ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

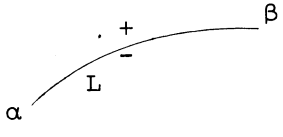
ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΛΕΙΑΣ ΡΩΓΜΗΣ ΕΝΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΜΕΣΟΥ

A1. ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΛΕΙΑΣ ΡΩΓΜΗΣ ΕΝΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΙΣΟΤΡΟΠΟΥ ΜΕΣΟΥ

Κατωτέρω δίδεται μία γενική μέθοδος έπιλύσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἀπλῆς λείας έν γένει καμπυλογράμμου ρωγμῆς έντός ἀπείρου ἰσοτρόπου έλαστικοῦ μέσου διά τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος. Ἡ μέθοδος αὔτη εἶναι εὐχερῶς γενικεύσιμος εἰς τήν περίπτωσιν ρωγμῆς έντός πεπερασμένου ἰσοτρόπου μέσου ὡς καί εἰς τήν περίπτωσιν πολλῶν ρωγμῶν, ὡς θά ἴδωμεν περαιτέρω.

Σημειοῦται ὅτι ἡ κάτωθι μέθοδος κρίνεται ὡς ἡ καταλληλοτέρα διά τήν έπίλυσιν προβλημάτων ρωγμῶν οὖσα ἀνεξάρτητος πάσης ἀναλόγου μεθόδου γενικῆς έπιλύσεως τοῦ έπιπέδου έλαστικοῦ προβλήματος εἰς περίπτωσιν σώματος ἄνευ ρωγμῶν, βασιζομένη δέ μόνον εἰς τάς γενικάς έξισώσεις τῆς έπιπέδου έλαστικότητος καί εἰς τάς ἰδιότητας τῶν ὁλοκληρωμάτων CAUCHY καί τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν έξισώσεων. Τό πρόβλημα τῆς ρωγμῆς ἀνάγεται τελικῶς εἰς μίαν ἰδιόμορφον μιγαδικήν ὁλοκληρωτικήν έξίσωσιν δυναμένην εὐκόλως νά έπιλυθῇ προσεγγιστικῶς.

Θεωροῦμεν οὕτω τήν ἀπλῆν, λείαν ρωγμήν (ἄνευ γωνιακῶν σημείων) έντός ἀπείρου μέσου, ὡς εἰς τό παραπλεύρως Σχῆμα 1, μέ ἄκρα τά σημεῖα α καί β.



Σχῆμα 1

Εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος δίδονται ἡ κάθετος καί ἡ έφαπτομενική συνιστῶσα τῶν τάσεων, σ_n καί σ_t ἀντιστοίχως, έπ' ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς L, (+) καί (−), διά τά σημεῖα t αὐτῆς. Ζητοῦνται αἱ μιγαδικαί συναρτήσεις $\Phi_o(z)$ καί $\Psi_o(z)$ τῆς έπιπέδου θεωρίας τῆς έλαστικότητος, αἵτινες διά $|z| \to \infty$ λαμβάνουν τήν μορφήν:

$$\Phi_o(z) = \Gamma + \Phi(z), \tag{1α}$$

$$\Psi_o(z)=\Gamma'+\Psi(z), \tag{1β}$$

ἔνθα :

$$\Gamma=\frac{1}{4}(N_1+N_2)+\frac{2i\mu\varepsilon_\infty}{1+\varkappa}, \tag{2α}$$

$$\Gamma'=-\frac{1}{2}(N_1-N_2)e^{-2i\alpha}, \tag{2β}$$

μέ N_1 καί N_2 τάς κυρίας τάσεις εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου, α τήν γωνίαν μεταξύ τῆς N_1 καί τοῦ ἄξονος Ox καί ε_∞ τήν τιμήν τῆς περιστροφῆς εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου {MUSKHELISHVILI , 1953A, § 120}. Αἱ μιγαδικαί συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ τείνουν εἰς τό μηδέν διά $z \to \infty$.

Ἤδη ἔχομεν ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς τάς κάτωθι ὁριακάς συνθήκας.

$$\sigma_n^{\pm}-i\sigma_t^{\pm}=\Phi_o^{\pm}(t)+\overline{\Phi_o^{\pm}(t)}+\frac{dt}{d\bar{t}}[\bar{t}\Phi_o'^{\pm}(t)+\Psi_o^{\pm}(t)], \tag{3}$$

αἵτινες δι'ἀθροίσεως καί ἀφαιρέσεως κατά μέλη, λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν καί τῶν σχέσεων (1), δίδουν ἀντιστοίχως:

$$[\Phi^+(t)+\Phi^-(t)]+[\overline{\Phi^+(t)}+\overline{\Phi^-(t)}]+\frac{dt}{d\bar{t}}\Big\{\bar{t}[\Phi'^+(t)+\Phi'^-(t)]+$$
$$+[\Psi^+(t)+\Psi^-(t)]\Big\}=2\overline{p(t)} \tag{4α}$$

καί:

$$[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)]+[\overline{\Phi^+(t)}-\overline{\Phi^-(t)}]+\frac{dt}{d\bar{t}}\Big\{\bar{t}[\Phi'^+(t)-\Phi'^-(t)]+$$
$$+[\Psi^+(t)-\Psi^-(t)]\Big\}=2\overline{q(t)}, \tag{4β}$$

ὅπου ἐτέθησαν:

$$2p(t)=(\sigma_n^+ + \sigma_n^-)+i(\sigma_t^+ + \sigma_t^-)-2(\Gamma+\bar{\Gamma})-2\bar{\Gamma}'\frac{\overline{dt}}{dt}, \tag{5α}$$

$$2q(t)=(\sigma_n^+ - \sigma_n^-)+i(\sigma_t^+ - \sigma_t^-). \tag{5β}$$

Δεδομένου ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$ εἶναι ὁλόμορφος ἐφ'ὅλου τοῦ ἐπιπέδου πλήν τῆς ρωγμῆς, ἤτοι τμηματικῶς ὁλόμορφος,

εἰς δέ τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου ἔχει, ὡς προανεφέρθη, ὅπως καί ἡ $\Psi(z)$ τήν συμπεριφοράν:

$$\Phi(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z}), \quad \Psi(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z}), \tag{6}$$

θεωροῦμεν ὅτι ἡ $\Phi(z)$ παρίσταται ὑπό τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \tag{7}$$

χωρίς νά ἔχῃ πόλους εἴτε εἰς συγκεκριμένον τι σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, εἴτε εἰς τό ἄπειρον, καθ'ὅσον ὑποτίθεται ὅτι δέν ὑφίστανται συγκεντρωμέναι δυνάμεις εἰς σημεῖόν τι τοῦ ἐπιπέδου, αἱ δέ τάσεις εἰς τό ἄπειρον δέν ἐπιδροῦν ἐπί τῆς $\Phi(z)$ ἐπιδεικνυούσης τήν συμπεριφοράν (6) λόγῳ καί τῶν σχέσεων (1) καί (2).

Δεχόμεθα ὡσαύτως ὅτι αἱ συναρτήσεις $\sigma_n^{\pm}(t)$, $\sigma_t^{\pm}(t)$ καί αἱ ἐξ αὐτῶν προκύπτουσαι $p(t)$ καί $q(t)$ διά τῶν σχέσεων (5) ἱκανοποιοῦν τήν συνθήκην HÖLDER (ἤ μέ ἐκθέτην 1 τήν συνθήκην LIPSCHITZ), τό αὐτό δέ θεωρεῖται ἰσχῦον διά τήν πυκνότητα $\varphi(t)$ τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (7).

Ἐκ τῶν τύπων τοῦ PLEMELJ ἤδη λόγῳ τῆς (7) ἔχομεν:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), \tag{8α}$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \tag{8β}$$

καί δεδομένου ὅτι {GAKHOV, 1966, §44}:

$$\lim_{z \to t^{\pm}} [\Phi'(z)] = [\Phi^{\pm}(t)]', \tag{9}$$

προκύπτουν ὡσαύτως ἐκ τῶν (8) αἱ κάτωθι σχέσεις:

$$\Phi'^+(t) - \Phi'^-(t) = \varphi'(t), \tag{10α}$$

$$\Phi'^{+}(t)+\Phi'^{-}(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau. \tag{10β}$$

Λόγω τῶν (8) καί (10) ἡ (4β) δίδει:

$$\Psi^{+}(t)-\Psi^{-}(t) = \frac{\overline{dt}}{dt}\left\{2\overline{q(t)}-\varphi(t)-\overline{\varphi(t)}\right\}-\bar{t}\varphi'(t). \tag{11}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (11) συνάγεται ὅτι ἡ συνάρτησις $\Psi(z)$, τμηματικῶς ὁλόμορφος ἐφ'ὅλου τοῦ ἐπιπέδου πλήν τῆς ρωγμῆς L, ὡς καί ἡ $\Phi(z)$, καί μέ συμπεριφοράν κατά τήν σχέσιν (6) εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου δύναται νά ἐκφρασθῇ συναρτήσει τῆς πυκνότητος $\varphi(t)$ τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (7) ὡς καί τῆς δεδομένης, βάσει τῆς σχέσεως (5β), συναρτήσεως $q(t)$ ὡς κάτωθι:

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-z}\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-z}\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{\tau}\varphi(\tau)}{(\tau-z)^2}d\tau \tag{12}$$

λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν καί τῶν τύπων τοῦ PLEMELJ ὡς καί τοῦ γεγονότος ὅτι:

$$[\bar{t}\varphi(t)]' = \bar{t}\varphi'(t)+\frac{\overline{dt}}{dt}\varphi(t). \tag{13}$$

Τό πρόβλημά μας ἤδη ἀνάγεται εἰς τόν προσδιορισμόν τῆς συναρτήσεως $\varphi(t)$ ἐπί τῆς ρωγμῆς L καί, δεδομένου ὅτι αἱ ὁριακαί συνθῆκαι (3) ἀνήχθησαν εἰς τάς (4), ἐξ ὧν ἡ (4β) ἐπαληθεύεται ἐκ ταυτότητος ὡς ἐκ τῆς ἐκλογῆς (12) τῆς μορφῆς τῆς συναρτήσεως $\Psi(z)$, ἀπομένει ἡ πλήρωσις τῆς ὁριακῆς συνθήκης (4α), ἥτις, λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν τύπων (8β), (10β) ὡς καί τῶν τύπων τοῦ PLEMELJ, οἵτινες λόγῳ τῆς ἐκφράσεως (12) πέραν τῆς σχέσεως (11) δίδουν:

$$\Psi^{+}(t)+\Psi^{-}(t) = \frac{2}{\pi i}\int_L \frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}-$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\bar{\tau}\,\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau, \tag{14}$$

λαμβάνει τελικῶς τήν ἐξῆς μορφήν:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{d\tau}-\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{(\tau-t)^2}d\tau\right\} = 2\overline{p(t)}-\frac{2}{\pi i}\frac{dt}{\overline{dt}}\int_L \frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}. \qquad (15)$$

Ἡ σχέσις (15) ἀποτελεῖ μίαν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήνἐξίσωσιν μέ ἄγνωστον συνάρτησιν τήν $\varphi(t)$. Προσδιορισμός τῆς συναρτήσεως ταύτης ἐπιτρέπει προσδιορισμόν καί τῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$, βάσει τῶν σχέσεων (7) καί (12), καί περαιτέρω τῶν $\Phi_0(z)$ καί $\Psi_0(z)$ βάσει τῶν σχέσεων (1). Ἐπίλυσις κλειστῆς μορφῆς τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (15) δέν εἶναι δυνατή πλήν ὡρισμένων εἰδικῶν περιπτώσεων. Ἐν τούτοις εἶναι δυνατή ἡ προσεγγιστική ἐπίλυσίς της δι' ἀναγωγῆς της εἰς ἓν σύστημα δύο πραγματικῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων, ὡς θέλει ἐκτεθῆ κατωτέρω.

Πρέπει νά σημειωθῇ ὡσαύτως ὅτι διά τάς μετατοπίσεις u καί v κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς L ὀφείλει νά ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\int_L d(u^+-u^-)+i\int_L d(v^+-v^-) = 0 , \qquad (16)$$

ἤτοι νά ἔχωμεν μονοσημάντους μετατοπίσεις κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς L. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι:

$$2\mu[-u(z)+iv(z)] = -\varkappa\int\overline{\Phi_0(z)}\overline{dz}+\overline{z}\Phi_0(z)+\int\Psi_0(z)dz \qquad (17)$$

διά τυχόν σημεῖον z τοῦ ἐπιπέδου ἔχομεν ἐπί τῆς ρωγμῆς L:

$$2\mu[-u^{\pm}(t)+iv^{\pm}(t)] = -\varkappa[\int\overline{\Phi_0(t)}\overline{dt}]^{\pm}+\overline{t}\Phi_0^{\pm}(t)+$$

$$+[\int\Psi_0(t)dt]^{\pm} \qquad (18)$$

καί παραγωγίζοντες ὡς πρός $\overline{t}$ λαμβάνομεν:

$$2\mu\left\{-\frac{du^{\pm}(t)}{\overline{dt}}+i\frac{dv^{\pm}(t)}{\overline{dt}}\right\} = \Phi_o^{\pm}(t)-\varkappa\overline{\Phi_o^{\pm}(t)}+$$

$$+\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\overline{t}\Phi_o'^{\pm}(t)+\Psi_o^{\pm}(t)\right\}, \qquad (19)$$

ἥτις σχέσις εἶναι ἀνάλογος τῆς (3) ἰσχυούσης διά τάς τάσεις.

Ἤδη λόγῳ τοῦ τύπου (19) ἡ συνθήκη (16) δυναμένη νά ἐκφρασθῇ καί ὡς:

$$2\mu\int_L\left\{-\frac{d[u^+(t)-u^-(t)]}{\overline{dt}}+i\frac{d[v^+(t)-v^-(t)]}{\overline{dt}}\right\}\overline{dt} = 0 \qquad (20)$$

γράφεται λόγῳ καί τῶν σχέσεων (1):

$$\int_L[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)]\overline{dt}-\varkappa\int_L[\overline{\Phi^+(t)}-\overline{\Phi^-(t)}]\overline{dt}+\int_L\overline{t}[\Phi'^+(t)-$$

$$-\Phi'^-(t)]dt+\int_L[\Psi^+(t)-\Psi^-(t)]dt = 0\ , \qquad (21)$$

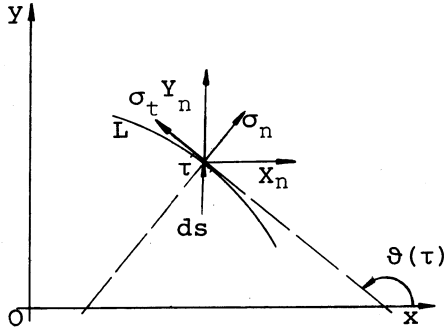
λαμβάνοντες δέ ὑπ'ὄψιν τούς τύπους (8α), (10α) καί (11) ἔχομεν τελικῶς τήν συνθήκην:

$$(\varkappa+1)\int_L\overline{\varphi(t)}\overline{dt} = 2\int_L\overline{q(t)}\overline{dt}\ , \qquad (22)$$

ἥτις γράφεται καί ὡς:

$$\int_L\varphi(\tau)d\tau = \frac{2}{\varkappa+1}\int_L q(\tau)d\tau\ . \qquad (23)$$

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι, ἐάν εἷς τι σημεῖον τ καμπύλης L σ_n καί σ_t εἶναι ἡ κάθετος καί ἡ ἐφαπτομενική συνιστῶσαι τῶν ἐξασκουμένων τάσεων καί X_n καί Y_n αἱ κατά τούς ἄξονας Ox καί Oy ἐξασκούμεναι φορτίσεις, προσέτι δέ $\vartheta(\tau)$ ἡ γωνία



Σχῆμα 2

μεταξύ τοῦ ἄξονος Ox καί τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης L εἰς τό σημεῖον τ αὐτῆς, ὡς εἰς τό ἀνωτέρω Σχῆμα 2, τότε θά ἔχωμεν ἐπί στοιχειώδους τόξου ds:

$$d\tau = ds\, e^{i\vartheta(\tau)}\,, \tag{24α}$$

$$\overline{d\tau} = ds\, e^{-i\vartheta(\tau)} \tag{24β}$$

καί ἐπίσης:

$$\sigma_n + i\sigma_t = (X_n + iY_n)e^{-i[\vartheta(\tau) - \frac{\pi}{2}]} = +i(X_n + iY_n)e^{-i\vartheta(\tau)}, \tag{25α}$$

ἤ ἄλλως:

$$X_n + iY_n = -i(\sigma_n + i\sigma_t)e^{i\vartheta(\tau)}, \tag{25β}$$

ὁπότε, λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν καί τῆς σχέσεως (5β), λόγῳ καί τῆς (24α) διαπιστοῦται ὅτι ἐπί τῆς ρωγμῆς L:

$$X + iY = \int_L \left\{(X_n^+ - X_n^-) + i(Y_n^+ - Y_n^-)\right\} ds = -2i\int_L q(\tau)d\tau\,, \tag{26}$$

ἤτοι ἡ συνολικῶς ἐξασκουμένη ἐπί τῆς ρωγμῆς L δύναμις (X+iY) εἶναι ἀνάλογος τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς συνθήκης (23).

Παρατηροῦμεν προσέτι ὅτι, ἐάν θέσωμεν:

$$\varphi(t) = f(t) + g(t), \tag{27}$$

ἔνθα:

$$f(t) = \frac{2q(t)}{\varkappa+1}\,, \tag{28}$$

τότε ἡ συνθήκη (23) ἡ ἐξασφαλίζουσα τό μονοσήμαντον τῶν μετατοπίσεων ἀπλοποιεῖται λαμβάνουσα τήν μορφήν:

$$\int_L g(\tau)d\tau = 0, \tag{29}$$

ἡ δέ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (15) δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα ἄγνωστον συνάρτησιν τήν g(t), τῆς f(t) διδομένης ὑπό τῆς σχέσεως (28), λαμβάνουσα οὕτω τήν μορφήν:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{\tau-t}d\tau - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{g(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{d\tau} - \frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{g(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau} + \right.$$

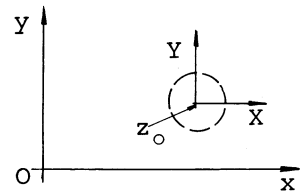
$$\left. + \frac{1}{\pi i}\int_L g(\tau)\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{(\tau-t)^2}d\tau\right\} = 2\overline{p(t)} - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{f(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{d\tau} - \frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{\varkappa}{\pi i}\int_L \frac{\overline{f(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi i}\int_L f(\tau)\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{(\tau-t)^2}d\tau\right\}. \qquad (30)$$

Δυνάμεθα ἤδη νά δώσωμεν φυσικήν ἑρμηνείαν τῶν συναρτήσεων $f(t)$, $g(t)$ καί $\varphi(t)$ τῶν ἐμφανιζομένων ἀνωτέρω βάσει στοιχειωδῶν σκέψεων ἀναλύοντες τήν ρωγμήν, τήν ὁποίαν μελετῶμεν, εἰς σειράν ἀπειροστῶν καί ἀπείρως πλησίον κειμένων συγκεντρωμένων δυνάμεων καί μεταστάσεων.

Θεωροῦμεν οὕτω ὅτι εἰς τυχόν σημεῖον z_0 τοῦ ἀπείρου ἐπιπέδου, ὡς εἰς τό Σχῆμα 3 παραπλεύρως, ἐφαρμόζεται συγκεντρωμένη δύναμις μέ συνιστώσας (X,Y) κατά τάς διευθύνσεις τῶν ἀξόνων Ox καί Oy ἀντιστοίχως. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην αἱ μιγαδικαί συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ παρέχονται ὑπό τῶν τύπων { ENGLAND, 1971A, § 3.2 }:



Σχῆμα 3

$$\Phi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{z-z_0}, \qquad (31\alpha)$$

$$\Psi(z) = \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{z-z_0} - \frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{\overline{z_0}}{(z-z_0)^2}, \qquad (31\beta)$$

εὐκόλως δέ ἐπαληθεύεται ὅτι ἡ συνισταμένη δύναμις ἡ ἐνεργοῦσα ἐπί τινος καμπύλης L, ὄχι ἀναγκαίως στοιχειώδους, ἀλλά περιβαλλούσης τό σημεῖον z_0, τοῦ μέσου θεωρουμένου ἐκτεινομένου ἔξω τῆς L, ἰσοῦται μέ (X,Y).

Κατ'ἀνάλογον τρόπον, ἐάν θεωρηθῇ ὅτι εἰς τό σημεῖον z_0 ὑφίσταται μετάστασις μέ διάνυσμα BURGERS (B_1, B_2) κατά τάς διευθύνσεις τῶν ἀξόνων Ox καί Oy ἀντιστοίχως, αἱ μιγαδικαί συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ παρέχονται ὑπό τῶν ἑξῆς τύπων, οἵτινες εἶναι ἐντελῶς ἀνάλογοι τῶν (31):

$$\Phi(z) = \frac{\mu(B_1+iB_2)}{\pi i(\varkappa+1)} \frac{1}{z-z_0}, \tag{32α}$$

$$\Psi(z) = -\frac{\mu(B_1-iB_2)}{\pi i(\varkappa+1)} \frac{1}{z-z_0} + \frac{\mu(B_1+iB_2)}{\pi i(\varkappa+1)} \frac{\overline{z_0}}{(z-z_0)^2}, \tag{32β}$$

εὐκόλως δέ ἐπαληθεύεται ὅτι ἡ μεταβολή τῶν μετατοπίσεων κατά μῆκος τῆς πραναφερθείσης καμπύλης L δέν ἰσοῦται μέ μηδέν μετά μίαν πλήρη στροφήν, ἀλλά δίδει διαφοράν μετατοπίσεων ἴσην πρός (B_1, B_2).

Δέον ἐπίσης νά σημειωθῇ ὅτι διά τῶν τύπων (31) ἐξασφαλίζεται τό μονοσήμαντον τῶν μετατοπίσεων διά τήν περίπτωσιν τῆς συγκεντρωμένης δυνάμεως, μέ μηδενικήν μεταβολήν τῶν μετατοπίσεων μετά μίαν πλήρη στροφήν περί τό σημεῖον z_0 κατά μῆκος τῆς καμπύλης L, ὡσαύτως δέ διά τῶν τύπων (32) ἐξασφαλίζεται ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν ἐπί τῆς καμπύλης L ἐξασκουμένων δυνάμεων, τοῦ μέσου θεωρουμένου ἀπείρου καί ἐκτός τῆς L κειμένου, ἰσοῦται πρός μηδέν.

Θεωροῦμεν τώρα τήν ρωγμήν τοῦ Σχήματος 1 ὡς συντιθεμένην ἐξ ἀπείρων, ἀπειροστῶν καί ἀπείρως πλησίον κειμένων συγκεντρωμένων δυνάμεων μέ πυκνότητα $[X_n(t)+iY_n(t)]$ ὡς καί ἐπίσης ἀπείρων, ἀπειροστῶν καί ἀπείρως πλησίον κειμένων μεταστάσεων μέ πυκνότητα $[\beta_1(t)+i\beta_2(t)]$.

