύπτουσα δι'ἐπιλύσεως τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (A1.30) παρουσιάζει ἰδιάζουσαν συμπεριφοράν παρά τά ἄκρα α καί β τῆς ρωγμῆς τῆς μορφῆς:

$$g(t) = i\{(\beta-t)(t-\alpha)\}^{-1/2}\nu(t), \tag{18}$$

ἔνθα ν(t) συνάρτησις ὁμαλῶς μεταβαλλομένη ἐπί τῆς ρωγμῆς L καί ἀναλυομένη εἰς τό πραγματικόν καί τό φανταστικόν μέρος αὐτῆς ὡς ἐξῆς:

$$\nu(t) = \nu_1(t)+i\nu_2(t). \tag{19}$$

Ἤδη τό ὁλοκλήρωμα CAUCHY (A1.7) τό δίδον τήν συνάρτησιν Φ(z) δύναται νά γραφῇ ὡς ἐξῆς:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L i\{(\beta-t)(t-\alpha)\}^{-1/2}\frac{\nu(\tau)}{\tau-z}d\tau \tag{20}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει ἡ συμπεριφορά τῆς συναρτήσεως Φ(z) περί τό ἄκρον α τῆς ρωγμῆς {GAKHOV,1966,§8} ὡς:

$$\Phi(z) = -\frac{f(\alpha)}{2\pi i}\ln(z-\alpha)-i\frac{(\beta-z)^{-1/2}\nu(\alpha)}{2}(z-\alpha)^{-1/2}+ \\ + \Phi_1(z) \tag{21α}$$

καί περί τό ἄκρον β τῆς ρωγμῆς ὡς:

$$\Phi(z) = \frac{f(\beta)}{2\pi i}\ln(z-\beta)-i\frac{(z-\alpha)^{-1/2}\nu(\beta)}{2}(\beta-z)^{-1/2}+ \\ + \Phi_2(z), \tag{21β}$$

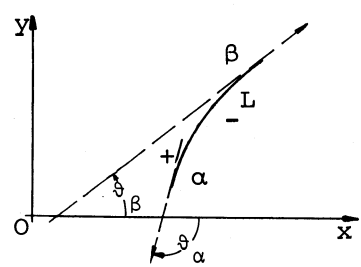
ἔνθα $\Phi_1(z)$ καί $\Phi_2(z)$ ἀναλυτικαί συναρτήσεις εἰς τάς περιοχάς τῶν ἄκρων α καί β τῆς ρωγμῆς ἀντιστοίχως.

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τάς ἐκφράσεις (21) τῆς συμπεριφορᾶς τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ περί τά ἄκρα α καί β τῆς ρωγμῆς, παρατηροῦμεν βάσει τοῦ τύπου (9) ὅτι ὁ μιγαδικός συντελεστής ἐντάσεως τῶν τάσεων k ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\nu(t)$ καί κατ'ἐπέκτασιν τῆς $g(t)$ λόγῳ τοῦ τύπου (18), οὐχί δ'ἐκ τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $f(t)$, ἥτις προφανῶς οὐδόλως συμβάλλει εἰς τήν τιμήν τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων k. Ἀναλυτικώτερον ὁ τύπος (9) λόγῳ τῶν ἐκφράσεων (21) δίδει:

$$k_\alpha = -i\sqrt{2}(\beta-\alpha)^{-1/2}e^{-i\frac{\vartheta_\alpha}{2}}\nu(\alpha),$$

$$k_\beta = -\sqrt{2}(\beta-\alpha)^{-1/2}e^{-i\frac{\vartheta_\beta}{2}}\nu(\beta) \tag{22}$$

διά τά ἄκρα α καί β τῆς ρωγμῆς ἀντιστοίχως, ἔνθα ϑ_α καί ϑ_β αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπό τῶν προεκτάσεων πέραν τῆς ρωγμῆς τῶν ἐφαπτομένων τῆς ρωγμῆς εἰς τά σημεῖα α καί β, ὡς εἰς τό Σχῆμα 3 φαίνεται.