Δυνάμεθα τότε νά ἐκφράσωμεν τάς συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ τῶν τύπων (1) διά τήν ρωγμήν λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν καί τούς τύπους (31) καί (32) ὡς κάτωθι:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)+g(\tau)}{\tau-z} d\tau, \tag{33α}$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varkappa\overline{f(\tau)}-\overline{g(\tau)}}{\tau-z}\overline{d\tau} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)+g(\tau)}{(\tau-z)^2}\tau d\tau, \qquad (33\beta)$$

ἔνθα ἐχρησιμοποιήθησαν πρός διευκόλυνσιν τοῦ συμβολισμοῦ αἱ συναρτήσεις $f(t)$ καί $g(t)$, ἀνάλογοι τῶν πυκνοτήτων συγκεντρωμένων δυνάμεων $[X_n(t)+iY_n(t)]$ καί μεταστάσεων $[\beta_1(t)+i\beta_2(t)]$ ἀντιστοίχως καί συνδεόμεναι μετά τῶν τελευταίων διά τῶν σχέσεων:

$$f(t) = +\frac{i[X_n(t)+iY_n(t)]}{\varkappa+1}, \qquad (34\alpha)$$

$$g(t) = -\frac{2\mu[\beta_1(t)+i\beta_2(t)]}{\varkappa+1}. \qquad (34\beta)$$

Τάς συναρτήσεις $f(t)$ καί $g(t)$ δυνάμεθα κατά τά ἀνωτέρω νά ὀνομάσωμεν συναρτήσεις δυνάμεων καί μεταστάσεων ἀντιστοίχως. Σημειοῦμεν ἐπίσης ὅτι ἡ πυκνότης συγκεντρωμένων δυνάμεων διά τήν περίπτωσιν τῆς ρωγμῆς ἰσοῦται μέ $[-2iq(t)]$, λόγῳ τῆς σχέσεως (5β), ὅτε ἡ σχέσις (34α) λαμβάνει τήν ἰδίαν μορφήν μέ τήν (28), ὡσαύτως δέ, ἐάν ὁρίσωμεν τήν συνάρτησιν $\varphi(t)$ διά τύπου ἀναλόγου τοῦ (27), παρατηροῦμεν ὅτι οἱ τύποι (33) μεταπίπτουν εἰς τούς (7) καί (12), λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν καί τῆς σχέσεως (28), τούς χρησιμοποιηθέντας κατά τήν προηγουμένην ἀνάπτυξιν. Περιττεύει οὕτω νά ἐπαληθευθῇ ὅτι βάσει τῶν ἐκφράσεων (33) δυνάμεθα εὐχερῶς νά καταλήξωμεν εἰς τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (30) μέ ἄγνωστον συνάρτησιν τήν συνάρτησιν μεταστάσεων $g(t)$, τῆς συναρτήσεως δυνάμεων $f(t)$ διδομένης, ὡς προαναφέρθη, ὑπό τοῦ τύπου (28), ἤ εἰς τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (15) μέ ἄγνωστον συνάρτησιν τήν πυκνότητα $\varphi(t)$ τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (7) τοῦ ἐκφράζοντος τήν μιγαδικήν συνάρτησιν $\Phi(z)$, ἥτις πυκνότης κατά τά ἀνωτέρω ἐκτεθέντα ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν συναρτήσεων δυνάμεων καί μεταστάσεων $f(t)$ καί $g(t)$ ἀντιστοίχως ἰσχυούσης τῆς σχέσεως (27) καί ταυτιζομένων τῶν τύπων (7) καί (33α) ὡς καί τῶν (12) καί (33β).

Εἰς ἣν περίπτωσιν αἱ ἐξασκούμεναι φορτίσεις ἐπί τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς εἶναι ἀντίθετοι, ἡ σχέσις (5β) δηλοῖ ὅτι ἔχομεν τότε, λόγῳ καί τῆς (28):

$$f(t) = q(t) = 0 \ , \tag{35}$$

ἤτοι μηδενίζεται ἡ συνάρτησις δυνάμεων, δέν ὑπάρχουν δηλαδή κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς συγκεντρωμέναι δυνάμεις, ὡς εἶναι προφανές, προσέτι δέ ἡ πυκνότης $\varphi(t)$ ταυτίζεται μέ τήν συνάρτησιν $g(t)$, λόγῳ τῶν σχέσεων (27) καί (35), ἤτοι:

$$g(t) = \varphi(t), \tag{36}$$

αἱ δέ ἰδιόμορφοι ὁλοκληρωτικαί ἐξισώσεις (15) καί (30) λόγῳ καί τῆς σχέσεως (35) λαμβάνουν τήν ἐξῆς ἠπλοποιημένην μορφήν κατόπιν ἀπαλοιφῆς ὅρων τῶν δευτέρων μελῶν αὐτῶν:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{\tau-t}d\tau - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{g(\tau)}}{\bar{\tau}-\bar{t}}\overline{d\tau} - \frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{g(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi i}\int_L g(\tau)\frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{(\tau-t)^2}d\tau\right\} = 2\overline{p(t)}\,. \tag{37}$$

Πρέπει πάντως νά σημειωθῇ ὅτι ἡ ἑρμηνεία τῶν ἐκφράσεων τῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ ὡς καί τῶν προκυπτουσῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων διά χρήσεως τῶν ἐννοιῶν τῶν συγκεντρωμένων δυνάμεων καί τῶν μεταστάσεων εἶναι ἁπλῶς ἑρμηνεία πρός κατανόησιν τούτων, διά τοῦτο δέ καί ἡ ἀπόδειξίς των δέν ἐστηρίχθη εἰς τήν ἑρμηνείαν ταύτην.

Αἱ ἰδιόμορφοι ὁλοκληρωτικαί ἐξισώσεις (15), (30) καί (37) εἶναι ἀκριβῶς τῆς ἰδίας μορφῆς μή διαφέρουσαι, εἰ μή κατά τό δεύτερον μέλος τούτων, τό ὁποῖον εἶναι γνωστή συνάρτησις κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς. Μέ τόν συμβολισμόν λοιπόν τῆς (37) θά ἀναγάγωμεν ταύτας εἰς σύστημα δύο πραγματικῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων μέ ἀγνώστους συναρτήσεις τάς $h_1(s)$ καί $h_2(s)$ μέ μεταβλητήν s τό μῆκος τῆς ρωγμῆς L

κατά μῆκος ταύτης καθοριζομένας βάσει τῆς σχέσεως:

$$h(s) = h_1(s)+ih_2(s) = g(t)\frac{dt}{ds} = g(t)e^{i\vartheta(t)},$$

$$t = t(s) \tag{38α}$$

(λόγῳ καί τῆς σχέσεως (24α)), ἥτις ἐπιλυομένη ὡς πρός $g(t)$ δίδει:

$$g(t) = h(s)/\frac{dt}{ds} = [h_1(s)+ih_2(s)]e^{-i\vartheta(t)}. \tag{38β}$$

Ἤδη ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (37) λαμβάνει τήν μορφήν:

$$\frac{1}{\pi}Re\int_L \frac{h_2(s)-ih_1(s)}{\tau(s)-t(\sigma)}ds+$$

$$+\frac{i}{\pi}e^{2i\vartheta(\sigma)}\int_L \frac{h_2(s)Im[\tau(s)-t(\sigma)]+h_1(s)Re[\tau(s)-t(\sigma)]}{[\tau(s)-t(\sigma)]^2}ds =$$

$$= \overline{p(\sigma)}, \tag{39}$$

ἔνθα ἐχρησιμοποιήθησαν ἡ μεταβλητή s, μῆκος τόξου κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς, ἀντί τῆς μεταβλητῆς τ, καθ'ὅσον ἡ μεταβλητή s εἶναι πραγματική, ἐνῷ ἡ τ μιγαδική, καί ὁμοίως ἡ μεταβλητή σ, πρός διάκρισιν ἀπό τήν s, παριστῶσα ὅμως πάλιν τό μῆκος τόξου κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς, ἀντί τῆς μεταβλητῆς t.

Ἐάν θεωρήσωμεν ἤδη τάς παραμετρικάς ἐξισώσεις τῆς ρωγμῆς:

$$x = x(s),\ y = y(s),\ s_1 < s < s_2, \tag{40α}$$

ὅτε δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$\begin{aligned} \tau &= x(s)+iy(s), \\ t &= x(\sigma)+iy(\sigma), \end{aligned} \quad s_1 < s < s_2, \tag{40β}$$

καί ἐπίσης θέσωμεν:

$$p(\sigma) = p_1(\sigma)+ip_2(\sigma), \tag{41}$$

λάβωμεν δέ ὑπ'ὄψιν ὅτι:

$$\tan\vartheta(\sigma) = \frac{y'(\sigma)}{x'(\sigma)} , \tag{42}$$

ὅτε προκύπτει:

$$e^{2i\vartheta(\sigma)} = \cos 2\vartheta(\sigma)+i\sin 2\vartheta(\sigma) =$$

$$= \frac{x'^2(\sigma)-y'^2(\sigma)}{x'^2(\sigma)+y'^2(\sigma)} +i\frac{2x'(\sigma)y'(\sigma)}{x'^2(\sigma)+y'^2(\sigma)} \tag{43}$$

δυνάμεθα νά ἀναλύσωμεν τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (39) εἰς δύο πραγματικάς ἰδιομόρφους ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις, ὡς ἕπεται:

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{x^*(s)h_2(s)-y^*(s)h_1(s)}{x^{*2}(s)+y^{*2}(s)}ds-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_L \frac{y^*(s)h_2(s)+x^*(s)h_1(s)}{[x^{*2}(s)+y^{*2}(s)]^2}\cdot\Bigg\{[x^{*2}(s)-$$

$$-y^{*2}(s)]\frac{2x'(\sigma)y'(\sigma)}{x'^2(\sigma)+y'^2(\sigma)}-$$

$$-2x^*(s)y^*(s)\frac{x'^2(\sigma)-y'^2(\sigma)}{x'^2(\sigma)+y'^2(\sigma)}\Bigg\}ds = p_1(\sigma) \tag{44α}$$

καί:

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{y^*(s)h_2(s)+x^*(s)h_1(s)}{[x^{*2}(s)+y^{*2}(s)]^2}\Bigg\{[x^{*2}(s)-$$

$$-y^{*2}(s)]\frac{x'^2(\sigma)-y'^2(\sigma)}{x'^2(\sigma)+y'^2(\sigma)}+$$

$$+2x^*(s)y^*(s)\frac{2x'(\sigma)y'(\sigma)}{x'^2(\sigma)+y'^2(\sigma)}\Bigg\}ds = -p_2(\sigma) , \tag{44β}$$

ἔνθα ἐτέθη:

$$\tau(s)-t(\sigma) = [x(s)-x(\sigma)]+i[y(s)-y(\sigma)] =$$

$$= x^*(s)+iy^*(s) \ . \qquad (45)$$

Πρέπει νά ὑπενθυμίσωμεν ἐνταῦθα ὅτι τό σύστημα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (39) ἐξακολουθεῖ νά εἶναι ἰδιόμορφον, τοῦτο δέ εὐθύς φαίνεται, καθ'ὅσον διά $\sigma = s$ αἱ συναρτήσεις $x^*(s)$ καί $y^*(s)$ ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ των (45) μηδενίζονται καί τά ὁλοκληρώματα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (44) ἔχουν συντελεστάς τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων $h_1(s)$ καί $h_2(s)$ ἀπειριζομένους, δεδομένου δέ ὅτι ἡ ρωγμή L ἐθεωρήθη ἐξ ἀρχῆς λεία, ὅτε ὑφίστανται πεπερασμέναι παράγωγοι τῶν συναρτήσεων $x(s)$ καί $y(s)$ καθ'ὅλον τό μῆκος τῆς ρωγμῆς L, ἰσχύει δηλαδή διά $s \to \sigma$:

$$\lim_{s \to \sigma} \left\{ \frac{x(s)-x(\sigma)}{s-\sigma} + i\frac{y(s)-y(\sigma)}{s-\sigma} \right\} =$$

$$= \lim_{s \to \sigma} \frac{x^*(s)+iy^*(s)}{s-\sigma} = x'(s)+iy'(s) \ , \qquad (46)$$

ἕπεται ὅτι τά ὁλοκληρώματα τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (44) εἶναι τύπου CAUCHY. Διά ταῦτα καί αἱ ἐξισώσεις αὗται, διά νά ἐπιλυθοῦν ἀριθμητικῶς, θά πρέπῃ ἤ νά ἀναχθοῦν εἰς ἐξισώσεις FREDHOLM, πρᾶγμα ἄκρως ἐπίπονον λόγῳ τῶν πολυπλόκων πυρήνων τῶν ὁλοκληρωμάτων, ἤ νά ἐπιλυθοῦν ἀπ'εὐθείας δι'εἰδικῆς μεθόδου ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως, ἐφ'ἧς θά ἐπανέλθωμεν.

Ἀς ἀναφέρωμεν τέλος ὅτι μιγαδική συνθήκη τῆς μορφῆς:

$$\int_L g(\tau)d\tau = A_1+iA_2 \ , \qquad (47)$$

ὡς ἡ (23) ἐπληθευομένη ὑπό τῆς $\varphi(t)$ ἤ ἡ (29) ἐπληθευομένη ὑπό τῆς $g(t)$ λόγῳ τῶν σχέσεων (38) ἀναλύεται εἰς τάς ἐξῆς δύο πραγματικάς συνθήκας:

$$\int_L h_1(s)ds = A_1 \ , \tag{47α}$$

$$\int_L h_2(s)ds = A_2 \ , \tag{47β}$$

αἵτινες συμπληροῦν τό σύστημα τῶν πραγματικῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (44).

Ἄς ἐφαρμόσωμεν ἤδη τήν ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (15) εἰς τήν περίπτωσιν ἁπλῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς ἐκτεινομένης κατά μῆκος τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος μέ:

$$\alpha < t < \beta. \tag{48}$$

Τότε ἔχομεν:

$$t = \overline{t} \ , \ dt = \overline{dt} \tag{49}$$

καί ἡ ἐξίσωσις (15) λαμβάνει τήν κάτωθι μορφήν θεωρουμένης μάλιστα τῆς συζυγοῦς ταύτης:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau = p(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{q(\tau)}{\tau-t}d\tau, \tag{50}$$

ἥτις γραφομένη ὡς:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)-q(\tau)}{\tau-t}d\tau = p(t) \tag{51}$$

δίδει ὡς λύσιν της τήν {MUSKHELISHVILI, 1953B,§88}:

$$\varphi(t) = q(t)+\frac{1}{\pi i X(t)}\int_L \frac{X(\tau)p(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{2C}{X(t)} \ , \tag{52}$$

ἔνθα ἐτέθη:

$$X(z) = \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)} \ , \tag{53}$$

καί C σταθερά, ὁπότε λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν τύπων τοῦ PLEMELJ (8) ὡς καί τῶν διά συνάρτησιν προσδιοριζομένην ἐκ τοῦ τύπου:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X(\tau)y(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{C}{X(z)} \tag{54}$$

ἰσχυουσῶν, βάσει τῶν τύπων τοῦ PLEMELJ, σχέσεων ἀντιστοίχων τῶν (8) μεταξύ τῶν ὁριακῶν τιμῶν της:

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = y(t), \tag{55α}$$

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i X(t)} \int_L \frac{X(\tau)y(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{2C}{X(t)} \tag{55β}$$

προκύπτει ὅτι, ἰσχυουσῶν τῶν σχέσεων (7) καί (52) διά τήν ἐξεταζομένην περίπτωσιν τῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς, θά πρέπῃ ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$ νά δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X(\tau)p(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{C}{X(z)} \quad . \tag{56}$$

Ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$ τείνει εἰς τό μηδέν διά $z \to \infty$, ὡς ὤφειλεν.

Διά τόν προσδιορισμόν τῆς σταθερᾶς C θά χρησιμοποιηθῇ ἡ συνθήκη (23) τοῦ μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων, ἥτις διά μεταθέσεως τῆς καμπύλης L τοῦ ὁλοκληρώματος τοῦ πρώτου μέλους μέχρι τοῦ ἀπείρου κύκλου συμφώνως πρός τό θεώρημα τοῦ CAUCHY καί λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν τῆς σχέσεως (56) δίδει:

$$\int_L q(\tau)d\tau + 2\pi i C = \frac{2}{1+\varkappa} \int_L q(\tau)d\tau, \tag{57}$$

ἀπό ὅπου ἕπεται ὅτι:

$$C = \frac{1}{2\pi i} \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa} \int_L q(\tau)d\tau. \tag{58}$$

Ἡ συνάρτησις $\Psi(z)$ δίδεται ὑπό τοῦ τύπου (12), ἔνθα ἡ συνάρτησις $\varphi(t)$ δίδεται ὑπό τοῦ τύπου (52). Συνηθέστερον ὅμως ἀντί τῆς συναρτήσεως $\Psi(z)$ εἰς τήν περίπτωσιν εὐθυγράμμου ρωγμῆς χρησιμοποιεῖται ἡ συνάρτησις $\Omega(z)$ ὁριζομένη ὡς {MUSKHELISHVILI, 1953A, §120}:

$$\Omega(z) = \overline{\Phi}(z)+z\overline{\Phi}'(z)+\overline{\Psi}(z), \tag{59}$$

ἤ, ἐφ' ὅσον θεωρήσωμεν καί τήν εἰς τό ἄπειρον φόρτισιν, ἡ συνάρτησις $\Omega_o(z)$ ὁριζομένη ὡς:

$$\Omega_o(z) = \overline{\Phi}_o(z)+z\overline{\Phi}_o'(z)+\overline{\Psi}_o(z), \tag{60}$$

λαμβανομένων δέ ὑπ' ὄψιν καί τῶν τύπων (1) εὑρίσκομεν:

$$\Omega_o(z) = \overline{\Gamma}+\overline{\Gamma}'+\Omega(z). \tag{61}$$

Ἡ συνάρτησις $\Omega(z)$ τείνει προφανῶς εἰς τό μηδέν δι' $|z|\to\infty$.

Λόγῳ τῶν σχέσεων (8), (10) καί (11) ἐκ τῆς (59) λαμβάνομεν:

$$\Omega^+(t)-\Omega^-(t) = \varphi(t)-2q(t), \tag{62}$$

ἔνθα ἐλήφθη ὡσαύτως ὑπ' ὄψιν ὅτι, ἐάν μιγαδική συνάρτησις $\Phi(z)$ δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau, \tag{63}$$

ἡ συζυγής αὐτῆς $\overline{\Phi}(z)$ δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\overline{\Phi}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\overline{\tau}-z}\overline{d\tau}. \tag{64}$$

Ἤδη ἡ συνάρτησις $\Omega(z)$, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν καί τοῦ τύπου (52), προσδιορίζεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\Omega(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{q(\tau)}{\tau-z}d\tau+\frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(\tau)p(\tau)}{\tau-z}d\tau+\frac{C}{X(z)}. \tag{65}$$

Οἱ τύποι (56) καί (65) συμφωνοῦν μέ τούς εὑρισκομένους δι' ἀναγωγῆς τοῦ προβλήματος τῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς εἰς πρόβλημα RIEMANN {MUSKHELISHVILI,1953A, §120} μέ τήν διαφοράν ὅτι εἰς τούς τελευταίους ἐμφανίζεται σαφῶς καί ἡ φόρτισις εἰς τό ἄπειρον, καθ' ὅσον ἀφοροῦν εἰς τάς συναρτήσεις $\Phi_o(z)$ καί $\Omega_o(z)$. Ἵνα ἴδωμεν καλύτερον τήν ἀπόλυτον ταύτισιν τῶν

διά τῶν δύο μεθόδων ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων καί προβλήματος RIEMANN, λαμβανομένων ἀποτελεσμάτων ἀρκεῖ νά χρησιμοποιήσωμεν ἀντί τοῦ τύπου (5α) τόν τύπον:

$$2p^*(t) = (\sigma_n^+ + \sigma_n^-) + i(\sigma_t^+ + \sigma_t^-), \tag{66}$$

ἤτοι νά θέσωμεν:

$$p(t) = p^*(t) - (\Gamma + \overline{\Gamma}) - \overline{\Gamma}' \frac{\overline{dt}}{dt} \tag{67}$$

καί νά θεωρήσωμεν ταύτοχρόνως ὅτι:

$$\Gamma = \overline{\Gamma}, \tag{68}$$

ὅτε λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν καί τάς σχέσεις (1) καί (61) εὑρίσκομεν ἀντί τῶν τύπων (56) καί (65) τούς ἑξῆς:

$$\Phi_o(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{q(\tau)}{\tau - z}d\tau + \frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(\tau)p^*(\tau)}{\tau - z}d\tau + \frac{(2\Gamma + \overline{\Gamma}')z + 2C}{2X(z)} - \frac{1}{2}\overline{\Gamma}', \tag{69α}$$

$$\Omega_o(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{q(\tau)}{\tau - z}d\tau + \frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(\tau)p^*(\tau)}{\tau - z}d\tau + \frac{(2\Gamma + \overline{\Gamma}')z + 2C}{2X(z)} + \frac{1}{2}\overline{\Gamma}', \tag{69β}$$

ἔνθα ἐλήφθη ὑπ' ὄψιν ὅτι:

$$\int_L \frac{X(\tau)}{\tau - z}d\tau = \pi i\{X(z) - z\}, \tag{70}$$

{ENGLAND, 1971A, §1.8}, ὅτε ἔχομεν περαιτέρω:

$$\frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(\tau)}{\tau - z}d\tau = \frac{1}{2} - \frac{z}{2X(z)}, \tag{71}$$

τῆς σταθερᾶς C προσδιοριζομένης πάλιν βάσει τοῦ τύπου (58).

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Τό μελετηθέν εἰς τό τμῆμα τοῦτο πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα διά τήν ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου ἔχει ἀντιμετωπισθῆ μέ-

χρι σήμερον ὑπό πολλῶν ἐρευνητῶν τόσον εἰς ἐντελῶς εἰδικάς ὅσον καί εἰς γενικωτέρας περιπτώσεις του, οὐχί ὅμως εἰς τήν γενικήν περίπτωσίν του.

Οὕτως αἱ μόναι ἐργασίαι, εἰς τάς ὁποίας ἀντιμετωπίζεται ἡ περίπτωσις καμπυλογράμμου ρωγμῆς εἶναι αἱ τῶν GOL'DSHTEYN and SALGANIK {1970}, GOLD'SHTEIN and SAVOVA {1972} καί GOL'-DSTEIN and SALGANIK {1974}. Οὗτοι ἐθεώρησαν βασικῶς τήν φορτιζομένην κατά τόν αὐτόν τρόπον ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν της καμπυλόγραμμον ρωγμήν, εἰργάσθησαν διά χρήσεως τῆς μεθόδου τῶν μεταστάσεων καί οὐχί τῆς μεθόδου τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν καί κατέληξαν τελικῶς εἰς ἓν σύστημα δύο πραγματικῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων, τό ὁποῖον δύναται νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι ἰσοδύναμον τοῦ εἰς τό τμῆμα τοῦτο εὑρεθέντος συστήματος (44), ἀλλά παρουσιάζεται ὑπό ἄκρως πολύπλοκον μορφήν.

Ὅλαι αἱ ἄλλαι ἐργασίαι ἐπί ρωγμῶν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου ἀφοροῦν εἰς συγκεκριμένας μόνον μορφάς ρωγμῶν καί κυρίως εὐθυγράμμους. Οὕτω διά τήν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων τῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς ἢ τῆς σχήματος τόξου κύκλου ρωγμῆς διά τῆς μεθόδου τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν καί δι'ἀναγωγῆς τοῦ προβλήματος εἰς πρόβλημα ὁριακῶν συνθηκῶν τύπου RIEMANN-HILBERT παραπέμπομεν εἰς τά συγγράμματα τῶν MUSKHELISHVILI {1953A, §120,124,124a}, GREEN and ZERNA {1968, §8.15-17}, MILNE-THOMSON {1968, §4.12-14,5.4} καί ENGLAND {1971A, §3.10,4.7}. Σχετικά εἶναι ἐπίσης καί τά ἄρθρα τοῦ WESTERGAARD {1939}, τοῦ SHARFUDDIN {1968}, τοῦ HAHN {1970} ὡς καί ἡ ἐργασία τοῦ ΙΩΑΚΕΙΜΙΔΗ {1973}.

Διά μεθόδου ἀναλόγου πρός τήν εἰς τό τμῆμα τοῦτο ἀναπτυχθεῖσαν εἰργάσθησαν οἱ DATSYSHIN and SAVRUK {1974} περιορισθέντες ὅμως εἰς εὐθυγράμμους ρωγμάς. Ὡσαύτως οἱ BUECKNER and GIAEVER (BUECKNER and GIAEVER {1966}, BUECKNER {1970, 1971, 1973}) ἀνέπτυξαν μίαν εἰσέτι μέθοδον παραπλησίαν τῆς ἐνταῦθα χρησιμοποιουμένης διά τήν ἐπίλυσιν προβλημάτων εὐθυγράμμων μόνον ρωγμῶν. Ἑτέρας μεθόδους στηριζομένας εἰς

τήν χρῆσιν μιγαδικῶν συναρτήσεων διά τήν ἐπίλυσιν προβλημάτων εὐθυγράμμων ρωγμῶν ἀνέπτυξαν καί οἱ ENGLAND and GREEN {1963} ὡς καί ὁ WILLIAMS {1963}.

Πολλά προβλήματα εὐθυγράμμων ρωγμῶν ἐξετάζονται ἐπίσης εἰς τό βιβλίον τῶν SNEDDON and LOWENGRUB {1969}, ὅπου χρησιμοποιεῖται εἰς τάς πλείστας περιπτώσεις ἡ μέθοδος τῶν ὁλοκληρωτικῶν μετασχηματισμῶν, ἥτις ἀναπτύσσεται καί εἰς τά ἄρθρα τοῦ SNEDDON {1969,1973}. Ἐπίσης ὁ ISIDA {1973} διά τήν ἐπίλυσιν διαφόρων προβλημάτων εὐθυγράμμων ρωγμῶν ἐχρησιμοποίησε τήν μέθοδον τῆς ἀναπτύξεως τῶν ἀγνώστων μιγαδικῶν δυναμικῶν εἰς σειράς ἀπείρων ὅρων.

Περαιτέρω, ἡ μέθοδος τῶν μεταστάσεων ἐχρησιμοποιήθη ὑπό τοῦ LARDNER {1972} διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τοῦ ἄνευ ρωγμῆς ἐλαστικοῦ μέσου. Ὁ LARDNER ἀνήγαγε τό πρόβλημα τοῦτο ἄνευ τῆς χρήσεως τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν εἰς ἓν ἀπολύτως ἀνάλογον τοῦ (44) σύστημα ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων. Τό ἐντατικόν πεδίον μιᾶς μεταστάσεως πλησίον τοῦ εὐθυγράμμου ὁρίου δύο ἰσοτρόπων μέσων μετά ρωγμῶν ἐμελέτησαν οἱ TAMATE and KURIHARA {1970}, ἐνῷ οἱ BILBY and ESHELBY {1968} ἐπέλυσαν τό πρόβλημα τῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς διά θεωρήσεώς της ὡς σειρᾶς μεταστάσεων ἄνευ τῆς χρήσεως τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν. Ἀντιθέτως ὁ RICE {1968} ἐπέλυσε τό αὐτό πρόβλημα διά συνδυασμοῦ τῆς μεθόδου τῶν μεταστάσεων καί τῆς μεθόδου τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν.

Τέλος θά ἠθέλαμεν νά παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ εἰς τό τμῆμα τοῦτο δοθεῖσα μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου δύναται νά θεωρηθῇ ἐπέκτασις τῆς ἀκολουθηθείσης ὑπό τοῦ MIKHLIN {1957} μεθόδου διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τῆς ἐπιπέδου ροῆς ἀσυμπιέστου ρευστοῦ περί στερεόν λεῖον τόξον, ὅπου χρησιμοποιεῖται ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως δινῶν, ἀνάλογος τῶν ἐννοιῶν τῶν συναρτήσεων συγκεντρωμένων δυνάμεων καί μεταστάσεων, καί τό ὅλον πρόβλημα ἀνάγεται εἰς μίαν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν.

A2. ΕΤΕΡΑ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΛΕΙΑΣ ΡΩΓΜΗΣ ΕΝΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΙΣΟΤΡΟΠΟΥ ΜΕΣΟΥ

Κατωτέρω δίδεται μία ἑτέρα μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἰσοτρόπου μέσου. Ἡ μέθοδος αὕτη ἐμφανίζει ὀλίγον πολυπλόκους τούς χρησιμοποιουμένους τύπους, ἀλλ' οὐσιαστικῶς ἡ ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος εἴτε διά τῆς εἰς τό προηγούμενον τμῆμα A1 ἀναπτυχθείσης μεθόδου εἴτε διά τῆς ἐνταῦθα παρουσιαζομένης ἀπαιτεῖ τήν αὐτήν περίπου ἐργασίαν. Θά ἐξετάσωμεν ἐν συνεχείᾳ μόνον τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος, καθ' ὅσον ἡ ἐξέτασις τῶν περιπτώσεων τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος ὡς καί τοῦ μικτοῦ θεμελιώδους προβλήματος δύναται νά γίνῃ κατ' ἀνάλογον τρόπον.

Ἐνταῦθα θεωροῦμεν ὡς ἄγνωστον καί προσδιοριστέαν συνάρτησιν ἐπί τῆς ρωγμῆς L ὄχι τήν συνάρτησιν $\varphi(t)$ τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (1.7), ἥτις ἰσοῦται μέ τήν διαφοράν τῶν ὁριακῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ ἐπί τῆς ρωγμῆς L, κατά τήν σχέσιν (1.8α), ἀλλά τήν συνάρτησιν:

$$\omega(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \tag{1}$$

ἥτις ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ὁριακῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ ἐπί τῆς ρωγμῆς L κατά τήν σχέσιν (1.8β). Ἀντιστρέφοντες τό ὁλοκλήρωμα CAUCHY (1) εὑρίσκομεν:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i X(t)} \int_L \frac{X(\tau)\omega(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{2C_1}{X(t)}, \tag{2α}$$

ἔνθα:

$$X(z) = \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}, \tag{2β}$$

δεδομένου ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$ τείνει εἰς τό μηδέν δι' $|z| \to \infty$. Ἡ σταθερά C_1 θά προσδιορισθῇ κατωτέρω. Ἤδη οἱ τύποι (1.8) λόγῳ τῶν σχέσεων (1) καί (2) λαμβάνουν τήν μορ-

φήν:

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t) = \omega(t), \tag{3α}$$

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i X(t)} \int_L \frac{X(\tau)\omega(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{2C_1}{X(t)}, \tag{3β}$$

ἡ δέ συνάρτησις $\Phi(z)$ ἐκφράζεται, ἀντί διά τῆς σχέσεως (1.7), συναρτήσει τῆς συναρτήσεως $\omega(t)$ ὡς ἑξῆς:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X(\tau)\omega(\tau)}{\tau-z} d\tau + \frac{C_1}{X(z)}. \tag{4}$$

Εἰς τήν σχέσιν (4), ἐάν ἐφαρμόσωμεν τούς τύπους τοῦ PLEMELJ , λαμβάνομεν τάς ἰσότητας (3).

Δι' $|z| \to \infty$ λόγῳ τῆς σχέσεως (4) ἔχομεν:

$$\Phi(z) = \frac{C_1}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{5α}$$

ἀλλ' ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι δι' $|z| \to \infty$ {MUSKHELISHVILI, 1953A, §120}:

$$\Phi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)} \cdot \frac{1}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{5β}$$

λόγῳ καί τῆς σχέσεως (1.1α), ὁπότε εὑρίσκομεν εὐθύς:

$$C_1 = -\frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}, \tag{6}$$

ἤ, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν καί τόν τύπον (1.26), ἔχομεν:

$$C_1 = \frac{i\int_L q(\tau)d\tau}{\pi(\varkappa+1)}, \tag{7}$$

τῆς συναρτήσεως $q(t)$ ὁριζομένης βάσει τῆς σχέσεως (1.5β). Ἡ τιμή αὕτη τῆς σταθερᾶς C_1 εἶναι σύμφωνος πρός τήν συν-

θήκην (1.23) τοῦ μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων, ἐκ τῆς ὁποίας κατά βάσιν προέρχεται καί τό ἀνάπτυγμα (5β) τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου, λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν καί τῶν ἐκφράσεων (1.7) καί (4) τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$.

Περαιτέρω διά παραγωγίσεως τῶν σχέσεων (3) λαμβάνομεν τάς ἀκολούθους σχέσεις ἀντιστοίχους τῶν (1.10), λόγῳ καί τοῦ τύπου (1.9):

$$\Phi'^{+}(t)+\Phi'^{-}(t) = \omega'(t), \tag{8α}$$

$$\Phi'^{+}(t)-\Phi'^{-}(t) = \frac{1}{\pi i X(t)} \int_L \frac{X(\tau)\omega(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau -$$

$$- \frac{X'(t)}{\pi i X^2(t)} \int_L \frac{X(\tau)\omega(\tau)}{\tau-t} d\tau - \frac{2C_1 X'(t)}{X^2(t)} . \tag{8β}$$

Οἱ τύποι (8) δύνανται νά ἀποδειχθοῦν καί ὡς ἐξῆς: Ἐκ τοῦ τύπου (4) ἔχομεν:

$$X(z)\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{X(\tau)\omega(\tau)}{\tau-z} d\tau + C_1, \tag{9}$$

παραγωγίζοντες δέ ὡς πρός z λαμβάνομεν :

$$X'(z)\Phi(z)+X(z)\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{X(\tau)\omega(\tau)}{(\tau-z)^2} d\tau \tag{10}$$

καί ἐφαρμόζοντες τόν πρῶτον τύπον τοῦ PLEMELJ εἰς τήν σχέσιν (10) εὑρίσκομεν:

$$[X'(t)\Phi(t)+X(t)\Phi'(t)]^{+}-[X'(t)\Phi(t)+X(t)\Phi'(t)]^{-} =$$

$$= [X(t)\omega(t)]' \tag{11}$$

Δεδομένου δέ ὅτι:

$$X^{+}(t)+X^{-}(t) = 0, \quad X(t) \equiv X^{+}(t), \tag{12α}$$

$$X'^{+}(t)+X'^{-}(t) = 0, \quad X'(t) \equiv X'^{+}(t), \tag{12β}$$

ἐκ τῆς σχέσεως (11) ἕπεται λόγῳ καί τῆς (3α) ὅτι:

$$X'(t)\omega(t)+X(t)[\Phi'^{+}(t)+\Phi'^{-}(t)] =$$

$$= X'(t)\omega(t)+X(t)\omega'(t). \tag{13}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (13) ἕπεται εὐθύς ἡ (8α). Περαιτέρω βάσει τοῦ δευτέρου τύπου τοῦ PLEMELJ ἡ σχέσις (10) δίδει:

$$[X'(t)\Phi(t)+X(t)\Phi'(t)]^{+}+[X'(t)\Phi(t)+X(t)\Phi'(t)]^{-} =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{X(\tau)\omega(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau, \tag{13'}$$

δεδομένων δέ τῶν σχέσεων (12) ἕπεται λόγῳ καί τῆς σχέσεως (3β) ὅτι:

$$X'(t)\left[\frac{1}{\pi i X(t)}\int_L \frac{X(\tau)\omega(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{2C_1}{X(t)}\right]+$$

$$+X(t)[\Phi'^{+}(t)-\Phi'^{-}(t)] = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{X(\tau)\omega(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau. \tag{14}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (14) ἕπεται εὐθύς ἡ (8β).

Προχωροῦμεν ἤδη εἰς τήν ἐπίλυσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος δι'ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου. Ἰσχύουν ἀσφαλῶς, ὡς καί πρότερον, αἱ ὁριακαί συνθῆκαι (1.4). Ἐκ τούτων ἡ πρώτη λόγῳ τῶν τύπων (3α) καί (8α) δίδει:

$$\Psi^{+}(t)+\Psi^{-}(t) = \frac{\overline{dt}}{dt}[2\overline{p(t)}-\omega(t)-\overline{\omega(t)}]-\bar{t}\omega'(t). \tag{15}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης συνάγεται ὅτι ἡ συνάρτησις $\Psi(z)$, τμηματικῶς ὁλόμορφος ἐφ'ὅλου τοῦ ἐπιπέδου πλήν τῆς ρωγμῆς L, ὡς καί ἡ $\Phi(z)$, καί μέ συμπεριφοράν κατά τήν σχέσιν (1.6) εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου, δύναται νά ἐκφρασθῇ συναρτή-

σει τῆς συναρτήσεως ω(t) τοῦ τύπου (4) ὡς καί τῆς δεδομένης βάσει τῆς σχέσεως (1.5α) συναρτήσεως p(t) ὡς κάτωθι:

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i X(z)} \int_L \frac{X(\tau)\overline{p(\tau)}}{\tau - z} d\overline{\tau} - \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X(\tau)\overline{\omega(\tau)}}{\tau - z} d\overline{\tau} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X(\tau)\overline{\tau}\omega(\tau)}{(\tau - z)^2} d\tau + \frac{X'(z)}{2\pi i X^2(z)} \int_L \frac{X(\tau)\overline{\tau}\omega(\tau)}{\tau - z} d\tau +$$

$$+ \frac{C_2}{X(z)} - \frac{X'(z)}{X^2(z)} [C_3(z-\beta) + C_4(z-\alpha)], \quad C_2 = C_2^* + C_3 + C_4 , \qquad (16)$$

λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν καί τῶν σχέσεων (3), (4) καί (8). Ἡ σταθερά C_2^* προσδιορίζεται ἐκ τῆς συμπεριφορᾶς τῆς συναρτήσεως Ψ(z) δι' $|z| \to \infty$, ἥτις εἶναι ὡς γνωστόν ἡ ἑξῆς {MUSKHELISHVILI, 1953A, §120}:

$$\Psi(z) = \frac{\varkappa(X - iY)}{2\pi(\varkappa+1)} \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \qquad (17\alpha)$$

λόγῳ καί τῆς σχέσεως (1.1β).

Ἀφ'ἑτέρου ἐκ τῆς ἐκφράσεως (16) τῆς συναρτήσεως Ψ(z) συνάγομεν δι' $|z| \to \infty$:

$$\Psi(z) = \frac{C_2^*}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \qquad (17\beta)$$

ὁπότε εὑρίσκομεν εὐθύς:

$$C_2^* = \frac{\varkappa(X - iY)}{2\pi(\varkappa+1)}, \qquad (18)$$

λαμβάνοντες δέ ὑπ'ὄψιν τόν τύπον (1.26) ἔχομεν:

$$C_2^* = \frac{i\varkappa \int_L \overline{q(\tau)d\tau}}{\pi(\varkappa+1)} . \qquad (19)$$

Διά νά προσδιορίσωμεν περαιτέρω τάς σταθεράς C_3 καί C_4, λαμβάνομεν ὑπ'ὄψιν τόν τύπον {ENGLAND, 1971A, §2.5}:

$$\sigma_x-\sigma_y-2i\tau_{xy} = -2[\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)] \tag{20}$$

τόν συνδέοντα τάς τάσεις μέ τάς συναρτήσεις $\Phi'(z)$ καί $\Psi(z)$. Αἱ τάσεις ὅμως τοῦ πρώτου μέλους τοῦ ἀνωτέρου τύπου δέν δύνανται νά παρουσιάζουν ἰδιομορφίας τάξεως (-3/2) παρά τά ἄκρα α καί β τῆς ρωγμῆς, ὡς παρουσιάζουν αἱ συναρτήσεις $\Phi'(z)$ καί $\Psi(z)$ λόγῳ καί τῶν σχέσεων (2β), (4), (10) καί (16). Πρός τοῦτο αἱ σταθεραί C_3 καί C_4 πρέπει νά πληροῦν, ὡς εὐκόλως δύναται νά διαπιστωθῇ, τήν ἑξῆς συνθήκην:

$$\int_L X(\tau)\frac{\bar{\tau}-\bar{z}}{\tau-z}\omega(\tau)d\tau-2\pi i[C_1\bar{z}+C_3(z-\beta)+C_4(z-\alpha)] = 0 \tag{21}$$

διά $z = \alpha$ καί $z = \beta$, ὁπότε προκύπτουν αἱ κάτωθι ἐκφράσεις τῶν σταθερῶν C_3 καί C_4:

$$C_3 = \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L X(\tau)\frac{\bar{\tau}-\bar{\alpha}}{\tau-\alpha}\omega(\tau)d\tau-C_1\bar{\alpha}\right], \tag{22α}$$

$$C_4 = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L X(\tau)\frac{\bar{\tau}-\bar{\beta}}{\tau-\beta}\omega(\tau)d\tau-C_1\bar{\beta}\right], \tag{22β}$$

τῆς σταθερᾶς C_1 διδομένης ὑπό τοῦ τύπου (7).

Ἤδη ἐφαρμόζοντες τόν δεύτερον τύπον τοῦ PLEMELJ εἰς τήν σχέσιν (16) εὑρίσκομεν διά τήν διαφοράν τῶν ὁριακῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\Psi(z)$ ἐπί τῆς ρωγμῆς L τόν τύπον:

$$\begin{aligned}\Psi^+(t)-\Psi^-(t) &= \frac{2}{\pi i X(t)}\int_L \frac{X(\tau)\overline{p(\tau)}}{\tau-t}d\bar{\tau}- \\ &- \frac{1}{\pi i X(t)}\int_L \frac{X(\tau)\overline{\omega(\tau)}}{\tau-t}d\bar{\tau}- \frac{1}{\pi i X(t)}\int_L \frac{X(\tau)\bar{\tau}\omega(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau+ \\ &+ \frac{X'(t)}{\pi i X^2(t)}\int_L \frac{X(\tau)\bar{\tau}\omega(\tau)}{\tau-t}d\tau+ \frac{2C_2}{X(t)}- \frac{2X'(t)}{X^2(t)}\{C_3(t-\beta)+C_4(t-\alpha)\}.\end{aligned} \tag{23}$$

Δέν μένει πλέον παρά νά λάβωμεν ὑπ'ὄψιν τάς σχέσεις (3β), (8β) καί (23) καί νά γράψωμεν τήν ὁριακήν συνθήκην (1.4β), τήν ὁποίαν δέν ἐχρησιμοποιήσαμεν μέχρι τοῦδε, ὑπό τήν κάτωθι μορφήν:

$$\frac{1}{\pi i X(t)}\int_L \frac{X(\tau)\omega(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{2C_1}{X(t)}-\frac{1}{\pi i\overline{X(t)}}\int_L \frac{\overline{X(\tau)}\,\overline{\omega(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{d\tau}+$$

$$+\frac{2\overline{C}_1}{\overline{X(t)}}-\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{1}{\pi i X(t)}\int_L \frac{X(\tau)\overline{\omega(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}+\right.$$

$$+\frac{1}{\pi i X(t)}\int_L \frac{X(\tau)(\overline{\tau}-\overline{t})\omega(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau-$$

$$-\frac{X'(t)}{\pi i X^2(t)}\left[\int_L \frac{X(\tau)(\overline{\tau}-\overline{t})\omega(\tau)}{\tau-t}d\tau-\right.$$

$$\left.\left.-2\pi i\,[C_1\overline{t}+C_3(t-\beta)+C_4(t-\alpha)]\right]-\frac{2C_2}{X(t)}\right\}=$$

$$=2\overline{q(t)}-\frac{dt}{\overline{dt}}\,\frac{2}{\pi i X(t)}\int_L \frac{X(\tau)\overline{p(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}, \qquad (24)$$

ὅτε λαμβάνομεν μίαν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν ἐπί τῆς ρωγμῆς L μέ ἄγνωστον συνάρτησιν τήν ω(t). Ἐπιλυομένης ταύτης καί εὑρισκομένης τῆς συναρτήσεως ω(t) ἐκ τῶν τύπων (4) καί (16) δύνανται νά προσδιορισθοῦν αἱ μιγαδικαί συναρτήσεις Φ(z) καί Ψ(z) τῶν σταθερῶν C_1 καί C_2 διδομένων ὑπό τῶν τύπων (7) καί (16,19) ἀντιστοίχως. Ὁπωσδήποτε βεβαίως πρέπει νά πληροῦται καί ἡ συνθήκη μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων (1.23), ἥτις λόγῳ τῆς σχέσεως (2α) δύναται νά γραφῇ συναρτήσει τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως ω(t) τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (24) ὡς ἑξῆς:

$$-\frac{1}{\pi i}\int_L X(t)\omega(t)\int_L \frac{d\tau}{X(\tau)(\tau-t)}dt+2C_1\int_L \frac{dt}{X(t)}=$$

$$=\frac{2}{\varkappa+1}\int_L q(t)\,dt\,. \qquad (25)$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τάς σχέσεις (1) καί (2) δυνάμεθα νά παρουσιάσωμεν τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (1.15) ὑπό τήν ἑξῆς μορφήν:

$$\omega(t)+\overline{\omega(t)}-\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{1}{\tau-t}\left[-\frac{1}{\pi i\overline{X(\tau)}}\int_L\frac{\overline{X(\tau')}\,\overline{\omega(\tau')}}{\overline{\tau}'-\overline{\tau}}\overline{d\tau}'+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{2\overline{C}_1}{\overline{X(\tau)}}\right]\overline{d\tau}+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{(\tau-t)^2}\left[\frac{1}{\pi i X(\tau)}\int_L\frac{X(\tau')\omega(\tau')}{\tau'-\tau}d\tau'+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2C_1}{X(\tau)}\right]d\tau\right\}=2\overline{p(t)}-\frac{dt}{\overline{dt}}\frac{2}{\pi i}\int_L\frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}. \qquad (26)$$