Σχῆμα 3

Ἐάν $\vartheta(t)$ εἶναι ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης τῆς ρωγμῆς εἰς τό τυχόν σημεῖον t αὐτῆς μετά τοῦ ἄξονος Ox, τῆς διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης θεωρουμένης ἀπό τῆς ἀρχῆς α πρός τό πέρας β τῆς ρωγμῆς, τότε ἔχομεν:

$$\vartheta_\alpha = -\pi+\vartheta(\alpha) \ , \quad \vartheta_\beta = \vartheta(\beta), \tag{23}$$

ὁπότε οἱ τύποι (22) δύνανται νά γραφοῦν καί ὡς ἑξῆς:

$$k_\alpha = +\sqrt{2}(\beta-\alpha)^{-1/2}e^{-i\frac{\vartheta(\alpha)}{2}}\nu(\alpha) \ ,$$

$$k_\beta = -\sqrt{2}(\beta-\alpha)^{-1/2} e^{-i\frac{\vartheta(\beta)}{2}} \nu(\beta). \tag{24}$$

Ἐάν ἀντί τῆς συναρτήσεως $g(t)$ θεωρηθῇ γνωστή ἡ συνάρτησις:

$$\tilde{g}(t) = \frac{1}{i} g(t) = -ig(t), \tag{25}$$

τότε λόγῳ τοῦ ὁρισμοῦ (18) τῆς συναρτήσεως $\nu(t)$ θά ἔχωμεν:

$$\tilde{g}(t) = \{(\beta-t)(t-\alpha)\}^{-1/2}\nu(t). \tag{26}$$

Ἡ συνάρτησις $\nu(t)$ τῶν σχέσεων (18) καί (26) εἶναι πολλάς φοράς ἤ ὄντως θεωρουμένη ἄγνωστος συνάρτησις κατά τήν ἐπίλυσιν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (A1.30).

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τούς συντελεστάς ἐντάσεως τῶν τάσεων k_1 καί k_2 τοῦ τύπου (10), οὗτοι προκύπτουν ἐκ τῶν τύπων (24) διά τά ἄκρα α καί β τῆς ρωγμῆς ἀντιστοίχως ὡς ἐξῆς:

$$k_{1\alpha} = +\sqrt{2}(\beta-\alpha)^{-1/2}\left\{\nu_1(\alpha)\cos\frac{\vartheta(\alpha)}{2}+\nu_2(\alpha)\sin\frac{\vartheta(\alpha)}{2}\right\}, \tag{27α}$$

$$k_{2\alpha} = +\sqrt{2}(\beta-\alpha)^{-1/2}\left\{\nu_1(\alpha)\sin\frac{\vartheta(\alpha)}{2}-\nu_2(\alpha)\cos\frac{\vartheta(\alpha)}{2}\right\} \tag{27β}$$

καί ὡσαύτως:

$$k_{1\beta} = -\sqrt{2}(\beta-\alpha)^{-1/2}\left\{\nu_1(\beta)\cos\frac{\vartheta(\beta)}{2}+\nu_2(\beta)\sin\frac{\vartheta(\beta)}{2}\right\} \tag{28α}$$

$$k_{2\beta} = -\sqrt{2}(\beta-\alpha)^{-1/2}\left\{\nu_1(\beta)\sin\frac{\vartheta(\beta)}{2}-\nu_2(\beta)\cos\frac{\vartheta(\beta)}{2}\right\} \tag{28β}$$

ληφθείσης ὑπ'ὄψιν καί τῆς σχέσεως (19).

Ἐν συμπεράσματι δύναται νά λεχθῇ ὅτι διά τόν προσδιορισμόν τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα ρωγμῆς δέν ἀπαιτεῖται ἡ εὕρεσις τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ βάσει τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (20) παρά μόνον ἡ εὕρεσις τῆς συναρτήσεως $\nu(t)$ συνδεομένης διά τοῦ τύπου (18) μετά τῆς συναρτήσεως $g(t)$ τῆς παριστώσης τήν πυκνότητα τῶν μεταστάσεων κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς. Εἰς τό Κεφάλαιον Γ θά δώσωμεν μεθόδους ταχείας εὑρέσεως τῆς συναρτήσεως $\nu(t)$ ἰδίως εἰς τά ση-

μεῖα α καί β, χωρίς νά ἀπαιτῆται πολλάκις οὐδέ παρεμβολή διά τόν προσδιορισμόν τῶν ν(α) καί ν(β), προκυπτόντων τούτων εὐθύς ἐκ τῆς προσεγγιστικῆς ἐπιλύσεως τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (A1.30) ἤ ἄλλων ἰσοδυνάμων αὐτῆς.