Ἡ ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (26), καίτοι ἐμφανίζεται ὡς ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις καί μάλιστα πολυπλόκου δομῆς, ἐν τούτοις εἶναι ἰσοδύναμος μέ ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν FREDHOLM δευτέρου εἴδους. Ἵνα διαπιστώσωμεν τοῦτο ἀρκεῖ νά λάβωμεν ὑπ'ὄψιν ὅτι βάσει τῶν σχέσεων (1) καί (2) ἔχομεν:

$$\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{(\tau-t)^2}\varphi(\tau)\,d\tau\right]=$$

$$=\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{1}{\overline{\tau}-\overline{t}}\left(\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}-\frac{\overline{dt}}{dt}\right)\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{1}{\tau-t}\left(\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}-\frac{\overline{dt}}{dt}\right)\varphi(\tau)\,d\tau\right]+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{d\tau}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{1}{\overline{\tau}-\overline{t}}\left(\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}-\frac{\overline{dt}}{dt}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\left[-\frac{1}{\pi i\overline{X(\tau)}}\int_L\frac{\overline{X(\tau')}\,\overline{\omega(\tau')}}{\overline{\tau}'-\overline{\tau}}\overline{d\tau}'+\frac{2\overline{C}_1}{\overline{X(\tau)}}\right]\overline{d\tau}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{1}{\tau-t}\left(\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}-\frac{\overline{dt}}{dt}\right)\left[\frac{1}{\pi i X(\tau)}\int_L\frac{X(\tau')\omega(\tau')}{\tau'-\tau}d\tau'+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2C_1}{X(\tau)}\right]d\tau\right\}-\overline{\omega(t)}+\omega(t)+\frac{2\overline{C}_1}{\pi i}\int_L\frac{\overline{d\tau}}{\overline{X(\tau)}\,(\overline{\tau}-\overline{t})}+$$

$$+\frac{2C_1}{\pi i}\int_L\frac{d\tau}{X(\tau)\,(\tau-t)}\,, \qquad (27)$$

ὁπότε λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν καί τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (1.15) δυνάμεθα νά ἀπλοποιήσωμεν τήν ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (26) ὡς ἐξῆς:

$$\overline{\omega(t)}+\frac{dt}{\overline{dt}}\cdot\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{X(\tau')}\,\overline{\omega(\tau')}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{1}{\overline{X(\tau)}\,(\overline{\tau}-\overline{t})\,(\overline{\tau}'-\overline{\tau})}\left(\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\overline{dt}}{dt}\right)\overline{d\tau}\,\overline{d\tau}'-\frac{1}{2\pi i}\int_L X(\tau')\,\omega(\tau')\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{1}{X(\tau)\,(\tau-t)\,(\tau'-\tau)}\cdot$$

$$\left.\cdot\left(\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}-\frac{\overline{dt}}{dt}\right)d\tau d\tau'\right]=\overline{p(t)}-\frac{dt}{\overline{dt}}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}+$$

$$+\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\overline{C}_1\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{d\tau}}{\overline{X(\tau)}\,(\tau-t)}+C_1\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{(\overline{\tau}-\overline{t})\,d\tau}{X(\tau)\,(\tau-t)^2}\right], \qquad (28)$$

ὅτε προκύπτει πλέον ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις τύπου FREDHOLM δευτέρου εἴδους. Ἡ γενομένη ἀντιστροφή τῆς σειρᾶς ὁλοκληρώσεως εἰς τά δύο διπλᾶ ὁλοκληρώματα τῆς σχέσεως (27) ἐπιτρέπεται, δεδομένου ὅτι οἱ πυρῆνες κατά τάς δευτέρας ὁλοκληρώσεις ὡς πρός τήν μεταβλητήν τ δέν εἶναι ἰδιόμορφοι κατά CAUCHY.

Κατ'ἀνάλογον τρόπον δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν καί ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν τύπου FREDHOLM δευτέρου εἴδους μέ ἄγνωστον συνάρτησιν φ(t) ἐκκινοῦντες ἐκ τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (24), ἥτις λόγῳ τῶν σχέσεων (1) καί (2) δύναται νά γραφῇ ὡς ἐξῆς:

$$\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}-\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{-\frac{1}{\pi i X(t)}\int_L \frac{X(\tau)}{\tau-t}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau')}\,\overline{d\tau'}}{\overline{\tau}'-\overline{\tau}}d\tau+\right.$$

$$+\frac{1}{\pi i X(t)}\int_L \frac{X(\tau)\,(\overline{\tau}-\overline{t})}{(\tau-t)^2}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau')\,d\tau'}{\tau'-\tau}d\tau-$$

$$-\frac{X'(t)}{\pi i X^2(t)}\int_L \frac{X(\tau)\,(\overline{\tau}-\overline{t})}{(\tau-t)^2}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau')\,d\tau'}{\tau'-\tau}d\tau+\frac{2X'(t)}{X^2(t)}\left[C_1\overline{t}+\right.$$

$$+C_3(t-\beta)+C_4(t-\alpha)\Big]-\frac{2C_2}{X(t)}\Bigg\} = 2\overline{q(t)}-$$

$$-\frac{dt}{\overline{dt}}\frac{2}{\pi i X(t)}\int_L \frac{X(\tau)\overline{p(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}\ . \tag{29}$$

Ἡ ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (29), καίτοι ἐμφανίζεται ὡς ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις καί μάλιστα πολυπλόκου μορφῆς, ἐν τούτοις εἶναι ἰσοδύναμος μέ ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν FREDHOLM δευτέρου εἴδους. Ἵνα διαπιστώσωμεν τοῦτο, ἀρκεῖ νά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι βάσει τῶν σχέσεων (1) καί (2) ἔχομεν:

$$\frac{dt}{\overline{dt}}\Bigg[\frac{1}{\pi i X(t)}\int_L \frac{X(\tau)\overline{\omega(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}+\frac{1}{\pi i X(t)}\int_L \frac{X(\tau)(\overline{\tau}-\overline{t})\omega(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau-$$

$$-\frac{X'(t)}{\pi i X^2(t)}\int_L \frac{X(\tau)(\overline{\tau}-\overline{t})\omega(\tau)}{\tau-t}d\tau\Bigg] =$$

$$= \frac{dt}{\overline{dt}}\Bigg[\frac{1}{\pi i\overline{X(t)}}\int_L \frac{\overline{X(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\left(\frac{X(\tau)}{\overline{X(\tau)}}\,\frac{\overline{X(t)}}{X(t)}\,\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}-\frac{\overline{dt}}{dt}\right)\overline{\omega(\tau)}\,\overline{d\tau}+$$

$$+\frac{1}{\pi i X(t)}\int_L \frac{X(\tau)}{\tau-t}\left(\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}-\frac{\overline{dt}}{dt}\right)\omega(\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{X'(t)}{\pi i X^2(t)}\int_L X(\tau)\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}\omega(\tau)\,d\tau\Bigg]+\frac{1}{\pi i\overline{X(t)}}\int_L \frac{\overline{X(\tau)}\,\overline{\omega(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{d\tau}+$$

$$+\frac{1}{\pi i X(t)}\int_L \frac{X(\tau)\omega(\tau)}{\tau-t}d\tau = \frac{dt}{\overline{dt}}\cdot$$

$$\cdot\Bigg[-\frac{1}{\pi i\overline{X(t)}}\int_L \frac{\overline{X(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\left(\frac{X(\tau)}{\overline{X(\tau)}}\,\frac{\overline{X(t)}}{X(t)}\,\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}-\frac{\overline{dt}}{dt}\right)\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau')}\,\overline{d\tau'}}{\overline{\tau'}-\overline{\tau}}d\tau+$$

$$+\frac{1}{\pi i X(t)}\int_L \frac{X(\tau)}{\tau-t}\left(\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}-\frac{\overline{dt}}{dt}\right)\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau')\,d\tau'}{\tau'-\tau}d\tau-$$

$$-\frac{X'(t)}{\pi i X^2(t)}\int_L X(\tau)\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau')\,d\tau'}{\tau'-\tau}d\tau\Bigg]\overline{\varphi(t)}+\varphi(t)+\frac{2\overline{C}_1}{\overline{X(t)}}-$$

$$-\frac{2C_1}{X(t)}\ . \tag{30}$$

ὁπότε λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν καί τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (24) δυνάμεθα νά ἀπλοποιήσωμεν τήν ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (29) ὡς ἐξῆς:

$$\overline{\varphi(t)}+\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\frac{1}{2\pi i\overline{X(t)}}\int_L\overline{\varphi(\tau')}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\overline{X(\tau)}}{(\overline{\tau}-\overline{t})(\overline{\tau}'-\overline{\tau})}\left(\frac{X(\tau)}{\overline{X(\tau)}}\frac{\overline{X(t)}}{X(t)}\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\overline{dt}}{dt}\right)\overline{d\tau}\,\overline{d\tau}'-\frac{1}{2\pi iX(t)}\int_L\varphi(\tau')\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{X(\tau)}{(\tau-t)(\tau'-\tau)}\left(\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\overline{dt}}{dt}\right)d\tau d\tau'+\frac{X'(t)}{2\pi iX^2(t)}\int_L\varphi(\tau')\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{X(\tau)}{\tau'-\tau}\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}d\tau d\tau'\right]=$$

$$=\overline{q(t)}-\frac{dt}{\overline{dt}}\frac{1}{\pi iX(t)}\int_L\frac{X(\tau)\overline{p(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}+\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{2X'(t)}{X^2(t)}\left[C_1\overline{t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+C_3(t-\beta)+C_4(t-\alpha)\right]-\frac{2C_2}{X(t)}\right\}+\frac{2\overline{C}_1}{\overline{X(t)}}-\frac{2C_1}{X(t)}\,. \qquad (31)$$

Κατ'αὐτόν τόν τρόπον ἐσχηματίσθησαν τέσσαρες συνολικῶς ὁλοκληρωτικαί ἐξισώσεις διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου μέσου. Ἐξ αὐτῶν αἱ (1.15) καί (24) εἶναι ἰδιόμορφοι ὁλοκληρωτικαί ἐξισώσεις μέ ἀγνώστους συναρτήσεις τάς πυκνότητας $\varphi(t)$ καί $\omega(t)$ τῶν ὁλοκληρωμάτων CAUCHY (1.7) καί (4) ἀντιστοίχως, ἐνῷ αἱ (28) καί (31) εἶναι ὁλοκληρωτικαί ἐξισώσεις FREDHOLM δευτέρου εἴδους, τῶν ὁποίων οἱ πυρῆνες δέν παρουσιάζουν ἰδιομορφίας κατά CAUCHY, μέ ἀγνώστους συναρτήσεις πάλιν τάς $\varphi(t)$ καί $\omega(t)$ ἀντιστοίχως. Αἱ παρουσιαζόμεναι σταθεραί C_1 καί C_2 δίδονται ὑπό τῶν τύπων (7) καί (16,19) ἀντιστοίχως, ἡ δέ συνθήκη μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων εἶναι ἡ (1.23) ἤ ἡ (25) ἀναλόγως τοῦ ἐάν ἄγνωστος συνάρτησις εἶναι ἡ $\varphi(t)$ ἤ ἡ $\omega(t)$. Αἱ συναρτήσεις $\varphi(t)$ καί $\omega(t)$ συνδέονται μεταξύ των διά τῶν σχέσεων (1) καί (2), αἵτινες λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν καί τῶν σχέσεων (1.7) καί (4) δύνανται νά θεωρηθοῦν ὡς ἐκφράζουσαι τούς τύπους τοῦ PLEMELJ. Ἀνωτέρω ἐδείχθη ὅτι αἱ ὁλοκληρωτικαί ἐξισώσεις (1.15) καί (28) ὡς

καί αἱ (24) καί (31) εἶναι ἀπολύτως ἰσοδύναμοι μεταξύ των καθ'ὅσον, ὡς ἀνωτέρω ἐξετέθη,αἱ (28) καί (31) προκύπτουν ἐκ τῶν (1.15) καί (24) ἀντιστοίχως.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Αἱ ἐκτεθεῖσαι εἰς τό τμῆμα τοῦτο μέθοδοι ἐπιλύσεως τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος δι' ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου ἀποτελοῦν ἐναλλακτικάς μεθόδους ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος τούτου πέραν τῆς ἀναπτυχθείσης εἰς τό τμῆμα Α1, πλήν ἀρκετά ὁμοίας κατά τόν τρόπον ἐργασίας ἐκείνης. Προσέτι εἰς τά ἑπόμενα τμήματα Α2-Α5 θά δοθοῦν τρεῖς ἀκόμη μέθοδοι ἀντιμετωπίσεως τοῦ αὐτοῦ προβλήματος.

Καίτοι ἐν γένει δέον ὅπως ἡ ἀναπτυχθεῖσα εἰς τό τμῆμα Α1 μέθοδος ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου προτιμᾶται τῶν παρομοίων της εἰς τό παρόν τμῆμα καί εἰς τά ἑπόμενα τμήματα Α2 ἕως Α5 ἀναπτυσσομένων μεθόδων, ἐν τούτοις αἱ τελευταῖαι αὗται μέθοδοι ἀποδεικνύουν κατά τόν καλύτερον τρόπον ὅτι ἕν πρόβλημα ρωγμῆς δύναται νά ἀντιμετωπισθῇ διά πολλῶν τρόπων κατά βάσιν βεβαίως ἀρκετά ἀναλόγων.

Ἐπειδή τό πρόβλημα τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου εἶναι τό πρῶτον ἐξεταζόμενον εἰς τήν μελέτην ταύτην, διά τοῦτο καί δίδονται δι' αὐτό πολλοί τρόποι ἀντιμετωπίσεως, οἵτινες θά ἠδύναντο διά καταλλήλων τροποποιήσεων νά χρησιμοποιηθοῦν καί δι' ἄλλα περαιτέρω ἐξεταζόμενα προβλήματα. Εἰδικώτερον αἱ εἰς τό παρόν τμῆμα ἀναπτυσσόμεναι μέθοδοι χρησιμοποιοῦνται μίαν εἰσέτι φοράν εἰς τό τμῆμα Α9 διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου.

A3. ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΛΕΙΑΣ ΡΩΓΜΗΣ ΕΝΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΙΣΟΤΡΟΠΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ $\varphi_o(z)$ ΚΑΙ $\psi_o(z)$

Διά τήν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων τῆς ἐλαστικότητος δύνανται νά χρησιμοποιηθοῦν ἀντί τῶν χρησιμοποιηθέντων εἰς τά τμήματα A1 καί A2 μιγαδικῶν δυναμικῶν $\Phi_o(z)$ καί $\Psi_o(z)$ τά μιγαδικά δυναμικά $\varphi_o(z)$ καί $\psi_o(z)$. Μεταξύ τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν τούτων ὑφίστανται αἱ σχέσεις ὁρισμοῦ {MUSKHELISHVILI, 1953A, §32}:

$$\Phi_o(z) = \varphi_o'(z) \quad , \quad \Psi_o(z) = \psi_o'(z) \ . \tag{1}$$

Συνήθως κατά τήν ἐπίλυσιν διαφόρων προβλημάτων τῆς ἐλαστικότητος προτιμᾶται ἡ χρῆσις τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν $\varphi_o(z)$ καί $\psi_o(z)$ πλήν τῶν προβλημάτων ρωγμῶν, ὅπου χρησιμοποιοῦνται πάντοτε τά μιγαδικά δυναμικά $\Phi_o(z)$ καί $\Psi_o(z)$. Ἡ χρῆσις τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν $\varphi_o(z)$ καί $\psi_o(z)$ ἔχει τό πλεονέκτημα ὅτι ἡ συνθήκη μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων δέν εἶναι ἀνάγκη νά λαμβάνεται ἰδιαιτέρως ὑπ' ὄψιν, ἀλλ' ἔχει καί τό μειονέκτημα ὅτι, ἐν ᾗ περιπτώσει ἡ συνισταμένη δύναμις τῆς ἐξασκουμένης ἐπί μιᾶς ὁπῆς ἤ ρωγμῆς φορτίσεως δέν εἶναι μηδενική, ταῦτα δέν ὁρίζονται μονοσημάντως μέ ἀποτέλεσμα ἡ ἐπίλυσις ἑνός ἐλαστικοῦ προβλήματος νά καθίσταται δυσχερής, ἰδίως μάλιστα ἐάν πρόκειται περί προβλήματος ρωγμῆς, ὡς θά γίνῃ ἀντιληπτόν καί ἐκ τῆς κατωτέρω ἀναπτύξεως.

Θεωροῦμεν οὕτω, ὡς καί εἰς τό τμῆμα A1, τήν ρωγμήν τοῦ Σχήματος 1.1 μέ ἄκρα τά σημεῖα α καί β ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου. Ἡ κάθετος φόρτισις $\sigma_n^{\pm}(t)$ καί ἡ διατμητική φόρτισις $\sigma_t^{\pm}(t)$ κατά μῆκος τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς θεωροῦνται γνωσταί ὡς ἐπίσης καί αἱ σταθεραί Γ καί Γ', αἵτινες κατά τούς τύπους (1.2) χαρακτηρίζουν τήν φόρτισιν καί τήν περιστροφήν εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου. Θά προσδιορίσωμεν κατωτέρω τά μιγαδικά δυναμικά $\varphi_o(z)$ καί $\psi_o(z)$ καθ' ὅλον τό

ἰσότροπον ἐπίπεδον.

Ἐάν θεωρηθῇ ἡ συνισταμένη δύναμις (X,Y) τῆς ἐξασκουμένης ἐπί τῆς ρωγμῆς φορτίσεως ἡ διδομένη ὑπό τοῦ τύπου (1.26) συναρτήσει τῆς διδομένης ὑπό τοῦ τύπου (1.5β) συναρτήσεως $\sigma(t)$, τότε εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου αἱ συναρτήσεις $\varphi_o(z)$ καί $\psi_o(z)$ θά ἔχουν τήν μορφήν {MUSKHELISHVILI, 1953A, §36}:

$$\varphi_o(z) = \Gamma z - \frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}\ln z + \varphi(z) \quad , \tag{2α}$$

$$\psi_o(z) = \Gamma' z + \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(\varkappa+1)}\ln z + \psi(z) \quad , \tag{2β}$$

ἔνθα αἱ συναρτήσεις $\varphi(z)$ καί $\psi(z)$ τείνουν πρός σταθεράς τιμάς, αἵτινες δύνανται νά θεωρηθοῦν καί μηδέν, εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου.

Διά παραγωγίσεως τῶν ἐκφράσεων (2) τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν $\varphi_o(z)$ καί $\psi_o(z)$ δύνανται νά ληφθοῦν αἱ ἐκφράσεις (1) τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν $\Phi_o(z)$ καί $\Psi_o(z)$, ἐάν θεωρηθῇ ὅτι:

$$\Phi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{z} + \varphi'(z) \quad , \quad \Psi(z) = \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{z} + \psi'(z) \quad . \tag{3}$$

Λόγῳ τῶν ἐκφράσεων (2) ἀρκεῖ ἐπομένως νά προσδιορίσωμεν τάς μιγαδικάς συναρτήσεις $\varphi(z)$ καί $\psi(z)$. Θά ὑποθέσωμεν κατ' ἀρχήν ὅτι ἡ συνισταμένη δύναμις (X,Y) τῆς ἐξασκουμένης ἐπί τῆς ρωγμῆς φορτίσεως εἶναι μηδέν, ὅτε, λόγῳ καί τῶν τύπων (1.5β) καί (1.26), θά ἔχωμεν:

$$X+iY = 0 \quad , \quad \int_L \sigma(\tau)\,d\tau = 0 \quad ,$$

$$\int_L \left[\sigma_n^+(\tau)+i\sigma_t^+(\tau)\right] d\tau = \int_L \left[\sigma_n^-(\tau)+i\sigma_t^-(\tau)\right] d\tau \quad , \tag{4}$$

τά δέ μιγαδικά δυναμικά $\varphi_o(z)$ καί $\psi_o(z)$ θά εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένα εἰς ὁλόκληρον τό ἐπίπεδον.

Ἤδη τό ἐξεταζόμενον πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα δι' ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου ἀνάγεται εἰς τάς ἐξῆς ὁριακάς συνθήκας ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς {MUSKHELISHVILI, 1953A, §98}:

$$\overline{\varphi^{\pm}(t)} + \bar{t}\varphi'^{\pm}(t) + \psi^{\pm}(t) = \overline{f^{\pm}(t)} \ , \tag{5}$$

ἔνθα ἐτέθη λόγῳ καί τῆς τρίτης τῶν σχέσεων (4):

$$f^{\pm}(t) = \int_{\alpha}^{t} \left[\sigma_n^{\pm}(\tau) + i\sigma_t^{\pm}(\tau)\right] d\tau - (\Gamma + \bar{\Gamma})\, t - \bar{\Gamma}'\bar{t} \tag{6}$$

τῆς ὁλοκληρώσεως θεωρουμένης ἀπό τοῦ ἄκρου α μέχρι τοῦ τυχόντος σημείου t τῆς ρωγμῆς καί κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς.

Ἐκ τῆς σχέσεως (6) ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων $f^{\pm}(t)$, λόγῳ καί τῆς ὑποτεθείσης ὡς ἰσχυούσης σχέσεως (4), ἕπεται ὅτι:

$$f^{+}(\alpha) = f^{-}(\alpha) \quad , \quad f^{+}(\beta) = f^{-}(\beta) \ . \tag{7}$$

Θεωροῦμεν ἤδη, ἀναλόγως πρός ὅ,τι ἐπράξαμεν εἰς τό τμῆμα A1, τήν μιγαδικήν συνάρτησιν $\varphi(z)$, ἥτις, ὡς καί ἡ $\psi(z)$, εἶναι ἀναλυτική ἐφ' ὅλου τοῦ ἐπιπέδου πλήν τῆς ρωγμῆς καί δύναται νά θεωρηθῇ μηδενιζομένη εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου, ἐκφραζομένην ὑπό τήν μορφήν ὁλοκληρώματος CAUCHY ἤτοι:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - z}\, d\tau \ , \tag{8}$$

τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης $\omega(t)$ εἶναι ἄγνωστος πρός τό παρόν.

Λόγῳ τῶν τύπων τοῦ PLEMELJ, ἐκ τῆς ἐκφράσεως (8) τῆς συναρτήσεως $\varphi(z)$ συνάγομεν τάς ἑξῆς σχέσεις διά τάς ὁριακάς τιμάς της ἐπί τῆς ρωγμῆς L:

$$\varphi^{+}(t) - \varphi^{-}(t) = \omega(t) \ , \tag{9α}$$

$$\varphi^{+}(t) + \varphi^{-}(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \ . \tag{9β}$$

Ὁμοίως οἱ τύποι τοῦ PLEMELJ δίδουν διά τάς ὁριακάς τιμάς τῆς συναρτήσεως $\psi(z)$ ἐπί τῆς ρωγμῆς:

$$\psi^{+}(t) + \psi^{-}(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi^{+}(\tau) - \psi^{-}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \ . \tag{10}$$

Περαιτέρω ἀθροίζοντες καί ἀφαιροῦντες κατά μέλη τάς ὁριακάς συνθήκας (5) εὑρίσκομεν:

$$\psi^+(t)\pm\psi^-(t) = \overline{f^+(t)}\pm\overline{f^-(t)}-\left[\overline{\varphi^+(t)}\pm\overline{\varphi^-(t)}\right]-$$

$$-\bar{t}\left[\varphi'^+(t)\pm\varphi'^-(t)\right] , \tag{11}$$

ὁπότε ὁ τύπος (10), λόγῳ καί τῶν (9), γράφεται:

$$\overline{f^+(t)}+\overline{f^-(t)} + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\bar{\tau}-\bar{t}}\,\overline{d\tau}-\frac{\bar{t}}{\pi i}\int_L \frac{\omega'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{f^+(\tau)}-\overline{f^-(\tau)}}{\tau-t}\,d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\tau-t}\,d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\bar{\tau}\omega'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau , \tag{12}$$

ἔνθα ἐλήφθησαν ὑπ' ὄψιν καί οἱ προκύπτοντες ἐκ τῶν τύπων (9) λόγῳ καί τῆς σχέσεως (1.9) τύποι:

$$\varphi'^+(t)-\varphi'^-(t) = \omega'(t) , \tag{13α}$$

$$\varphi'^+(t)+\varphi'^-(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{(\tau-t)^2}\,d\tau = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau . \tag{13β}$$

Διά τόν τελευταῖον τοῦτον τύπον (13β) ἐλήφθη ὑπ' ὄψιν ὅτι εἰς τά ἄκρα α καί β τῆς ρωγμῆς αἱ ὁριακαί τιμαί τῆς συναρτήσεως $\varphi(z)$ μηδενίζονται, ὁπότε, λόγῳ καί τοῦ τύπου (9α) μηδενίζονται καί αἱ τιμαί τῆς συναρτήσεως $\omega(t)$, ἤτοι:

$$\omega(\alpha) = \omega(\beta) = 0 . \tag{14}$$

Ἄλλως ἡ γενομένη εἰς τόν τύπον (13β) ὁλοκλήρωσις κατά μέλη δέν θά ἦτο ἐπιτρεπτή.

Ἐάν ἀκολούθως τεθῇ:

$$h(t) = -\left[\overline{f^+(t)}+\overline{f^-(t)}\right] + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{f^+(\tau)}-\overline{f^-(\tau)}}{\tau-t}\,d\tau , \tag{15}$$

ἡ σχέσις (12), ἥτις κατά βάσιν ἀποτελεῖ μίαν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν μέ ἄγνωστον συνάρτησιν τήν $\omega(t)$, λαμβάνει τήν μορφήν:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \overline{\omega(\tau)}\left[\frac{d\tau}{\tau-t} + \frac{\overline{d\tau}}{\bar{\tau}-\bar{t}}\right] + \frac{1}{\pi i}\int_L \omega'(\tau)\frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{\tau-t}\,d\tau = h(t) \tag{16}$$

μέ τήν συνάρτησιν $h(t)$ δυναμένην νά ὑπολογισθῇ βάσει τῶν

τύπων (6) καί (15).

Ἐν συνεχείᾳ, δι' ὁλοκληρώσεως κατά μέλη τοῦ δευτέρου ὅρου τοῦ ἀριστεροῦ μέλους τῆς ἐξισώσεως (16) καί λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν σχέσεων (14) προκύπτει ἡ κάτωθι ἰσοδύναμος μορφή τῆς ἐξισώσεως (16):

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \overline{\omega(\tau)}\left[\frac{d\tau}{\tau-t}+\frac{\overline{d\tau}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\right]-\frac{1}{\pi i}\int_L \omega(\tau)\,d\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t} = h(t) \quad . \tag{17}$$

Θέτοντες περαιτέρω:

$$\tau-t = re^{i\vartheta} \tag{18}$$

εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$\frac{d\tau}{\tau-t} = \frac{dr}{r}+i\,d\vartheta \quad , \quad \frac{\overline{d\tau}}{\overline{\tau}-\overline{t}} = \frac{dr}{r}-i\,d\vartheta \tag{19}$$

καί ἐπίσης ὅτι:

$$d\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t} = -2ie^{-2i\vartheta}d\vartheta \quad , \tag{20}$$

ἔνθα:

$$d\vartheta = \frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau}\,d\tau = \vartheta'(\tau)\,d\tau \quad . \tag{21}$$

Λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν σχέσεων (18) ἕως (21), ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (17) δύναται νά γραφῇ καλύτερον ὡς ἑξῆς:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\tau-t}\,d\tau+\frac{1}{\pi}\int_L \left\{\overline{\omega(\tau)}+\omega(\tau)e^{-2i\vartheta}\right\}\vartheta'(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}h(t) \quad . \tag{22}$$

Ἡ μιγαδική ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (22) δύναται περαιτέρω νά ἀναλυθῇ εἰς δύο ἰδιομόρφους ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις μέ ἀγνώστους συναρτήσεις τό πραγματικόν καί τό φανταστικόν μέρος τῆς ἀγνώστου πυκνότητος $\omega(\tau)$ τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (8). Ἄλλως, δύναται νά θεωρηθῇ καί ἡ συζυγής ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις τῆς (22), ὅτε ἔχομεν πάλιν δύο ἰδιομόρφους ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις μέ ἀγνώστους

συναρτήσεις τάς $\omega(\tau)$ καί $\overline{\omega(\tau)}$. Αἱ ἰδιόμορφοι αὗται ὁλοκληρωτικαί ἐξισώσεις δέν δύνανται ἐν γένει νά τύχουν λύσεως κλειστῆς μορφῆς, ἀλλ' ἠμποροῦν νά ἐπιλυθοῦν διά τῶν ἀναπτυσσομένων εἰς τό Κεφάλαιον Γ μεθόδων.

Εὐθύς ὡς προσδιορισθῇ ἡ ἄγνωστος συνάρτησις $\omega(\tau)$, ἡ ζητουμένη μιγαδική συνάρτησις $\varphi(z)$ δύναται νά προκύψῃ ἐκ τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (8), ἡ δέ μιγαδική συνάρτησις $\psi(z)$ ἐκ τοῦ τύπου:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f^+(\tau)}-\overline{f^-(\tau)}-\overline{\omega(\tau)}-\overline{\tau}\omega'(\tau)}{\tau-z}\,d\tau \tag{23}$$

εὑρισκομένου ἐκ τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (5), ἐάν ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν καί οἱ τύποι (9α) καί (13α). Δύναται ὡσαύτως νά σημειωθῇ ὅτι ἀμφότεραι αἱ συναρτήσεις $\varphi(z)$ καί $\psi(z)$ ὁρίζονται κατά προσέγγισιν σταθερᾶς, μεταβολή τῆς ὁποίας δέν μεταβάλλει τό πεδίον τῶν τάσεων.

Ἐάν ἤδη παραγωγίσωμεν τόν τύπον (8) καί λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τάς σχέσεις (3), (4) καί (14) εὑρίσκομεν διά τήν συνάρτησιν $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega'(\tau)}{\tau-z}\,d\tau\ , \tag{24}$$

Ὁ τύπος (24) συμπίπτει μετά τοῦ (1.7) ἀρκεῖ νά θεωρηθῇ ὅτι:

$$\varphi(\tau) = \omega'(\tau)\ . \tag{25}$$

Ἐθεωρήθη δηλαδή εἰς τό τμῆμα τοῦτο ὡς ἄγνωστος συνάρτησις $\omega(\tau)$ ἐπί τῆς ρωγμῆς τό ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\varphi(\tau)$, ἥτις ἦτο ἡ ἄγνωστος συνάρτησις εἰς τήν ἐκτεθεῖσαν εἰς τό τμῆμα A1 μέθοδον. Τό γεγονός τοῦτο δύναται νά φανῇ καλύτερον, ἐάν παραγωγισθῇ ὡς πρός $\overline{t}$ ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (17) ἤ μᾶλλον ἡ ἰσοδύναμος ταύτης (16), ὅτε προκύπτει:

$$\frac{dt}{\overline{dt}}\frac{1}{\pi i}\int_L \overline{\omega'(\tau)}\,\frac{\overline{d\tau}}{\overline{dt}}\,\frac{d\tau}{\tau-t} + \frac{1}{\pi i}\int_L \overline{\omega'(\tau)}\,\frac{\overline{d\tau}}{\overline{\tau}-\overline{t}} - \frac{1}{\pi i}\int_L \omega'(\tau)\,\frac{d\tau}{\tau-t} + \frac{dt}{\overline{dt}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\pi i}\int_L \omega'(\tau)\,\frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{(\tau-t)^2}\,d\tau = -2\overline{p(t)}+\frac{dt}{\overline{dt}}\,\frac{2}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\sigma(\tau)}}{\tau-t}\,\overline{d\tau}\ , \qquad (26)$$

ἔνθα ἐλήφθησαν ὑπ' ὄψιν αἱ σχέσεις (1.5), (6) καί (15), ἐκ τῶν ὁποίων ἔπονται αἱ:

$$2p(t) = f'^{+}(t)+f'^{-}(t)\ , \quad 2\sigma(t) = f'^{+}(t)-f'^{-}(t)\ . \qquad (27)$$

Ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (26) συμπίπτει μέ τήν εὑρεθεῖσαν εἰς τό τμῆμα A1 ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (1.15), ἀρκεῖ νά ληφθῇ ὑπ' ὄψιν καί ἡ σχέσις (25). Ἐν τούτοις ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (1.15) εἶναι γενικωτέρα τῆς (17), καθ' ὅσον ἰσχύει καί διά τήν περίπτωσιν μή μηδενικῆς συνισταμένης δυνάμεως ἐπί τῆς ρωγμῆς, ἥτις ἐξηρέθη κατά τήν μέχρι τοῦδε γενομένην ἀνάπτυξιν εἰς τό παρόν τμῆμα.

Διά νά ἀντιμετωπίσωμεν καί τήν περίπτωσιν ταύτην, δυνάμεθα νά ἐργασθῶμεν κατά τόν ἑξῆς τρόπον: Θεωροῦμεν τά μιγαδικά δυναμικά $\varphi_o(z)$ καί $\psi_o(z)$ διδόμενα ὑπό τῶν τύπων:

$$\varphi_o(z) = \Gamma z+\varphi^*(z)+\varphi(z)\ , \qquad (28\alpha)$$

$$\psi_o(z) = \Gamma' z+\psi^*(z)+\psi(z)\ , \qquad (28\beta)$$

ἔνθα αἱ συναρτήσεις $\varphi^*(z)$ καί $\psi^*(z)$ θεωροῦνται ἔχουσαι τάς ἑξῆς ἐκφράσεις:

$$\varphi^*(z) = -\frac{1}{\pi i(\kappa+1)}\int_L \sigma(\tau)\ln(z-\tau)\,d\tau\ , \qquad (29\alpha)$$

$$\psi^*(z) = -\frac{\kappa}{\pi i(\kappa+1)}\int_L \overline{\sigma(\tau)}\ln(z-\tau)\,\overline{d\tau} - \frac{1}{\pi i(\kappa+1)}\int_L \frac{\bar{\tau}\sigma(\tau)}{\tau-z}\,d\tau. \qquad (29\beta)$$

Αἱ ἐκφράσεις αὗται προκύπτουν ἐκ τῆς θεωρήσεως σειρᾶς ἀπειροστῶν καί ἀπείρως πλησίον κειμένων συγκεντρωμένων δυνάμεων κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν ἀναφερθέντων εἰς τό τμῆμα A1 καί εἰδικώτερον τῶν τύπων (1.28) καί (1.31). Εἶναι περαιτέρω εὔκολον νά ἐπαληθευθῇ ὅτι αἱ πα-

ράγωγοι $\Phi^*(z)$ καί $\Psi^*(z)$ τῶν συναρτήσεων $\varphi^*(z)$ καί $\psi^*(z)$ ἀντιστοίχως διδόμεναι, λόγῳ τῶν σχέσεων (29), ὑπό τῶν τύπων:

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{\pi i(\varkappa+1)}\int_L \frac{\sigma(\tau)}{\tau-z}\,d\tau\ , \tag{30α}$$

$$\Psi^*(z) = \frac{\varkappa}{\pi i(\varkappa+1)}\int_L \frac{\overline{\sigma(\tau)}}{\tau-z}\,\overline{d\tau} - \frac{1}{\pi i(\varkappa+1)}\int_L \frac{\overline{\tau}\sigma(\tau)}{(\tau-z)^2}\,d\tau \tag{30β}$$

ἐπαληθεύουν τήν ὁριακήν συνθήκην (1.4β), ἰσοδύναμον πρός τήν κατά μέλη διαφοράν τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (5). Ὡσαύτως αἱ μιγαδικαί συναρτήσεις $\varphi^*(z)$ καί $\psi^*(z)$ εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου λαμβάνουν, ὡς δύναται νά διαπιστωθῇ ἐκ τῶν ἐκφράσεων (29) καί λόγῳ τῆς σχέσεως (1.26), τάς μορφάς:

$$\varphi^*(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}\ln z\ ,\quad \psi^*(z) = \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(\varkappa+1)}\ln z\ , \tag{31}$$

αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τούς δευτέρους ὅρους τῶν δεξιῶν μελῶν τῶν σχέσεων (2). Αἱ συναρτήσεις αὗται $\varphi^*(z)$ καί $\psi^*(z)$ αἱ διδόμεναι ὑπό τῶν ἐκφράσεων (29) ἀποτελοῦν τούς μή μονοσημάντως ὁριζομένους ὅρους τῶν συναρτήσεων $\varphi_o(z)$ καί $\psi_o(z)$ τῶν σχέσεων (28) λόγῳ τῶν λογαριθμικῶν ἰδιομορφιῶν, τάς ὁποίας παρουσιάζουν.

Ἤδη καθίσταται δυνατός ὁ προσδιορισμός τῶν μονοσημάντως καθ' ὅλον τό ἐπίπεδον ὁριζομένων συναρτήσεων $\varphi(z)$ καί $\psi(z)$ κατά τά προηγουμένως ἀναφερθέντα, ὡς ἐάν ἦτο μηδενική ἡ συνισταμένη δύναμις τῆς ἐπί τῆς ρωγμῆς ἐξασκουμένης φορτίσεως. Πρέπει μόνον ἀπό τῶν συνιστωσῶν $\sigma_n^{\pm}(t)$ καί $\sigma_t^{\pm}(t)$ τῆς ἐπί τῆς ρωγμῆς ἐξασκουμένης φορτίσεως νά ἀφαιρεθοῦν αἱ συνιστῶσαι $\sigma_n^{*\pm}(t)$ καί $\sigma_t^{*\pm}(t)$ αἱ ὀφειλόμεναι εἰς τάς μιγαδικάς συναρτήσεις $\varphi^*(z)$ καί $\psi^*(z)$, ἤ τάς ἰσοδυνάμους τούτων $\Phi^*(z)$ καί $\Psi^*(z)$ τάς διδομένας ὑπό τῶν σχέσεων (30), αἵτινες δύνανται νά ὑπολογισθοῦν βάσει τοῦ ἀναλόγου τοῦ τύπου (1.3) τύπου:

$$\sigma_n^{*\pm}(t) - i\sigma_t^{*\pm}(t) = \Phi^{*\pm}(t) + \overline{\Phi^{*\pm}(t)} + \frac{dt}{\overline{dt}}\left[\overline{t}\Phi^{*\prime\pm}(t) + \Psi^{*\pm}(t)\right]\ . \tag{32}$$

Ἐν συνεχείᾳ εἶναι δυνατός ὁ ὑπολογισμός κατά τούς τύ-

πους (6) τῶν συναρτήσεων $f^{\pm}(t)$ καί ἡ περαιτέρω ἀναγωγή τοῦ προβλήματος εἰς μίαν ἀντίστοιχον τῆς (17) ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν, ἥτις δύναται νά ἀποδειχθῇ ἰσοδύναμος τῆς εἰς τό τμῆμα A1 εὑρεθείσης ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (1.30), ἐάν θεωρηθῇ ὅτι:

$$g(t) = \omega'(t) \ . \tag{33}$$

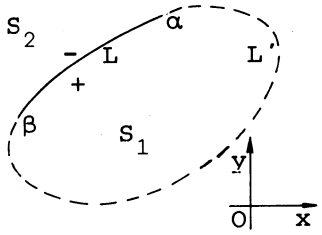
ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Ἡ δοθεῖσα εἰς τό τμῆμα τοῦτο μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου διά προσδιορισμοῦ τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν $\varphi_o(z)$ καί $\psi_o(z)$ ἀποτελεῖ συμπλήρωσιν τῆς ἀναλόγου μεθόδου διά πεπερασμένα ἄνευ ρωγμῶν μέσα, ἤ ἄπειρα μετ' ὀπῶν μέσα, τῆς ἐκτιθεμένης ὑπό τοῦ MUSKHELISHVILI {1953A, Ch.17}.

Ἡ ἐκεῖ ἐκτιθεμένη μέθοδος, μή δυναμένη νά ἐφαρμοσθῇ εἰς περίπτωσιν ὑπάρξεως ρωγμῶν ἤ σημείων ἀνακάμψεως εἰς τά ὅρια τῶν θεωρουμένων μέσων, ἀνάγει ὡσαύτως τό ὅλον πρόβλημα εἰς τήν ἐπίλυσιν μιᾶς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως, ἥτις ὅμως εἶναι τύπου FREDHOLM καί ὄχι ἰδιόμορφος τύπου CAUCHY, ὡς ἡ εἰς τό παρόν τμῆμα διά τό πρόβλημα τῆς ρωγμῆς προκύψασα. Οὕτω καί ἡ ἐπίλυσίς της εἶναι εὐχερῶς δυνατή. Διά τήν ἐπίλυσιν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων, ὡς ἡ ἐνταῦθα εὑρεθεῖσα, θά δοθοῦν εἰς τό Κεφάλαιον Γ ἁπλαῖ καί ἀκριβεῖς μέθοδοι καθιστῶσαι ταύτας ἐξ ἴσου εὐκόλους εἰς τήν ἐπίλυσιν μέ τάς ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις τύπου FREDHOLM.

Περαιτέρω ἀπῃτήθη εἰς τό τμῆμα τοῦτο ἡ εἰσαγωγή ὁλοκληρωμάτων μέ πυρῆνας παρουσιάζοντας λογαριθμικάς ἰδιομορφίας πρός ἐξάλειψιν τοῦ μή μονοσημάντου τοῦ καθορισμοῦ τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν $\varphi_o(z)$ καί $\psi_o(z)$, πρᾶγμα τό ὁποῖον δέν εἶναι ἀναγκαῖον εἰς προβλήματα μέσων ἄνευ ρωγμῶν.

A4. ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΛΕΙΑΣ ΡΩΓΜΗΣ ΕΝΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΙΣΟΤΡΟΠΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙ' ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΤΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΑΝΕΥ ΡΩΓΜΗΣ

Μία εἰσέτι μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου συνίσταται εἰς τήν ἀναγωγήν του εἰς τό ἀπό πολλῶν ἐτῶν ἐπιλυθέν πρόβλημα τοῦ ἄνευ ρωγμῆς ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου {MUSKHELISHVILI, 1953A, Ch.17}.



Σχῆμα 1

Θεωροῦμεν οὕτω τήν ἁπλῆν λείαν ρωγμήν L, μέ ἄκρα τά σημεῖα α καί β, ὡς εἰς τό Σχῆμα 1, καί θά μελετήσωμεν τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα διά τήν ρωγμήν ταύτην θεωροῦντες γνωστάς τάς συνιστώσας τῆς καθέτου φορτίσεως $\sigma_n^{\pm}(t)$ καί τῆς ἐφαπτομενικῆς φορτίσεως $\sigma_t^{\pm}(t)$ κατά μῆκος καί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς ὡς καί τά μεγέθη Γ καί Γ' τά χαρακτηρίζοντα κατά τούς τύπους (1.2) τήν ἐντατικήν κατάστασιν καί τήν περιστροφήν εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου. Ὑποθέτομεν ὡσαύτως ὅτι ἡ συνισταμένη δύναμις (X,Y) ἡ ἐπενεργοῦσα ἐπί τῆς ρωγμῆς εἶναι μηδενική, ἤτοι ὅτι ἰσχύουν αἱ σχέσεις (3.4). Ἐάν τοῦτο δέν εἶναι ἀληθές, πάλιν δυνάμεθα νά ἐργασθῶμεν, ὡς ἐάν ἦτο ἀληθές, ἀρκεῖ νά κάμωμεν χρῆσιν καί τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων $\varphi^*(z)$ καί $\psi^*(z)$, ἀκριβῶς ὅπως ἔχει ἀναφερθῆ εἰς τό προηγούμενον τμῆμα A3, διά τήν ἔκφρασιν, κατά τούς τύπους (3.28), τῶν ζητουμένων μιγαδικῶν δυναμικῶν $\varphi_o(z)$ καί $\psi_o(z)$. Περαιτέρω δέ δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ὡς ἀγνώστους μιγαδικάς συναρτήσεις τάς $\varphi(z)$ καί $\psi(z)$ συνδεομένας μετά τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν $\varphi_o(z)$ καί $\psi_o(z)$ διά τῶν σχέσεων:

$$\varphi_o(z) = \Gamma z+\varphi(z) \ , \tag{1α}$$

$$\psi_o(z) = \Gamma' z+\psi(z) \ , \tag{1β}$$

αἴτινες ἀποτελοῦν ἠπλοποιημένην μορφήν τῶν σχέσεων (3.2) καί (3.28) εἰς τήν περίπτωσιν, καθ' ἥν ἡ συνισταμένη ἐπενεργοῦσα ἐπί τῆς ρωγμῆς δύναμις (X,Y) εἶναι μηδενική, ὡς ἐθεωρήθη ἐνταῦθα. Σημειωτέον ὅτι αἱ μιγαδικαί συναρτήσεις $\varphi(z)$ καί $\psi(z)$ πλεονεκτοῦν τῶν $\varphi_o(z)$ καί $\psi_o(z)$, καθ' ὅσον δύνανται νά θεωρηθοῦν , ὡς ἀνεφέρθη καί εἰς τό τμῆμα A3, μηδενιζόμεναι εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου.

Ἤδη τό ὅλον πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τάς ὁριακάς συνθήκας (3.5), αἴτινες δέον ὅπως πληρῶνται ἐπί τῆς ρωγμῆς L. Δυνάμεθα ἀκολούθως νά φαντασθῶμεν τήν ρωγμήν L συμπληρουμένην ὑπό ἑτέρου τόξου καμπύλης L', κατά τρόπον ὥστε νά προκύπτῃ τελικῶς μία κλειστή λεία καμπύλη $L_o = L+L'$ ἔχουσα τήν ρωγμήν L ὡς τμῆμα αὐτῆς, ὡς εἰς τό Σχῆμα 1 δεικνύεται. Οὕτω τό ὅλον ἄπειρον μέσον δύναται νά θεωρηθῇ ἀποτελούμενον ἐκ τοῦ πεπερασμένου μέσου S_1 τοῦ περικλειομένου ὑπό τῆς καμπύλης L_o καί τοῦ ἀπείρου μετά ὀπῆς μέσου S_2 τοῦ κειμένου ἐξωτερικῶς τῆς καμπύλης L_o.