Δυνάμεθα ἐπίσης νά παρατηρήσωμεν ὅτι πολλάς φοράς ἀντί νά προσδιορίσωμεν ὡς ἄγνωστον ἐπί τῆς ρωγμῆς συνάρτησιν τήν προαναφερθεῖσαν συνάρτησιν μεταστάσεων κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς g(t), προσδιορίζομεν τήν συνάρτησιν h(s) συνδεομένην μετά τῆς g(t) διά τῶν τύπων (A1.38). Φυσικῶς καί ἡ συνάρτησις h(s) παριστᾷ ὡς καί ἡ g(t) τήν πυκνότητα μεταστάσεων κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς μέ τήν διαφοράν ὅτι ἡ μέν g(t) ἐκφράζει τό πηλίκον τῶν μεταστάσεων ἐφ'ἑνός στοιχειώδους τμήματος dt τῆς ρωγμῆς διά τοῦ τμήματος τούτου dt, ἐνῷ ἡ h(s) ἐκφράζει τό πηλίκον τῶν μεταστάσεων ἐπί τοῦ αὐτοῦ στοιχειώδους τμήματος dt τῆς ρωγμῆς διά τοῦ ἀντιστοιχοῦντος στοιχειώδους τόξου ds εἰς τό στοιχειῶδες τοῦτο τμῆμα τῆς ρωγμῆς, ἰσχυουσῶν τῶν σχέσεων (A1.24).

Ἐάν $(2s_0)$ εἶναι τό συνολικόν μῆκος τῆς ρωγμῆς δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ὅτι εἰς τά ἄκρα α καί β τῆς ρωγμῆς ἀντιστοιχοῦν αἱ τιμαί τῆς μεταβλητῆς s, παριστώσης τό μῆκος τόξου κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς:

$$s(\alpha) = -s_0 \ , \quad s(\beta) = +s_0 \tag{29}$$

Ἤδη θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν h(s) ἐκφραζομένην συναρτήσει τῆς συναρτήσεως ξ(s) τῆς τελευταίας ὁριζομένης ὡς κάτωθι:

$$h(s) = \left\{(s(\beta)-s)(s-s(\alpha))\right\}^{-1/2}\xi(s), \tag{30}$$

ἀναλόγως πρός τόν ὁρισμόν τῆς συναρτήσεως ν(t) βάσει τῶν σχέσεων (18) καί (26) ἐκ τῆς συναρτήσεως g(t) ἤ τῆς $\tilde{g}(t)$. Ἡ συνάρτησις ξ(s) εἶναι ἀναλυτική κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς μή παρουσιάζουσα ἰδιομορφίας περί τά ἄκρα αὐτῆς, ἀκριβῶς ὡς καί ἡ προηγουμένως ὁρισθεῖσα συνάρτησις ν(t). Λόγῳ τῶν σχέσεων (29) ὁ ὁρισμός (30) τῆς συναρτήσεως ξ(s) ἀπλοποιεῖται

ὡς κάτωθι:

$$h(s) = (s_o^2-s^2)^{-1/2}\xi(s). \tag{31}$$

Ἤδη μή λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τήν συνάρτησιν δυνάμεων $f(t)$, ἥτις, ὡς προελέχθη, οὐδόλως ἐπιδρᾷ ἐπί τῶν συντελε - στῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων, δυνάμεθα νά γράψωμεν τήν ἔκφρασιν (20) τῆς μιγαδικῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ συναρτήσει τῶν συναρτήσεων $h(s)$ ἤ $\xi(s)$ λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τούς τύπους ὁρισμοῦ των (A1.38) καί (31) ὡς ἐξῆς:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-s_o}^{s_o}\frac{h(s)}{\tau-z}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{-s_o}^{s_o}(s_o^2-s^2)^{-1/2}\frac{\xi(s)}{\tau-z}ds. \tag{32}$$

Διά τά ἄκρα α καί β τῆς ρωγμῆς λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν σχέσεων (A1.38), (18) καί (31) προκύπτουν οἱ ἐξῆς τύποι οἱ συνδέοντες τάς τιμάς τῶν συναρτήσεων $\xi(t)$ καί $\nu(t)$:

$$\xi(\alpha) = e^{i\vartheta(\alpha)}\left(\frac{2s_o}{\beta-\alpha}\right)^{1/2} ie^{-i\frac{\vartheta(\alpha)}{2}}\nu(\alpha), \tag{33α}$$

$$\xi(\beta) = e^{i\vartheta(\beta)}\left(\frac{2s_o}{\beta-\alpha}\right)^{1/2} ie^{-i\frac{\vartheta(\beta)}{2}}\nu(\beta), \tag{33β}$$