Αἱ συναρτήσεις $f^{\pm}(t)$, αἱ ἐκφράζουσαι κατά τάς σχέσεις (3.6) τήν γνωστήν φόρτισιν κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς L διά τά μέσα S_1 καί S_2, δύνανται νά θεωρηθοῦν ὅτι ἐκφράζουν καί τήν ἄγνωστον φόρτισιν κατά μῆκος τοῦ αὐθαιρέτως ἐκλεγέντος τόξου L' πάλιν διά τά μέσα S_1 καί S_2. Ἤδη διά τό μέσον S_1 τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τήν κάτωθι ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν {MUSKHELISHVILI, 1953A, §98}:

$$-\overline{\varphi^+(t)} + \frac{1}{\pi i}\int_{L_o} \frac{\overline{\varphi^+(\tau)}}{\tau-t}\,d\tau - \bar{t}\varphi'^+(t) + \frac{1}{\pi i}\int_{L_o} \frac{\bar{\tau}\varphi'^+(\tau)}{\tau-t}\,d\tau =$$
$$= -\overline{f^+(t)} + \frac{1}{\pi i}\int_{L_o} \frac{\overline{f^+(\tau)}}{\tau-t}\,d\tau \ . \qquad (2)$$

Ὡσαύτως διά τό μέσον S_2 τό αὐτό πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τήν ἀνάλογον τῆς (2) ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν:

$$\overline{\varphi^-(t)} + \frac{1}{\pi i}\int_{L_o} \frac{\overline{\varphi^-(\tau)}}{\tau-t}\,d\tau + \bar{t}\varphi'^-(t) + \frac{1}{\pi i}\int_{L_o} \frac{\bar{\tau}\varphi'^-(\tau)}{\tau-t}\,d\tau =$$
$$= \overline{f^-(t)} + \frac{1}{\pi i}\int_{L_o} \frac{\overline{f^-(\tau)}}{\tau-t}\,d\tau \ . \qquad (3)$$

Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι κατά μῆκος τοῦ τόξου L' δέον ὅπως ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t) \quad , \quad \varphi'^+(t) = \varphi'^-(t) \quad , \quad f^+(t) = f^-(t), \quad (4)$$

λόγῳ τῆς συνεχείας τοῦ ἀρχικοῦ μετά τῆς ρωγμῆς L ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου, ὡς καί αἱ σχέσεις (3.4), δι' ἀφαιρέσεως κατά μέλη τῆς σχέσεως (3) ἀπό τῆς σχέσεως (2) προκύπτει, λόγῳ καί τῶν τύπων τοῦ PLEMELJ (3.9) καί (3.13) καί τοῦ ὁρισμοῦ (3.15) τῆς συναρτήσεως h(t), ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (3.16), εἰς τήν ὁποίαν εἴχομεν καταλήξει, ἐργασθέντες ὅμως κατά διάφορον τρόπον, καί εἰς τό προηγούμενον τμῆμα A3.

Εἰς τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (3.16) ἡ ἄγνωστος συνάρτησις ω(τ) ζητεῖται μόνον κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς L οὖσα μηδενική, λόγῳ τῶν σχέσεων (3.9α) καί (4) κατά μῆκος τοῦ τόξου L'. Διά τοῦτο, ὡς καί διά τό γεγονός ὅτι ἡ συνάρτησις h(t) εἶναι ἄγνωστος κατά μῆκος τοῦ τόξου L', ἡ σχέσις (3.16), εἰς τήν ὁποίαν κατελήξαμεν, ἀποτελεῖ ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν μόνον κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς L, ἐνῷ κατά μῆκος τοῦ τόξου L' ἀποτελεῖ ἁπλῶς τύπον δίδοντα τήν ἄγνωστον κατά μῆκος τοῦ τόξου τούτου συνάρτησιν h(t), ὡς καί διά πᾶν ἄλλο σημεῖον τοῦ ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Ὁ ἐξετασθείς εἰς τό τμῆμα τοῦτο τρόπος ἀντιμετωπίσεως τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου δέν ἔχει ἐφαρμοσθῆ μέχρι σήμερον διά τήν ἐπίλυσιν προβλημάτων ρωγμῶν, μέ ἀποτέλεσμα αἱ γνωσταί μέθοδοι ἐπιλύσεως τῶν γενικῶν προβλημάτων τῆς θεωρίας τῆς ἐλαστικότητος διά μέσα ἄνευ ρωγμῶν νά μή δύνανται νά ἐφαρμοσθοῦν εἰς μέσα μετά ρωγμῶν, ἤ καί σημείων ἀνακάμψεως, ἐνῷ δύνανται νά ἐφαρμοσθοῦν εἰς μέσα μετά γωνιακῶν σημείων, ὡς ἀναφέρεται καί ὑπό τοῦ MUSKHELISHVILI {1953A, §99}. Γενίκευσις τῆς ἐνταῦθα παρουσιασθείσης μεθόδου εἶναι πλήρως δυνατή.

A5. ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΛΕΙΑΣ ΡΩΓΜΗΣ ΕΝΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΙΣΟΤΡΟΠΟΥ ΜΕΣΟΥ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΛΥΣΕΩΣ ΤΟΥ ΔΙ' ΑΠΛΗΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΝ ΡΩΓΜΗΝ

Εἰς τά τμήματα A1 καί A2 παρουσιάσθησαν δύο βασικοί τρόποι ἀντιμετωπίσεως τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου. Κατά τόν ἕνα ὡς ἄγνωστος συνάρτησις ἐπί τῆς ρωγμῆς ἐθεωρήθη ἡ πυκνότης $\varphi(t)$ τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (1.7) τοῦ δίδοντος τήν μιγαδικήν συνάρτησιν $\Phi(z)$, κατά δέ τόν δεύτερον ἡ πυκνότης $\omega(t)$ τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (2.4) τοῦ δίδοντος ἐπίσης τήν μιγαδικήν συνάρτησιν $\Phi(z)$. Ἐάν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $\varphi(t)$ μεταβάλλεται ὁμαλῶς ἐπί τῆς ρωγμῆς τείνουσα εἰς πεπερασμένα μή μηδενικά ὅρια παρά τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς, τότε ἡ μιγαδική συνάρτησις $\Phi(z)$ θά παρουσιάζῃ λογαριθμικάς ἰδιομορφίας παρά τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς {WOODS, 1971, §1.10}. Ἐάν ἀνάλογος συμπεριφορά ὑποτεθῇ καί διά τήν συνάρτησιν $\omega(t)$, τότε ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$ βάσει τοῦ τύπου (2.4) θά παρουσιάζῃ ἰδιομορφίας τάξεως $(-1/2)$ παρά τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς.

Εἰς τήν περίπτωσιν εὐθυγράμμου ρωγμῆς παρατηροῦμεν κατά τόν τύπον (1.56) ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$ δύναται νά παρασταθῇ ὑπό τοῦ ἀθροίσματος δύο ὁλοκληρωμάτων CAUCHY, ἑνός τῆς μορφῆς (1.7) καί ἑνός τῆς μορφῆς (2.4) ἔχουσα οὕτω τήν ἔκφρασιν:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau + \frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(\tau)\omega(\tau)}{\tau-z}\,d\tau + \frac{C_1}{X(z)}\ , \qquad (1)$$

ἔνθα ἰσχύει:

$$\varphi(t) = q(t)\ ,\quad \omega(t) = p(t)\ . \qquad (2)$$

Παρατηροῦμεν δηλαδή (ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ συναρτήσεις $p(t)$ καί $q(t)$ μεταβάλλονται ὁμαλῶς καί χωρίς ἰδιομορφίας κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς παραμένουσαι πεπερασμέναι μέχρι καί

τῶν ἄκρων τῆς ρωγμῆς, πρᾶγμα τό ὁποῖον ἐν γένει συμβαίνει), ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$ παρουσιάζει παρά τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς τόσον λογαριθμικάς ἰδιομορφίας, ἐφ' ὅσον βεβαίως ἡ συνάρτησις $q(t)$ δέν μηδενίζεται εἰς τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς, ὅσον καί ἰδιομορφίας τάξεως $(-1/2)$, ἐφ' ὅσον βεβαίως ἡ συνάρτησις $p(t)$ δέν μηδενίζεται εἰς τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς. Ἀνάλογος συμπεριφορά τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ παρατηρεῖται καί παρά τά ἄκρα ρωγμῆς σχήματος τόξου κύκλου {MUSKHELISHVILI , 1953A , §124}.

Εἰς τήν περίπτωσιν τῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς, ἔνθα ἰσχύουν αἱ σχέσεις (1) καί (2), δυνάμεθα νά παρατηρήσωμεν ὅτι ἐκ τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (1.4), αἵτινες δέον ὅπως πληρῶνται κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς L, ἡ μέν πρώτη πληροῦται ἀρκεῖ νά ἰσχύῃ ἡ πρώτη τῶν σχέσεων (2) καί ἀνεξαρτήτως τοῦ τύπου τοῦ δίδοντος τήν συνάρτησιν $\omega(t)$, ἐνῷ ἡ δευτέρα πληροῦται ἀρκεῖ νά ἰσχύῃ ἡ δευτέρα τῶν σχέσεων (2) καί ἀνεξαρτήτως τοῦ τύπου τοῦ δίδοντος τήν συνάρτησιν $\varphi(t)$, ἐφ' ὅσον ἡ μιγαδική συνάρτησις $\Psi(z)$ δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\begin{aligned}\Psi(z) = {} & \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-z}\,\overline{d\tau} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-z}\,\overline{d\tau} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\tau}\varphi(\tau)}{(\tau-z)^2}\,d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi i X(z)}\int_L \frac{X(\tau)\overline{p(\tau)}}{\tau-z}\,\overline{d\tau} - \frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(\tau)\overline{\omega(\tau)}}{\tau-z}\,\overline{d\tau} - \\ & - \frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(\tau)\overline{\tau}\omega(\tau)}{(\tau-z)^2}\,d\tau + \frac{X'(z)}{2\pi i X^2(z)}\int_L \frac{X(\tau)\overline{\tau}\omega(\tau)}{\tau-z}\,d\tau + \\ & + \frac{C_2}{X(z)} - \frac{X'(z)}{X^2(z)}\left\{C_3(z-\beta)+C_4(z-\alpha)\right\}, \qquad (3)\end{aligned}$$

εὑρεθέντος τρόπον τινά δι' ἀθροίσεως τῶν τύπων (1.12) καί (2.16) θεωρουμένων ἰσχυουσῶν καί τῶν σχέσεων (2). Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τάς σταθεράς C_1, C_2, C_3 καί C_4, αὗται δύνανται νά προσδιορισθοῦν, ὡς θά ἐκτεθῇ κατωτέρω.

Πρός ἀπόδειξιν τῶν ἀνωτέρω ἰσχυρισμῶν δυνάμεθα νά γράψωμεν τάς συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ ὡς ἀθροίσματα δύο ὅρων ὡς κάτωθι:

$$\Phi(z) = \Phi_1(z)+\Phi_2(z) \quad , \tag{4}$$

ἔνθα ἐτέθησαν λόγῳ καί τῆς ἐκφράσεως (1):

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau \quad , \tag{5α}$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(\tau)\omega(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+\frac{C_1}{X(z)} \quad , \tag{5β}$$

καί:

$$\Psi(z) = \Psi_1(z)+\Psi_2(z) \quad , \tag{6}$$

ἔνθα ἐτέθησαν λόγῳ καί τῆς ἐκφράσεως (3):

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-z}\,\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-z}\,\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\tau}\varphi(\tau)}{(\tau-z)^2}\,d\tau \quad , \tag{7α}$$

$$\begin{aligned}\Psi_2(z) = {} & \frac{1}{\pi i X(z)}\int_L \frac{X(\tau)\overline{p(\tau)}}{\tau-z}\,\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(\tau)\overline{\omega(\tau)}}{\tau-z}\,\overline{d\tau}- \\ & -\frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(\tau)\overline{\tau}\omega(\tau)}{(\tau-z)^2}\,d\tau+\frac{X'(z)}{2\pi i X^2(z)}\int_L \frac{X(\tau)\overline{\tau}\omega(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+ \\ & +\frac{C_2}{X(z)}-\frac{X'(z)}{X^2(z)}\{C_3(z-\beta)+C_4(z-\alpha)\} \quad .\end{aligned} \tag{7β}$$

Λαμβάνοντες ἤδη ὑπ' ὄψιν τά ἐκτιθέμενα εἰς τό τμῆμα A1 συνάγομεν ὅτι αἱ μιγαδικαί συναρτήσεις $\Phi_1(z)$ καί $\Psi_1(z)$ πληροῦν ἐκ ταυτότητος τήν ὁριακήν συνθήκην (1.4β), ὡσαύτως δέ καί τήν ὁριακήν συνθήκην (1.4α), ἥτις τελικῶς ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν (1.15), ἀρκεῖ νά θεωρηθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $p(t)$ εἶναι μηδενική καί ὅτι ἡ συνάρτησις $\varphi(t)$ δίδεται ὑπό τῆς πρώτης τῶν σχέσεων (2) μή λησμονουμένου ὅτι ἐξετάζομεν εὐθύγραμμον κατά μῆκος τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος ρωγμήν. Λαμβάνοντες ὁμοίως ὑπ' ὄψιν τά ἐκτιθέμενα εἰς τό τμῆμα A2 συνάγομεν ὅτι αἱ μιγαδικαί συναρτήσεις $\Phi_2(z)$ καί $\Psi_2(z)$ πληροῦν ἐκ ταυτότητος τήν ὁριακήν συνθήκην (1.4α), ὡσαύτως δέ καί τήν ὁριακήν συνθήκην (1.4β), ἥτις τελικῶς ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξ-

ίσωσιν (2.24), άρκεῖ νά θεωρηθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $q(t)$ εἶναι μηδενική, ὁπότε καθίστανται μηδενικαί καί αἱ σταθεραί C_1 καί C_2 βάσει τῶν τύπων (2.7) καί (2.19), καί ὅτι ἡ συνάρτησις $\omega(t)$ δίδεται ὑπό τῆς δευτέρας τῶν σχέσεων (2). Ὅσον άφορᾷ εἰς τάς σταθερᾶς C_3 καί C_4, αὗται ὑπολογίζονται βάσει τῶν τύπων (2.22), οἵτινες ὅμως ἁπλοποιοῦνται λόγῳ τοῦ μηδενισμοῦ τῶν σταθερῶν C_1 καί C_2.

Ἤδη, έάν ἡ θεωρουμένη ρωγμή δέν εἶναι εὐθύγραμμος, βάσει τῶν προηγουμένως άναφερθέντων προκύπτει ὅτι ἡ μέν ἄγνωστος συνάρτησις $\varphi(t)$ πρέπει νά πληροῖ τήν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν έξίσωσιν (1.15) μέ μηδενικήν τήν συνάρτησιν $p(t)$, ἡ δέ συνάρτησις $\omega(t)$ τήν (2.24) μέ μηδενικήν τήν συνάρτησιν $q(t)$. Ὅσον άφορᾷ εἰς τόν προσδιορισμόν τῶν σταθερῶν C_1, C_2, C_3 καί C_4 ἰσχύουν τά άναφερθέντα δι' εὐθύγραμμον ρωγμήν. Οὕτω τό πρόβλημα τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός άπείρου ἰσοτρόπου μέσου άνάγεται εἰς ἕν σύστημα δύο ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν έξισώσεων μέ δύο άγνώστους συναρτήσεις έπί τῆς ρωγμῆς.

Τά άνωτέρω δύνανται νά λεχθοῦν καί ὡς ἑξῆς: Ἡ φόρτισις τῆς ρωγμῆς θεωρεῖται ὡς έπαλληλία τῶν φορτίσεων $p(t)$ καί $q(t)$. Καί αἱ μέν συναρτήσεις $\Phi_1(z)$ καί $\Psi_1(z)$ θεωροῦν ὑφισταμένην μόνον τήν φόρτισιν $q(t)$, ἐνῷ αἱ συναρτήσεις $\Phi_2(z)$ καί $\Psi_2(z)$ τήν $p(t)$. Περαιτέρω, διά μέν τήν περίπτωσιν εὐθυγράμμου ρωγμῆς αἱ συναρτήσεις $\varphi(t)$ καί $\omega(t)$ εἶναι κατά τάς αχέσεις (2) άκριβῶς ἴσαι μέ τάς κατά τά άνωτέρω άντιστοίχους των φορτίσεις $q(t)$ καί $p(t)$, ἐνῷ διά τήν περίπτωσιν καμπυλογράμμου ρωγμῆς διαφέρουν έν γένει τούτων. Πάντως, παρά τήν οὕτω έπιτυγχανομένην έποπτείαν τῆς συμπεριφορᾶς τῶν συναρτήσεων $\varphi(t)$ καί $\omega(t)$, δέν θεωροῦμεν ὅτι ένδείκνυται ἡ χρῆσις τῆς εἰς τό τμῆμα τοῦτο παρουσιασθείσης μεθόδου κατά τήν έπίλυσιν ἑνός προβλήματος ρωγμῆς, καθ' ὅσον άπαιτεῖται κατά τήν μέθοδον ταύτην ἡ έπίλυσις ἑνός συστήματος δύο ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν έξισώσεων καί ὄχι μιᾶς, ὡς ἴσχυε διά τάς παρουσιασθείσας εἰς τά προη-

γούμενα τμήματα μεθόδους.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Ἡ παρουσιασθεῖσα εἰς τό τμῆμα τοῦτο μέθοδος ἀντιμετωπίσεως τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος δι' ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου εἶναι ἀνάλογος τῆς χρησιμοποιηθείσης ὑπό τοῦ MUSKHELISHVILI {1953A, §101} μεθόδου διά τήν ἀντιμετώπισιν τοῦ προβλήματος τοῦ ἄνευ ρωγμῆς πεπερασμένου ἰσοτρόπου μέσου. Διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τούτου ὁ MUSKHELISHVILI ἐβασίσθη ἐπί τῆς κλειστῆς μορφῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἐλαστικότητος τοῦ ἀφορῶντος εἰς τό ἰσότροπον ἡμιεπίπεδον, ὡς ἡμεῖς ἐβασίσθημεν διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τῆς ρωγμῆς ἐπί τῆς κλειστῆς μορφῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς ἐντός βεβαίως ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου. Σημειωτέον ὅτι ὁ τρόπος οὗτος ἐργασίας ὀφείλεται εἰς τόν FREDHOLM, ὅστις, ὡς ἀναφέρεται ὑπό τοῦ MUSKHELISHVILI, τόν ἐχρησιμοποίησε διά τήν ἐπίλυσιν ἑνός προβλήματος τῆς τρισδιαστάτου θεωρίας τῆς ἐλαστικότητος.

Α6. ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΔΙ' ΑΠΛΗΝ ΛΕΙΑΝ ΡΩΓΜΗΝ ΕΝΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΙΣΟΤΡΟΠΟΥ ΜΕΣΟΥ

Ἀναλόγως πρός τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα δι' ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἰσοτρόπου μέσου δύναται νά ἐπιλυθῇ καί τό δεύτερον θεμελιῶδες πρόβλημα, κατά τό ὁποῖον δίδονται αἱ μετατοπίσεις $u^{\pm}(t)$ καί $v^{\pm}(t)$ ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς L τοῦ προβλήματος τοῦ Σχήματος 1.1 ἱκανοποιοῦσαι τάς ἐξῆς προφανεῖς συνθήκας:

$$u^{+}(\alpha)+iv^{+}(\alpha) = u^{-}(\alpha)+iv^{-}(\alpha), \tag{1α}$$

$$u^{+}(\beta)+iv^{+}(\beta) = u^{-}(\beta)+iv^{-}(\beta) \tag{1β}$$

εἰς τά ἄκρα τῆς ρωγμῆς. Ἐπίσης θεωροῦνται δεδομέναι αἱ τιμαί τῶν μεγεθῶν Γ καί Γ' τῶν τύπων (1.2) εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου καί ἡ συνισταμένη δύναμις (X, Y) τῶν ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς ἐξασκουμένων φορτίσεων.

Αἱ ὁριακαί συνθῆκαι τοῦ προβλήματός μας, ἀνάλογοι τῶν (1.3) (ἰσχυουσῶν διά τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα), εἶναι αἱ (1.19) ἀπαιτουμένης κατ' ἀρχήν παραγωγίσεως τῶν δεδομένων συναρτήσεων $u^{\pm}(t)$ καί $v^{\pm}(t)$ κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς ὡς πρός t.

Ἤδη θέτοντες:

$$2p(t) = -2\mu\left\{\left[\frac{du^{+}(t)}{dt}+\frac{du^{-}(t)}{dt}\right]+i\left[\frac{dv^{+}(t)}{dt}+\frac{dv^{-}(t)}{dt}\right]\right\}+$$

$$+\ 2(\varkappa\Gamma-\overline{\Gamma})-2\overline{\Gamma}'\frac{\overline{dt}}{dt}\ , \tag{2α}$$

$$2q(t) = -2\mu\left\{\left[\frac{du^{+}(t)}{dt}-\frac{du^{-}(t)}{dt}\right]+i\left[\frac{dv^{+}(t)}{dt}-\frac{dv^{-}(t)}{dt}\right]\right\} \tag{2β}$$

ἀναλόγως πρός τάς σχέσεις (1.5) καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τάς σχέσεις (1.1) παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ὁριακαί συνθῆκαι (1.19) δίδουν δι' ἀθροίσεως καί ἀφαιρέσεώς των κατά μέλη:

$$[\Phi^+(t)+\Phi^-(t)]-\varkappa[\overline{\Phi^+(t)}+\overline{\Phi^-(t)}]+\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\bar{t}[\Phi'^+(t)+\Phi'^-(t)]+\right.$$

$$\left.+[\Psi^+(t)+\Psi^-(t)]\right\} = 2\overline{p(t)} \qquad (3\alpha)$$

καί :

$$[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)]-\varkappa[\overline{\Phi^+(t)}-\overline{\Phi^-(t)}]+\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\bar{t}[\Phi'^+(t)-\Phi'^-(t)]+\right.$$

$$\left.+[\Psi^+(t)-\Psi^-(t)]\right\} = 2\overline{q(t)}\ , \qquad (3\beta)$$

αἵτινες ὁριακαί συνθῆκαι δέν διαφέρουν κατά τήν μορφήν τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (1.4) τῶν ἀφορωσῶν εἰς τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα, παρά μόνον καθ'ὅσον οἱ δεύτεροι ἐντός ἀγκύλης ὅροι εἶναι πολλαπλασιασμένοι ἐπί τήν σταθεράν $(-\varkappa)$. Οὕτως ἡ ὅλη διαδικασία ἐπιλύσεως τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος δι'ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου εἶναι ἡ αὐτή μέ τήν ἐφαρμοσθεῖσαν διά τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα. Σημειοῦμεν λοιπόν μόνον τάς ἐμφανιζομένας διαφοράς.

Οὕτω, ἐνῷ ἡ συνάρτησις $\Phi(z)$ δίδεται πάλιν ὑπό τοῦ τύπου (1.7), ἡ συνάρτησις $\Psi(z)$ δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-z}\overline{d\tau}+\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-z}\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{\tau}\,\varphi(\tau)}{(\tau-z)^2}d\tau \qquad (4)$$

διαφέροντος τοῦ (1.12) εἰς τό δεύτερον ὁλοκλήρωμα, τό ὁποῖον ἔχει πολλαπλασιασθῆ ἐπί $(-\varkappa)$, περαιτέρω δέ ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις ἡ ἀντίστοιχος τῆς (1.15), εἰς τήν ὁποίαν τελικῶς καταλήγομεν, εἶναι ἡ κάτωθι:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{\varkappa}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\bar{\tau}-\bar{t}}\overline{d\tau}-\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{-\varkappa}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{(\tau-t)^2}d\tau\right\} = 2\overline{p(t)}-\frac{2}{\pi i}\frac{dt}{\overline{dt}}\int_L \frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}. \qquad (5)$$

Αἱ συνθῆκαι (1) ἐξασφαλίζουν τό μονοσήμαντον τῶν μετατοπίσεων διά τήν περίπτωσιν τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προ-

βλήματος, ἐνῷ πρέπει ἡ συνισταμένη δύναμις ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς συνολικῆς φορτίσεως ἐπί τῆς ρωγμῆς νά ἰσοῦται μέ (X,Y) προκυπτούσης οὕτω τῆς ἀκολούθου συνθήκης ἀναλόγου τῆς (1.16):

$$\int_L [(\sigma_n^+ - \sigma_n^-) - i(\sigma_t^+ - \sigma_t^-)]\overline{d\tau} = -i(X-iY) \tag{6}$$

ληφθεισῶν ὑπ'ὄψιν καί τῶν σχέσεων (1.25β) καί (1.26).

Ἡ συνθήκη (6) βάσει τοῦ τύπου (1.3) λαμβάνει τήν ἑξῆς μορφήν ἀντίστοιχον τῆς (1.21):

$$\int_L [\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)]\overline{d\tau} + \int_L [\overline{\Phi^+(\tau)} - \overline{\Phi^-(\tau)}]\overline{d\tau} + \int_L \overline{\tau}[\Phi'^+(\tau) - \Phi'^-(\tau)]d\tau + \int_L [\Psi^+(\tau) - \Psi^-(\tau)]d\tau = -i(X-iY), \tag{7}$$

ἤτις, δεδομένου ὅτι ἐν προκειμένῳ ἰσχύει ἡ συνθήκη:

$$\int_L q(\tau)d\tau = 0 \tag{8}$$

λόγῳ τοῦ μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων καί τοῦ ὁρισμοῦ (2β) τῆς συναρτήσεως q(t) καί λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν σχέσεων (7) καί (3β), λαμβάνει τελικῶς τήν ἀνάλογον τῆς συνθήκης (1.22) μορφήν:

$$(\varkappa+1)\int_L \varphi(\tau)d\tau = +i(X+iY). \tag{9}$$

Ἐάν θελήσωμεν, ἀναλόγως πρός τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος, νά θεωρήσωμεν τήν ρωγμήν ὡς συντεθειμένην ἐκ συγκεντρωμένων δυνάμεων καί μεταστάσεων μέ συναρτήσεις f(t) καί g(t) ἀντιστοίχως, διά συγκρίσεως τῶν τύπων (1.33α) καί (1.7) καί ἐπίσης τῶν (1.33β) καί (4) εὑρίσκομεν τήν προφανῆ σχέσιν (1.27) καί ὡσαύτως τήν κάτωθι σχέσιν τήν δίδουσαν τήν ζητουμένην συνάρτησιν g(t) συναρτήσει τῆς γνωστῆς συναρτήσεως q(t):

$$g(t) = -\frac{2q(t)}{\varkappa+1}. \tag{10}$$

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τούς τύπους (1.34β) καί (2β) παρα-

τηροῦμεν περαιτέρω ὅτι ἡ σχέσις (10) εἶναι ἰσοδύναμος πρός τάς ἐξῆς δύο:

$$\beta_1(t) = -\frac{d[u^+(t)-u^-(t)]}{dt}, \quad \beta_2(t) = -\frac{d[v^+(t)-v^-(t)]}{dt}, \tag{11}$$

αἵτινες τρόπον τινά θά ἠδύναντο νά θεωρηθοῦν ὡς προφανεῖς ἤ καί νά ληφθοῦν ὡς βάσις πρός ἀπόδειξιν τῆς σχέσεως (10) μέ πορείαν ἀντίστροφον τῆς ἐνταῦθα ἀκολουθηθείσης.

Ἤδη ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (5) λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν σχέσεων (1.27) καί (10) δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα πλέον ἄγνωστον συνάρτησιν τήν συνάρτησιν δυνάμεων $f(t)$, ὅτε θά λάβῃ τήν κάτωθι μορφήν ὀλίγον διαφέρουσαν τῆς (1.30), ἥτις ἰσχύει διά τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος καί ἔχει ἄγνωστον συνάρτησιν τήν συνάρτησιν μεταστάσεων $g(t)$ καί ὄχι τήν συνάρτησιν δυνάμεων $f(t)$ ὡς ἐν προκειμένῳ:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau + \frac{\varkappa}{\pi i}\int_L \frac{\overline{f(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{d\tau} - \frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{-\varkappa}{\pi i}\int_L \frac{\overline{f(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{d\tau} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi i}\int_L f(\tau)\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{(\tau-t)^2}d\tau\right\} = 2\overline{p(t)} - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{\tau-t}d\tau -$$

$$- \frac{\varkappa}{\pi i}\int_L \frac{\overline{g(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{d\tau} + \frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{g(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{d\tau} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi i}\int_L g(\tau)\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{(\tau-t)^2}d\tau\right\} \tag{12}$$

τῆς συναρτήσεως $g(t)$ διδομένης ὑπό τῆς σχέσεως (10).

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τήν ἀναγωγήν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (5) ἤ (12) εἰς σύστημα δύο πραγματικῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων, ἡ ἐργασία εἶναι ἐντελῶς ἀνάλογος τῆς ἀκολουθηθείσης διά τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος καί δέν θά ἐπαναληφθῇ ἐνταῦθα.

Σημειοῦμεν τέλος ὅτι, ὅπως ἡ συνάρτησις $\varphi(t)$ πέραν τῆς

ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (5) δέον ὅπως ἐπαληθεύῃ καί τήν συνθήκην (9), οὕτω καί ἡ συνάρτησις δυνάμεων f(t) πέραν τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (12), προκυπτούσης ἐκ τῆς (5), λόγῳ τῆς σχέσεως (1.27), δέον ὅπως ἐπαληθεύῃ ὡσαύτως καί τήν συνθήκην:

$$\int_L f(\tau)d\tau = +i\frac{X+iY}{\varkappa+1} \tag{13}$$

προκύπτουσαν ἐκ τῆς (9) λόγῳ τῆς σχέσεως (1.27) καί ἐπίσης τῆς σχέσεως (8), ἥτις λόγῳ καί τῆς (10) γράφεται καί ὡς ἑξῆς:

$$\int_L g(\tau)d\tau = 0 . \tag{14}$$

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Εἰς τό τμῆμα τοῦτο ἐξητάσθη τό δεύτερον θεμελιῶδες πρόβλημα διά τήν ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου. Ὁ τρόπος ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι, ὡς εἴδομεν, ἀρκετά ἀνάλογος τοῦ ἐφαρμοσθέντος εἰς τό τμῆμα Α1 διά τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου. Κατά ταῦτα εἰς τά ἐξετασθησόμενα εἰς τά ἑπόμενα τμήματα προβλήματα ρωγμῶνδέν θά ἀσχοληθῶμεν μέ τήν περίπτωσιν τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος, τό ὁποῖον θά θεωρῶμεν δυνάμενον νά ἐπιλυθῇ, ἐάν παρουσιασθῇ ἀνάγκη εἰς συγκεκριμένον τι πρόβλημα, κατά τρόπον ἀνάλογον τοῦ ἐφαρμοσθέντος διά τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος. Ὡσαύτως δυνάμεθα νά παρατηρήσωμεν ὅτι ὅλαι αἱ ἀναπτυχθεῖσαι εἰς τά τμήματα Α1 ἕως Α5 μέθοδοι ἀντιμετωπίσεως τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος δι' ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπουμέσου δύνανται καταλλήλως τροποποιούμεναι νά χρησιμεύσουν καί εἰς τήν ἐπίλυσιν τοῦ ἀντιστοίχου δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος. Τάς ἀναγκαίας τροποποιήσεις ταύτας θεωροῦμεν προφανεῖς καί δέν θεωροῦμεν σκόπιμον νά δώσωμεν ἐνταῦθα.

Δυνάμεθα νά ἀναφέρωμεν τέλος ὅτι ἡ γενική λύσις τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος τῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου, τό ὁποῖον πρόβλημα ἀποτελεῖ εἰδικήν περίπτωσιν τοῦ εἰς τό τμῆμα τοῦτο μελετηθέντος, ἐδόθη ὑπό τοῦ MUSKHELISHVILI {1953A,§120} ὡς καί ὑπό τοῦ MILNE-THOMSON {1968,§4.15}. Ἐφαρμογή τῆς παρουσιασθείσης ἐνταῦθα γενικῆς μεθόδου εἰς τό εἰδικόν τοῦτο πρόβλημα εἶναι εὐχερῶς δυνατή, ὡς ἐγένετο ἤδη εἰς τό τμῆμα A1 διά τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος.

Α7. ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΤΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΔΙ' ΑΠΛΗΝ ΛΕΙΑΝ ΡΩΓΜΗΝ ΕΝΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΙΣΟΤΡΟΠΟΥ ΜΕΣΟΥ

Ἀναλόγως πρός τό πρῶτον καί τό δεύτερον θεμελιῶδες πρόβλημα δύναται νά ἐπιλυθῇ καί τό μικτόν θεμελιῶδες πρόβλημα δι' ἀπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου. Θά ἐξετάσωμεν πρῶτον τήν εἰδικήν περίπτωσιν τοῦ μικτοῦ θεμελιώδους προβλήματος, καθ' ἥν δίδονται ἐπί τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς L τοῦ Σχήματος 1.1, ἔστω τῆς πλευρᾶς (+), αἱ ἐπιβαλλόμεναι ἐξωτερικῶς τάσεις $\sigma_n^+(t)$ καί $\sigma_t^+(t)$, ἐπί δέ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς, ἤτοι τῆς πλευρᾶς (-), αἱ ὑφιστάμεναι μετατοπίσεις $u^-(t)$ καί $v^-(t)$. Ὡσαύτως δίδονται τά μεγέθη Γ καί Γ' τά σχετικά μέ τήν φόρτισιν εἰς τό ἄπειρον καί ὁριζόμενα βάσει τῶν τύπων (1.2) ὡς καί αἱ συνιστῶσαι (X,Y) τῆς συνολικῶς ἐξασκουμένης ἐπί τῆς ρωγμῆς ἐξωτερικῶς δυνάμεως, εἴτε ἀπ' εὐθείας εἴτε μέσῳ τῆς συνισταμένης δυνάμεως (X^-,Y^-) τῶν φορτίσεων ἐπί τῆς πλευρᾶς (-) τῆς ρωγμῆς, ὅπου δίδονται ὡς ὁριακαί συνθῆκαι αἱ μετατοπίσεις, ὅτε λόγῳ καί τῶν τύπων (1.25β) καί (1.26) ἔχομεν:

$$X+iY = (X^-+iY^-)-i\int_L \left[\sigma_n^+(\tau)+i\sigma_t^+(\tau)\right]d\tau \ . \tag{1}$$

Συμφώνως πρός τά ἐκτεθέντα εἰς τά τμήματα Α1 καί Α6 διά τάς περιπτώσεις τοῦ πρώτου καί τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος, δυνάμεθα νά γράψωμεν τάς ὁριακάς συνθήκας τῆς ἐνταῦθα ἐξεταζομένης εἰδικῆς περιπτώσεως τοῦ μικτοῦ θεμελιώδους προβλήματος βάσει τῶν τύπων (1.3) καί (1.19) ὡς ἑξῆς:

$$\sigma_n^+(t)-i\sigma_t^+(t) = \Phi_o^+(t)+\overline{\Phi_o^+(t)}+\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\bar{t}\Phi_o'^+(t)+\Psi_o^+(t)\right\} \ , \tag{2α}$$

$$2\mu\left\{-\frac{du^-(t)}{\overline{dt}}+i\frac{dv^-(t)}{\overline{dt}}\right\} = \Phi_o^-(t)-\kappa\overline{\Phi_o^-(t)}+\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\bar{t}\Phi_o'^-(t)+ +\Psi_o^-(t)\right\} . \tag{2β}$$

Προσθέτοντες καί άφαιροῦντες κατά μέλη τάς ὁριακάς συνθήκας (2) εὑρίσκομεν, λόγῳ καί τῶν σχέσεων (1.1) ὁρισμοῦ τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$, ὅτι:

$$[\Phi^+(t)+\Phi^-(t)]+[\overline{\Phi^+(t)}-\kappa\overline{\Phi^-(t)}]+\frac{dt}{\overline{dt}}\Big\{\bar{t}[\Phi'^+(t)+\Phi'^-(t)]+$$
$$+[\Psi^+(t)+\Psi^-(t)]\Big\} = 2\overline{p(t)} \quad , \tag{3α}$$

$$[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)]+[\overline{\Phi^+(t)}+\kappa\overline{\Phi^-(t)}]+\frac{dt}{\overline{dt}}\Big\{\bar{t}[\Phi'^+(t)-\Phi'^-(t)]+$$
$$+[\Psi^+(t)-\Psi^-(t)]\Big\} = 2\overline{q(t)} \quad , \tag{3β}$$

ἔνθα ἐτέθησαν:

$$2p(t) = \sigma_n^+(t)+i\sigma_t^+(t)-2\mu\left\{\frac{du^-(t)}{dt}+i\,\frac{dv^-(t)}{dt}\right\}+$$
$$+[(\kappa-1)\Gamma-2\bar{\Gamma}]-2\bar{\Gamma}'\frac{\overline{dt}}{dt} \quad , \tag{4α}$$

$$2q(t) = \sigma_n^+(t)+i\sigma_t^+(t)+2\mu\left\{\frac{du^-(t)}{dt}+i\,\frac{dv^-(t)}{dt}\right\}-$$
$$-(\kappa+1)\Gamma \quad , \tag{4β}$$

Αἱ ὁριακαί συνθῆκαι (3) ἐλάχιστα διαφέρουν καί μόνον κατά τόν δεύτερον ἐντός ἀγκύλης ὅρον αὐτῶν τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (1.4) τῶν ἀφορωσῶν εἰς τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα ἤ τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (6.3) τῶν ἀφορωσῶν εἰς τό δεύτερον θεμελιῶδες πρόβλημα. Θεωροῦμεν οὕτω, ἀναλόγως πρός ὅ,τι ἐπράξαμεν διά τήν ἐπίλυσιν τῶν θεμελιωδῶν αὐτῶν προβλημάτων, τήν μέν συνάρτησιν $\Phi(z)$ διδομένην ὑπό τοῦ τύπου (1.7), τήν δέ συνάρτησιν $\Psi(z)$ διδομένην ὑπό τοῦ τύπου:

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-z}\,\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\tau-z}\,\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{\tau}\varphi(\tau)}{(\tau-z)^2}\,d\tau \quad , \tag{5}$$

ὅπου ἐμφανίζεται, πέραν τῆς ἀγνώστου πυκνότητος $\varphi(t)$ τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (1.7), καί μία ὡσαύτως ἄγνωστος συνάρτησις $\omega(t)$. Συγκρίνοντες τήν ἔκφρασιν (5) τῆς συναρτήσεως $\Psi(z)$ διά τήν ἐξεταζομένην περίπτωσιν τοῦ μικτοῦ θεμελιώδους

προβλήματος μέ τάς έκφράσεις της (1.12) καί (6.4) τάς εὑρεθείσας διά τάς περιπτώσεις τοῦ πρώτου καί δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος άντιστοίχως, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἄγνωστος συνάρτησις $\omega(t)$ συνδέεται μετά τῆς έπίσης άγνώστου συναρτήσεως $\varphi(t)$ διά μιᾶς τῶν σχέσεων:

$$\omega(t) = \varphi(t) \quad , \quad \omega(t) = -\varkappa\varphi(t) \quad , \tag{6}$$

τῆς πρώτης ίσχυούσης διά τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος καί τῆς δευτέρας διά τήν περίπτωσιν τοῦ δευτέρου θεμελιώδους προβλήματος.

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τάς έκφράσεις (1.7) καί (5) τῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ άντιστοίχως ὡς καί τούς τύπους τοῦ PLEMELJ (1.8) καί (1.10), δυνάμεθα νά άναγάγωμεν τό σύστημα τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν (3) εἰς τό κάτωθι σύστημα ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν έξισώσεων:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau + \frac{\varkappa+1}{2}\varphi(t) + \frac{\varkappa-1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\,\overline{d\tau} - \frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\tau-t}\,\overline{d\tau} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{(\tau-t)^2}\,d\tau\right\} = 2\overline{p(t)} - \frac{2}{\pi i}\frac{dt}{\overline{dt}}\int_L \frac{\overline{q(\tau)}}{\tau-t}\,\overline{d\tau} \quad , \tag{7α}$$

$$\frac{\varkappa-1}{2}\varphi(t) + \frac{\varkappa+1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau + \omega(t) = 0 \quad . \tag{7β}$$

Ὅσον άφορᾷ εἰς τήν συνθήκην μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων (1.21), αὕτη, λόγῳ τῶν έκφράσεων (1.7) καί (5) τῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ άντιστοίχως, λαμβάνει τήν κάτωθι άρκετά ἁπλῆν μορφήν:

$$\int_L [\varkappa\varphi(t) + \omega(t)]\,dt = 2\int_L q(t)\,dt \quad . \tag{8}$$

Τέλος ἡ συνισταμένη δύναμις (X,Y), ἡ δοθεῖσα έπί τῆς ρωγμῆς ἥ δυναμένη νά εὑρεθῇ βάσει τῆς σχέσεως (1), δίδει μίαν άκόμη πρός πλήρωσιν συνθήκην, ἥτις λαμβανομένων ὑπ ὄψιν καί τῶν τύπων (1.4β) καί (1.26) λαμβάνει τήν άρκετά άνάλογον τῆς συνθήκης (8) μορφήν:

$$\int_L [-\varphi(t)+\omega(t)]\,dt = 2\int_L \underline{\sigma}(t)\,dt+Y-iX \ . \tag{9}$$

Ἤδη δυνάμεθα νά μελετήσωμεν τήν γενικήν περίπτωσιν τοῦ μικτοῦ θεμελιώδους προβλήματος. Πρός τοῦτο θεωροῦμεν τήν ρωγμήν L ἀποτελουμένην ἐκ τεσσάρων τμημάτων L_1, L_2, L_3 καί L_4, ἐκ τῶν ὁποίων ὡρισμένα δύνανται νά εἶναι μηδενικοῦ μήκους ἤ νά ἀποτελῶνται ἐκ περισσοτέρων τοῦ ἑνός μικροτέρων καί ἀνεξαρτήτων μεταξύ των τμημάτων, ὁριζομένων ὡς ἑξῆς: L_1 εἶναι τό τμῆμα ἐκεῖνο τῆς ρωγμῆς, καθ' ὅ εἶναι γνωσταί αἱ ἐπιβαλλόμεναι ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς φορτίσεις, L_2 εἶναι τό τμῆμα ἐκεῖνο τῆς ρωγμῆς, καθ' ὅ εἶναι γνωσταί αἱ ὑφιστάμεναι ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς μετατοπίσεις, L_3 εἶναι τό τμῆμα ἐκεῖνο τῆς ρωγμῆς, καθ' ὅ εἶναι γνωσταί αἱ ἐπιβαλλόμεναι φορτίσεις ἐπί τῆς θετικῆς πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς ὡς καί αἱ ὑφιστάμεναι μετατοπίσεις ἐπί τῆς ἀρνητικῆς πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς, καί L_4 εἶναι τό τμῆμα ἐκεῖνο τῆς ρωγμῆς, καθ' ὅ εἶναι γνωσταί αἱ ὑφιστάμεναι μετατοπίσεις ἐπί τῆς θετικῆς πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς ὡς καί αἱ ἐπιβαλλόμεναι φορτίσεις ἐπί τῆς ἀρνητικῆς πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς.