οἵτινες γράφονται ἁπλούστερον καί ὑπό τήν μορφήν:

$$\xi(\alpha) = ie^{i\frac{\vartheta(\alpha)}{2}}\left(\frac{2s_o}{\beta-\alpha}\right)^{1/2}\nu(\alpha),$$

$$\xi(\beta) = ie^{i\frac{\vartheta(\beta)}{2}}\left(\frac{2s_o}{\beta-\alpha}\right)^{1/2}\nu(\beta). \tag{34}$$

Ἤδη οἱ τύποι (24) δύνανται νά γραφοῦν ὡς ἐξῆς:

$$k_\alpha = -is_o^{-1/2}e^{-i\vartheta(\alpha)}\xi(\alpha),\ k_\beta = +is_o^{-1/2}e^{-i\vartheta(\beta)}\xi(\beta). \tag{35}$$

Ἐάν δέ θέσωμεν:

$$\xi(t) = \xi_1(t)+i\xi_2(t), \tag{36}$$

τότε ἐκ τῶν σχέσεων (35) εὑρίσκομεν διά τούς συντελεστάς

ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα α καί β τῆς ρωγμῆς τούς τύπους:

$$k_{1\alpha} = +s_o^{-1/2}\{-\xi_1(\alpha)\sin\vartheta(\alpha)+\xi_2(\alpha)\cos\vartheta(\alpha)\}, \tag{37α}$$

$$k_{2\alpha} = +s_o^{-1/2}\{\ \xi_1(\alpha)\cos\vartheta(\alpha)+\xi_2(\alpha)\sin\vartheta(\alpha)\} \tag{37β}$$

καί ἀναλόγως:

$$k_{1\beta} = -s_o^{-1/2}\{-\xi_1(\beta)\sin\vartheta(\beta)+\xi_2(\beta)\cos\vartheta(\beta)\}, \tag{38α}$$

$$k_{2\beta} = -s_o^{-1/2}\{\ \xi_1(\beta)\cos\vartheta(\beta)+\xi_2(\beta)\sin\vartheta(\beta)\}. \tag{38β}$$

Οἱ ἀνωτέρω τύποι, ἐάν ληφθοῦν ὑπ'ὄψιν αἱ σχέσεις (23), γράφονται καί ὡς ἐξῆς:

$$\begin{aligned} k_{1\alpha} &= -s_o^{-1/2}\{-\xi_1(\alpha)\sin\vartheta_\alpha+\xi_2(\alpha)\cos\vartheta_\alpha\}, \\ k_{2\alpha} &= -s_o^{-1/2}\{\ \xi_1(\alpha)\cos\vartheta_\alpha+\xi_2(\alpha)\sin\vartheta_\alpha\}, \end{aligned} \tag{39α}$$

$$\begin{aligned} k_{1\beta} &= -s_o^{-1/2}\{-\xi_1(\beta)\sin\vartheta_\beta+\xi_2(\beta)\cos\vartheta_\beta\}, \\ k_{2\beta} &= -s_o^{-1/2}\{\ \xi_1(\beta)\cos\vartheta_\beta+\xi_2(\beta)\sin\vartheta_\beta\}, \end{aligned} \tag{39β}$$

ὅτε δέν ὑφίσταται πλέον διαφορά προσήμου μεταξύ τῶν τύπων τῶν ἰσχυόντων διά τά ἄκρα α καί β.

Ἀξίζει νά σημειωθῇ ὡσαύτως ὅτι βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως μεταστάσεων g(t) κατά τόν τύπον (A1.34β) καί τῶν τύπων (A6.11) τῶν συνδεόντων τάς πυκνότητας τῶν μεταστάσεων κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς μετά τῶν μετατοπίσεων ἐπί τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς δυνάμεθα νά προσδιορίζωμεν κατ' εὐθεῖαν τήν συνάρτησιν πυκνότητος μεταστάσεων g(t) ἐκ τῶν μετατοπίσεων $u^{\pm}(t)$ καί $v^{\pm}(t)$ ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς βάσει τοῦ κάτωθι τύπου:

$$g(t) = \frac{2\mu}{\kappa+1}\frac{d}{dt}\left\{(u^+(t)-u^-(t))+i(v^+(t)-v^-(t))\right\}. \tag{40}$$

Ἡ συνάρτησις $\tilde{g}(t)$ ὁριζομένη βάσει τοῦ τύπου (25) συναρτήσει τῆς g(t) θά ἔχῃ τήν κάτωθι ἀνάλογον τῆς (40) ἔκφρα-

σιν:

$$\tilde{g}(t) = \frac{2\mu}{\varkappa+1}\frac{d}{dt}\left\{(v^+(t)-v^-(t))-i(u^+(t)-u^-(t))\right\}. \qquad (41)$$

Ἐπίσης ἡ συνάρτησις h(s) ὁριζομένη βάσει τοῦ τύπου (Α1.38α) συναρτήσει τῆς g(t) λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν καί τῆς σχέσεως (Α1.24α) θά ἐκφράζεται ὡς ἐξῆς συναρτήσει τῶν μετατοπίσεων ἐπί τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς:

$$h(s) = \frac{2\mu}{\varkappa+1}\frac{d}{ds}\left\{(u^+(t)-u^-(t))+i(v^+(t)-v^-(t))\right\}. \qquad (42)$$

Σημειοῦμεν ὅτι ἀνωτέρω ἐχρησιμοποιήσαμεν ἀδιακρίτως τά σύμβολα t καί s, ἵνα καθορίσωμεν ἓν σημεῖον τῆς ρωγμῆς λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν ὅτι ὑπάρχει πλήρης ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν μεταβλητῶν τούτων καί δέν ὑφίσταται συνήθως κίνδυνος συγχύσεως.

Ἵνα συμπληρωθῇ τό τμῆμα τοῦτο, πρέπει νά σημειωθῇ καί ἡ δυνατότης χρησιμοποιήσεως πέραν τῶν συναρτήσεων ν(t) καί ξ(t) πρός ἔκφρασιν τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων καί τῆς συναρτήσεως μ(t) ὁριζομένης βάσει τῆς συναρτήσεως g(t) διά τοῦ τύπου:

$$g(t) = (s_o^2-s^2)^{-1/2}\mu(t), \qquad (43)$$

ἀναλόγου τοῦ τύπου (31), ὅτε λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν καί τῆς σχέσεως (Α1.38β) προκύπτει:

$$\mu(t) = \xi(t)e^{-i\vartheta(t)}, \qquad (44)$$

ὁπότε οἱ τύποι (35) οἱ δίδοντες τούς μιγαδικούς συντελεστάς ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα α καί β τῆς ρωγμῆς λαμβάνουν τάς ἐξῆς ἀπλουστέρας μορφάς:

$$k_\alpha = -is_o^{-1/2}\mu(\alpha), \quad k_\beta = +is_o^{-1/2}\mu(\beta). \qquad (45)$$

Λόγῳ τῆς σχέσεως (10) εὑρίσκομεν περαιτέρω τούς πραγματικούς συντελεστάς ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς ὡς κάτωθι:

$$k_{1\alpha} = +s_o^{-1/2}\mu_2(\alpha) \ , \quad k_{2\alpha} = +s_o^{-1/2}\mu_1(\alpha) \ , \tag{46α}$$

$$k_{1\beta} = -s_o^{-1/2}\mu_2(\beta) \ , \quad k_{2\beta} = -s_o^{-1/2}\mu_1(\beta) \ , \tag{46β}$$

λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι:

$$\mu(t) = \mu_1(t)+i\mu_2(t) . \tag{47}$$

Ἡ συνάρτησις $\mu(t)$ χρησιμοποιεῖται συνήθως ὡς ἄγνωστος συνάρτησις ἐπί τῆς ρωγμῆς, προκύπτουσα ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τῆς ἀντιστοίχου ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως, εἰς τάς περιπτώσεις εὐθυγράμμων ρωγμῶν, ἐνῷ ἡ συνάρτησις $\xi(t)$ εἰς τάς περιπτώσεις καμπυλογράμμων ρωγμῶν.

Ὅλη ἡ ἀνωτέρω ἀνάπτυξις περί τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα ρωγμῶν ἀφορᾷ εἰς τά ἰσότροπα μέσα. Κατ'ἀρκετά ἀνάλογον τρόπον δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν τούς συντελεστάς ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα ρωγμῶν ἐντός ἀνισοτρόπων μέσων καί νά εὕρωμεν εὐχρήστους τύπους πρός ὑπολογισμόν τούτων. Ἐπί τῶν θεμάτων τούτων δέν θά ἐπεκταθῶμεν ὅμως ἐνταῦθα, περιοριζόμενοι νά δώσωμεν τόν τύπον:

$$k_1 + \frac{1}{\mu_2}k_2 = 2\sqrt{2}\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}e^{-i\frac{\vartheta_1}{2}} \lim_{z_1\to\beta_1} (z_1-\beta_1)^{1/2}\Phi(z_1) \tag{48}$$

διά τόν προσδιορισμόν τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς ἓν ἄκρον β ρωγμῆς ἐντός ἀνισοτρόπου μέσου συναρτήσει τῆς μιγαδικῆς συναρτήσεως $\Phi(z_1)$, περί τῆς ὁποίας ἔχομεν ἀναφέρει εἰς τό τμῆμα A8. Οἱ δεῖκται $(_1)$ εἰς τόν τύπον (48) δηλοῦν τά σημεῖα καί τάς γωνίας τάς προκυπτούσας ἐκ τῶν σημείων καί τῶν γωνιῶν τοῦ ἀληθοῦς ἀνισοτρόπου ἐπιπέδου κατόπιν ἐφαρμογῆς τοῦ πρώτου ἐκ τῶν μετασχηματισμῶν (A8.7β). Ὁ τύπος (48), ὅστις εἶναι ἀρκετά ἀνάλογος τοῦ δι'ἰσότροπον μέσον ἰσχύοντος τύπου (9), δύναται νά θεωρηθῇ προερχόμενος δι' ἐπεκτάσεως ἀναλόγου τύπου διδομένου ὑπό τοῦ BOWIE {1973, §1.3 τύπος (1.73)}, ὥστε νά μή εἶναι ἀνάγκη ἡ ἐφαπτομένη εἰς τό θεωρούμενον ἄκρον β τῆς ρωγμῆς νά ἔχῃ τήν διεύθυνσιν τοῦ ἄ-

ξονος Ox.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ-ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Πλεῖσται ὅσαι ἐργασίαι σχετικαί μέ τούς συντελεστάς ἐντάσεως τῶν τάσεων ἔχουν δημοσιευθῆ μέχρι σήμερον. Ἐκ τῶν πρώτων ἐργασιῶν τῶν σχετικῶν μέ τήν ἀνάλυσιν τοῦ πεδίου τῶν τάσεων παρά τό ἄκρον ρωγμῆς ἐντός ἰσοτρόπου μέσου ἦσαν τά ἄρθρα τῶν SNEDDON {1946} καί IRWIN {1957}, οἵτινες διεπίστωσαν τήν ἰδιομορφίαν,τάξεως (-1/2), τῶν τάσεων παρά τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς. Ὁ IRWIN ὡσαύτως ἐχρησιμοποίησε κατά βάσιν τήν ἔννοιαν τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων. Περαιτέρω οἱ SIH, PARIS and ERDOGAN {1962} ἔδωσαν ἔκφρασιν τοῦ μιγαδικοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων k, συναρτήσει τῆς μιγαδικῆς συναρτήσεως Φ(z) τοῦ MUSKHELISHVILI, ἀνάλογον τῆς (9), μέ τόν περιορισμόν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη εἰς τό θεωρούμενον ἄκρον τῆς ρωγμῆς συμπίπτει μέ τόν ἄξονα Ox. Οἱ SIH, PARIS and IRWIN {1965} ἐπεξέτειναν περαιτέρω τήν ἔννοιαν τοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων καί εἰς τήν περίπτωσιν ἀνισοτρόπων μέσων.

Πρός πλήρη ἐνημέρωσιν ἐπί τοῦ θέματος τῶν συντελεστῶν ἐντάσεως τῶν τάσεων εἰς τά ἄκρα ρωγμῶν τόσον ἐντός ἰσοτρόπων ὅσον καί ἐντός ἀνισοτρόπων μέσων μετά ἀναπτύξεως ὄχι μόνον θεωρητικῆς ἀλλά καί ἐφηρμοσμένης εἰς συγκεκριμένας περιπτώσεις ρωγμῶν δυνάμεθα νά παραπέμψωμεν εἰς τό ἄρθρον τῶν PARIS and SIH {1965}, εἰς τήν συλλογήν σχετικῶν ἐργασιῶν τοῦ SIH {1973} καί κυρίως εἰς τό ἐγχειρίδιον τῶν TADA, PARIS and IRWIN {1973}, τό ὁποῖον δύναται νά θεωρηθῇ καί τό πληρέστερον τόσον ἀπό ἀπόψεως ἐφαρμογῶν ὅσον καί ἀπό ἀπόψεως βιβλιογραφικῶν παραπομπῶν.