Τάς ὑφισταμένας ὁριακάς συνθήκας ἐπί τῶν τμημάτων τῆς ρωγμῆς L_1, L_2 καί L_3 ἐμελετήσαμεν ἤδη εἰς τά τμήματα A1, A6 καί A7 ἀντιστοίχως, αἱ δέ ὑφιστάμεναι ἐπί τοῦ τμήματος L_4 τῆς ρωγμῆς ὁριακαί συνθῆκαι εἶναι ἐντελῶς ἀνάλογοι τῶν ὑφισταμένων ἐπί τοῦ τμήματος L_3. Θεωροῦντες περαιτέρω δεδομένας τάς σταθεράς Γ καί Γ' τῶν τύπων (1.2) ὡς καί τήν συνισταμένην δύναμιν (X,Y) τήν ἐπενεργοῦσαν ἐπί τῆς ρωγμῆς, δυνάμεθα νά διαπιστώσωμεν εὐχερῶς ὅτι τό ὅλον πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τό κάτωθι σύστημα ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\gamma(t)\varphi(t)+\frac{\delta(t)}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\,\overline{d\tau}-\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\tau-t}\,\overline{d\tau}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{(\tau-t)^2}\,d\tau\right\} = 2\overline{p(t)}-\frac{2}{\pi i}\frac{dt}{\overline{dt}}\int_L \frac{\overline{\underline{\sigma}(\tau)}}{\tau-t}\,\overline{d\tau}\ , \tag{10α}$$

$$\delta(t)\varphi(t)+\frac{\gamma(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\omega(t) = 0 \ , \tag{10β}$$

ἔνθα αἱ συναρτήσεις $\gamma(t)$ καί $\delta(t)$ κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς L λαμβάνουν τάς κάτωθι σταθεράς τιμάς ἐπί τῶν σημείων t τῶν προαναφερθέντων τμημάτων αὐτῆς L_1, L_2, L_3 καί L_4:

$$\gamma(t) = 0 \ , \quad \delta(t) = -1 \ , \quad t \in L_1 \ , \tag{11α}$$

$$\gamma(t) = 0 \ , \quad \delta(t) = \varkappa \ , \quad t \in L_2 \ , \tag{11β}$$

$$\gamma(t) = \frac{\varkappa+1}{2} \ , \quad \delta(t) = \frac{\varkappa-1}{2} \ , \quad t \ \ L_3 \ , \tag{11γ}$$

$$\gamma(t) = -\frac{\varkappa+1}{2}, \quad \delta(t) = \frac{\varkappa-1}{2} \ , \quad t \in L_4 \ , \tag{11δ}$$

ἐν συμφωνίᾳ καί μέ τάς ἰδιομόρφους ὁλοκληρωτικάς ἐξισώσεις (1.15), (6.5) καί (7), αἱ δέ συναρτήσεις $p(t)$ καί $q(t)$ δίδονται ἐπί τοῦ τμήματος L_1 ὑπό τῶν σχέσεων (1.5), ἐπί τοῦ τμήματος L_2 ὑπό τῶν σχέσεων (6.2), ἐπί τοῦ τμήματος L_3 ὑπό τῶν σχέσεων (4) καί ἐπί τοῦ τμήματος L_4 ὑπό τῶν κάτωθι ἀναλόγων τῶν (4) σχέσεων:

$$2p(t) = -2\mu\left\{\frac{du^+(t)}{dt}+i\,\frac{dv^+(t)}{dt}\right\}+\left\{\sigma_n^-(t)+i\sigma_t^-(t)\right\} \ , \tag{12α}$$

$$2q(t) = -2\mu\left\{\frac{du^+(t)}{dt}+i\frac{dv^+(t)}{dt}\right\}-\left\{\sigma_n^-(t)+i\sigma_t^-(t)\right\} \ . \tag{12β}$$

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τήν συνθήκην μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων καί τήν προκύπτουσαν ἐκ τῆς ἐκφράσεως τῆς συνισταμένης ἐπί τῆς ρωγμῆς δυνάμεως συνθήκην, αὗται δίδονται, ὡς καί προηγουμένως ὑπό τῶν σχέσεων (8) καί (9) ἀντιστοίχως.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Τό ἐξετασθέν εἰς τό τμῆμα τοῦτο μικτόν θεμελιῶδες πρόβλημα δι' ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου δέν ἔχει ἀντιμετωπισθῆ μέχρι σήμερον εἰς τήν γενικήν του περίπτωσιν. Ἡ εἰδική περίπτωσις τοῦ προβλήματος τούτου μέ δεδομένας τάς τάσεις ἐπί τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς καί τάς μετατοπίσεις ἐπί τῆς ἑτέρας ἔχει ἐπιλυθῆ ὑπό τῶν MUSKHELISHVILI {1953A, §120} καί

MILNE-THOMSON {1960,§4.16} διά τήν περίπτωσιν εὐθυγράμμου ρωγμῆς. Ὡαύτως ἡ ἔτι εἰδικωτέρα περίπτωσις τοῦ μικτοῦ θεμελιώδους προβλήματος, καθ' ἥν ἐπί τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς ὑφίσταται σταθερά μετατόπισις, ἐνῷ ἡ ἑτέρα πλευρά τῆς ρωγμῆς εἶναι ἀφόρτιστος, ἔχει ἐπιλυθῆ ὑπό τοῦ AHMED διά τάς περιπτώσεις ρωγμῆς σχήματος τόξου κύκλου {1971A} καί ρωγμῆς σχήματος τόξου παραβολῆς {1971B}.

Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ ἀνωτέρω δοθείς τρόπος ἀντιμετωπίσεως τοῦ μικτοῦ θεμελιώδους προβλήματος δι' ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου ὀλίγον μόνον εἶναι πολυπλοκώτερος τοῦ τρόπου ἀντιμετωπίσεως τοῦ πρώτου, ἤ καί τοῦ δευτέρου, θεμελιώδους προβλήματος, δέν θά δώσωμεν κατωτέρω λύσεις τοῦ προβλήματος τούτου διά τήν περίπτωσιν ἀνισοτρόπων μέσων ἤ διά τάς περιπτώσεις ἄλλων συνθέτων προβλημάτων ρωγμῶν, καθ' ὅσον αὗται δύνανται εὐκόλως νά προκύψουν ἐκ τῆς ἀντιστοίχου λύσεως τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος, ἐάν ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν καί τά ἐκτιθέμενα εἰς τό παρόν τμῆμα.

Δύναται τέλος νά ἀναφερθῇ ὅτι ἡ προαναφερθεῖσα εἰδική περίπτωσις τοῦ μικτοῦ θεμελιώδους προβλήματος, καθ' ἥν ἐπί τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς ρωγμῆς δίδονται αἱ τάσεις καί ἐπί τῆς ἑτέρας αἱ μετατοπίσεις, ἔχει ἀντιμετωπισθῆ δι' εὐθύγραμμον ρωγμήν εὑρισκομένην ἐντός ἀνισοτρόπου μέσου, μεταξύ δύο ἰσοτρόπων μέσων, μεταξύ δύο ἀνισοτρόπων μέσων ὡς καί μεταξύ ἑνός ἰσοτρόπου καί ἑνός ἀνισοτρόπου μέσου ὑπό τοῦ ΙΩΑΚΕΙΜΙΔΗ {1973}.

Α8. ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΛΕΙΑΣ ΡΩΓΜΗΣ ΕΝΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΟΥ ΜΕΣΟΥ

Κατωτέρω δίδεται γενική μέθοδος επιλύσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἁπλῆς, λείας καί ἐν γένει καμπυλογράμμου ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου διά τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος, ἥτις εἶναι καί ἡ πλέον συνήθης. Σημειοῦται ὅτι, καθ'ὅσον γνωρίζομεν, οὐδεμία παρεμφερής ἐργασία ὑφίσταται, προβλήματα δέ ρωγμῶν ἐντός ἀνισοτρόπων μέσων ἔχουν λυθῆ μόνον διά τήν περίπτωσιν τῶν εὐθυγράμμων ρωγμῶν. Ἡ μέθοδος ἐργασίας εἶναι ἀρκετά ἀνάλογος τῆς ἀκολουθηθείσης διά τήν περίπτωσιν ρωγμῆς ἐντός ἰσοτρόπου μέσου. Οἱ χρησιμοποιούμενοι τύποι εἶναι βεβαίως ἀρκετά πολυπλοκώτεροι, παρουσιάζεται δέ τό φαινόμενον τῆς χρησιμοποιήσεως τριῶν μιγαδικῶν μεταβλητῶν ἐπί τοῦ ἀνισοτρόπου ἐπιπέδου τῆς ρωγμῆς ἀντί μιᾶς ὡς εἰς τήν περίπτωσιν τῆς ρωγμῆς ἐντός ἰσοτρόπου ἐπιπέδου. Παρά ταῦτα ἔχομεν μεγάλην ἀπλούστευσιν τοῦ προβλήματος εἰς τήν περίπτωσιν τῆς ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου ἔναντι τοῦ προβλήματος τῆς ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου, δεδομένου ὅτι δέν ὑφίστανται εἰς τούς χρησιμοποιουμένους τύπους παράγωγοι μιγαδικῶν συναρτήσεων, αἵτινες οὐχί μόνον δυσχεραίνουν τήν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος, ἀλλ'ἀποτελοῦν καί διαρκῆ παγίδα πρός δημιουργίαν λαθῶν.

Αἱ τάσεις εἰς τήν περίπτωσιν ἀνισοτρόπου μέσου δίδονται συναρτήσει δύο μιγαδικῶν συναρτήσεων $\Phi(z_1)$ καί $\Psi(z_2)$ βάσει τῶν τύπων { SAVIN, 1961, Ch.1, §3 } .

$$\sigma_x = 2Re\left\{\mu_1^2\Phi_o(z_1)+\mu_2^2\Psi_o(z_2)\right\}, \tag{1α}$$

$$\sigma_y = 2Re\left\{\Phi_o(z_1)+\Psi_o(z_2)\right\}, \tag{1β}$$

$$\tau_{xy} = -2Re\left\{\mu_1\Phi_o(z_1)+\mu_2\Psi_o(z_2)\right\}, \tag{1γ}$$

ἔνθα z_1 καί z_2 μιγαδικαί μεταβληταί ὁριζόμεναι ὡς :

$$z_1 = x+\mu_1 y, \qquad z_2 = x+\mu_2 y, \tag{2}$$

αἱ δέ σταθεραί μ_1 καί μ_2 εἶναι χαρακτηριστικαί μιγαδικαί σταθεραί τοῦ ὑλικοῦ τοῦ θεωρουμένου ἀνισοτρόπου μέσου.

Θεωροῦντες ρωγμήν ὡς ἡ τοῦ Σχήματος 1.1 ἐπιθυμοῦμεν νά ἔχωμεν ἐκφράσεις τῆς καθέτου φορτίσεως σ_n ὡς καί τῆς ἐφαπτομενικῆς σ_t ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς συναρτήσει τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων $\Phi(z_1)$ καί $\Psi(z_2)$.

Πρός τοῦτο λαμβάνομεν ὑπ'ὄψιν ὅτι { ENGLAND, 1971A, §2.12} :

$$\sigma_n+i\sigma_t = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})-\frac{e^{-2i\vartheta}}{2}(\sigma_x-\sigma_y+2i\tau_{xy}), \tag{3}$$

ἔνθα ϑ ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης τῆς ρωγμῆς εἰς τό τυχόν σημεῖον t αὐτῆς μετά τοῦ ἄξονος Ox, ὡς εἰς τό Σχῆμα 1.2, σχέσις, ἡ ὁποία ἰσχύει προφανῶς καί διά τήν περίπτωσιν τῶν ἀνισοτρόπων μέσων ἐξ ἴσου καλῶς ὡς καί διά τά ἰσότροπα μέσα, διά τά ὁποῖα, ἐάν τεθοῦν { ENGLAND, 1971, § 1.5 } :

$$\sigma_x+\sigma_y = 2\{\Phi_o(t)+\overline{\Phi_o(t)}\}, \tag{4α}$$

$$\sigma_x-\sigma_y+2i\tau_{xy} = -2\left\{t\overline{\Phi'_o(t)}+\overline{\Psi_o(t)}\right\} \tag{4β}$$

εἰς τήν σχέσιν (3) καί ληφθῇ ἡ συζυγής μιγαδική ταύτης, προκύπτει ὁ τύπος (1.3) δεδομένου ὅτι :

$$\frac{dt}{\overline{dt}} = e^{2i\vartheta}. \tag{5}$$

Ἀναλόγως ἐκ τῆς σχέσεως (3) καί λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν τύπων (1) δι'ἓν ἀνισότροπον μέσον προκύπτει ὅτι :

$$\begin{aligned}\sigma_n+i\sigma_t = {} & Re\left\{(1+\mu_1^2)\Phi_o(t_1)+(1+\mu_2^2)\Psi_o(t_2)\right\}+\\ & +\frac{\overline{dt}}{dt}\left\{Re\left\{(1-\mu_1^2)\Phi_o(t_1)+(1-\mu_2^2)\Psi_o(t_2)\right\}+\right.\\ & \left.+2iRe\left\{\mu_1\Phi_o(t_1)+\mu_2\Psi_o(t_2)\right\}\right\},\end{aligned} \tag{6}$$

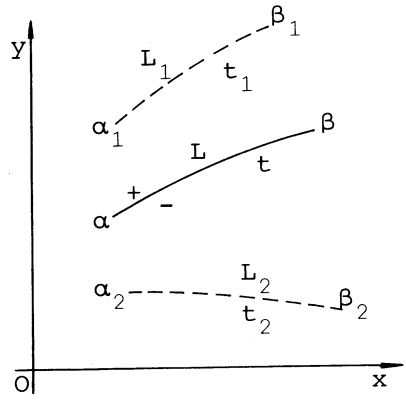
ἔνθα διά μέν τοῦ συμβόλου t παρίστανται τά σημεῖα τῆς ρωγμῆς L τοῦ Σχήματος 1.1, διά δέ τῶν συμβόλων t_1 καί t_2 παρίστανται τά σημεῖα τά προκύπτοντα ἐκ τῶν σημείων t τῆς ρωγμῆς ταύτης βάσει τῶν σχέσεων (2). Δηλαδή ἐάν θέσωμεν :

$$t = x+iy \tag{7α}$$

διά τά σημεῖα τῆς ρωγμῆς, θά ἔχωμεν :

$$t_1 = x+\mu_1 y\ , \qquad t_2 = x+\mu_2 y. \tag{7β}$$

Τοῦ σημείου t κινουμένου ἐπί τῆς ρωγμῆς L τά σημεῖα t_1 καί t_2 κινοῦνται ἐπί δύο ἀπεικονίσεων L_1 καί L_2 ἀντιστοίχως τῆς ρωγμῆς L, εὑρισκομένων βάσει τῶν σχέσεων (7), ὡς εἰς τό Σχῆμα 1. Δέον νά ἀναφερθῇ πάλιν ὅτι αἱ σταθεραί μ_1 καί μ_2 εἶναι χαρακτηριστικαί τοῦ ἐξεταζομένου ἀνισοτρόπου μέσου διαφέρουσαι ἀπό μέσου εἰς μέσον. Αἱ σταθεραί αὗται ἐξισοῦνται ἀμφότεραι μέ τήν φανταστικήν μονάδα δι' ἰσότροπον μέσον, ὅτε ὅμως ὅλοι οἱ τύποι οἱ ἰσχύοντες δι' ἀνισότροπον μέσουν παύουν ἰσχύοντες.



Σχῆμα 1

Ὁ τύπος (6) ἀναλυτικώτερον δύναται νά γραφῇ ὡς κάτωθι:

$$2(\sigma_n+i\sigma_t) = (1+\mu_1^2)\Phi_o(t_1)+(1+\bar{\mu}_1^2)\overline{\Phi_o(t_1)}+(1+\mu_2^2)\Psi_o(t_2)+$$
$$+(1+\bar{\mu}_2^2)\overline{\Psi_o(t_2)}+\frac{\overline{dt}}{dt}\left\{(1+i\mu_1)^2\Phi_o(t_1)+(1+i\bar{\mu}_1)^2\overline{\Phi_o(t_1)}+\right.$$
$$\left.+(1+i\mu_2)^2\Psi_o(t_2)+(1+i\bar{\mu}_2)^2\overline{\Psi_o(t_2)}\right\}\ . \tag{8}$$

Εἰς τόν αὐτόν τύπον (8) δυνάμεθα νά καταλήξωμεν καί κατ'

ἄλλον τρόπον. Οὕτω λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν ὅτι αἱ κατά τούς ἄξονας Ox καί Oy συνιστῶσαι τῆς φορτίσεως X_n καί Y_n ἀντιστοίχως, ὡς εἰς τό Σχῆμα 1.2, δίδονται ὑπό τῶν τύπων {SAVIN, 1961, Ch.1, § 4}.

$$\varphi_o(z_1)+\overline{\varphi_o(z_1)}+\psi_o(z_2)+\overline{\psi_o(z_2)} = -\int_0^s Y_n ds+C_1, \tag{9α}$$

$$\mu_1\varphi_o(z_1)+\bar{\mu}_1\overline{\varphi_o(z_1)}+\mu_2\psi_o(z_2)+\bar{\mu}_2\overline{\psi_o(z_2)} = \int_0^s X_n ds+C_2, \tag{9β}$$

ἔνθα αἱ συναρτήσεις $\varphi_o(z_1)$ καί $\psi_o(z_2)$ συνδέονται μετά τῶν $\Phi_o(z_1)$ καί $\Psi_o(z_2)$ διά τῶν σχέσεων :

$$\Phi_o(z_1) = \varphi_o'(z_1), \quad \Psi_o(z_2) = \psi_o'(z_2), \tag{10}$$

καί ἔχοντες ὑπ'ὄψιν καί τάς σχέσεις (1.24) καί (1.25), δυνάμεθα νά γράψωμεν :

$$\int_0^s(\sigma_n+i\sigma_t)d\tau = i\int_0^s(X_n+iY_n)ds = (1+i\mu_1)\varphi_o(t_1)+$$
$$+(1+i\bar{\mu}_1)\overline{\varphi_o(t_1)}+(1+i\mu_2)\psi_o(t_2)+(1+i\bar{\mu}_2)\overline{\psi_o(t_2)}+$$
$$+C_1+iC_2. \tag{11}$$

Λόγῳ τῆς σχέσεως (7α) διαπιστοῦμεν ὡσαύτως ὅτι :

$$x = \frac{t+\bar{t}}{2}, \quad y = -i\frac{t-\bar{t}}{2}, \tag{12}$$

ὁπότε αἱ σχέσεις (7β) λαμβάνουν τήν μορφήν :

$$t_1 = \frac{1}{2}\left\{(1-i\mu_1)t+(1+i\mu_1)\bar{t}\right\}, \quad t_2 = \frac{1}{2}\left\{(1-i\mu_2)t+(1+i\mu_2)\bar{t}\right\}. \tag{13}$$

Διά παραγωγίσεως ὡς πρός t καί $\bar{t}$ τῶν σχέσεων (13) εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως :

$$\frac{dt_1}{dt} = \frac{1}{2}\left\{(1-i\mu_1)+(1+i\mu_1)\frac{\overline{dt}}{dt}\right\}, \quad \frac{dt_2}{dt} = \frac{1}{2}\left\{(1-i\mu_2)+(1+i\mu_2)\frac{\overline{dt}}{dt}\right\}, \tag{14α}$$

$$\frac{dt_1}{\overline{dt}} = \frac{1}{2}\left\{(1-i\mu_1)\frac{dt}{\overline{dt}}+(1+i\mu_1)\right\}, \quad \frac{dt_2}{\overline{dt}} = \frac{1}{2}\left\{(1-i\mu_2)\frac{dt}{\overline{dt}}+(1+i\mu_2)\right\}, \tag{14β}$$

λαμβάνοντες δέ τάς συζυγεῖς μιγαδικάς παραστάσεις τῶν (14) ἔχομεν :

$$\frac{\overline{dt}_1}{\overline{dt}} = \frac{1}{2}\left\{(1+i\bar{\mu}_1)+(1-i\bar{\mu}_1)\frac{dt}{\overline{dt}}\right\}, \quad \frac{\overline{dt}_2}{\overline{dt}} = \frac{1}{2}\left\{(1+i\bar{\mu}_2)+(1-i\bar{\mu}_2)\frac{dt}{\overline{dt}}\right\}, \tag{15α}$$

$$\frac{\overline{dt}_1}{dt} = \frac{1}{2}\left\{(1+i\bar{\mu}_1)\frac{\overline{dt}}{dt}+(1-i\bar{\mu}_1)\right\}, \quad \frac{\overline{dt}_2}{dt} = \frac{1}{2}\left\{(1+i\bar{\mu}_2)\frac{\overline{dt}}{dt}+(1-i\bar{\mu}_2)\right\}. \tag{15β}$$

Διά παραγωγίσεως ἤδη τοῦ τύπου (11) ὡς πρός t καί ἐφ' ὅσον ληφθοῦν ὑπ'ὄψιν αἱ σχέσεις (14α) καί (15β) κατά τήν παραγώγισιν, προκύπτει ὁ τύπος (8) λόγῳ καί τῶν σχέσεων (10).

Θεωροῦντες πλέον τήν ρωγμήν L τοῦ Σχήματος 1 ἐντός τοῦ ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου ἔχομεν δεδομένας διά τήν περίπτωσιν τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος τάς συναρτήσεις $\sigma_n^{\pm}(t)$ καί $\sigma_t^{\pm}(t)$ τῆς καθέτου καί τῆς ἐφαπτομενικῆς φορτίσεως ἐπ'ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν τῆς ρωγμῆς ὡς καί τά δεδομένα τῆς φορτίσεως εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου.

Λόγῳ τῆς φορτίσεως εἰς τό ἄπειρον αἱ συναρτήσεις $\Phi_o(z_1)$ καί $\Psi_o(z_2)$ δύνανται νά ἐκφρασθοῦν ὡς ἑξῆς, ἀναλόγως πρός τάς ἐκφράσεις (1.1) διά τήν περίπτωσιν ἰσοτρόπου μέσου :

$$\Phi_o(z_1) = \Gamma+\Phi(z_1), \tag{16α}$$

$$\Psi_o(z_2) = \Gamma'+\Psi(z_2), \tag{16β}$$

ὅπου αἱ συναρτήσεις $\Phi(z_1)$ καί $\Psi(z_2)$ τείνουν εἰς τό μηδέν διά $|z_{1,2}|\to\infty$ καί ἔχομεν :

$$\Phi(z_1) = \mathcal{O}(\frac{1}{z_1}), \quad \Psi(z_2) = \mathcal{O}(\frac{1}{z_2}), \text{ διά } |z_{1,2}|\to\infty \quad . \tag{17}$$

Τάς σταθεράς Γ καί Γ' δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν συναρτήσει τῶν τάσεων $\sigma_{x\infty}$, $\sigma_{y\infty}$ καί $\tau_{xy\infty}$ εἰς τό ἄπειρον καί τῆς περιστροφῆς ε_∞ εἰς τό ἄπειρον. Δεδομένου ὅμως ὅτι ἡ περιστροφή εἰς τό ἄπειρον δέν ἐπηρεάζει τάς τάσεις ἐντός τοῦ ἀνισοτρόπου μέσου καί πρός ἀπλοποίησιν τῶν σχέσεων, εἰς τάς ὁποίας θά καταλήξωμεν, θεωροῦμεν ὅτι ἡ σταθερά Γ εἶναι

πραγματική, ὁπότε ἔχομεν τρία ζητούμενα πραγματικά μεγέθη, τά : Γ, $Re\Gamma'$ καί $Im\Gamma'$, καθ'ὅσον $\Gamma = \overline{\Gamma}$, ὡς προελέχθη, ὅτε λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν καί τῶν τύπων (1) προκύπτει τό ἐξῆς πρωτοβάθμιον σύστημα ἐξισώσεων πρός προσδιορισμόν τῶν μεγεθῶν Γ καί Γ' συναρτήσει τῶν τάσεων εἰς τό ἄπειρον $\sigma_{x\infty}$, $\sigma_{y\infty}$ καί $\tau_{xy\infty}$ {SAVIN, 1961, Ch.I, §7} :

$$\Gamma - \overline{\Gamma} = 0, \tag{18α}$$

$$\mu_1^2\Gamma + \overline{\mu}_1^2\overline{\Gamma} + \mu_2^2\Gamma' + \overline{\mu}_2^2\overline{\Gamma}' = \sigma_{x\infty}, \tag{18β}$$

$$\Gamma + \overline{\Gamma} + \Gamma' + \overline{\Gamma}' = \sigma_{y\infty}, \tag{18γ}$$

$$\mu_1\Gamma + \overline{\mu}_1\overline{\Gamma} + \mu_2\Gamma' + \overline{\mu}_2\overline{\Gamma}' = -\tau_{xy\infty}. \tag{18δ}$$

Θεωροῦντες ἤδη τά μεγέθη Γ καί Γ' ὡς γνωστά θά ἀναζητήσωμεν βάσει τῶν σχέσεων (16) τάς συναρτήσεις $\Phi(z_1)$ καί $\Psi(z_2)$ ἀντί τῶν $\Phi_o(z_1)$ καί $\Psi_o(z_2)$.

Δυνάμεθα περαιτέρω βάσει τῶν σχέσεων (16) νά γράψωμεν τόν τύπον (8) μέ βάσιν τάς μιγαδικάς συναρτήσεις $\Phi(z_1)$ καί $\Psi(z_2)$, αἵτινες πλεονεκτοῦν ἔναντι τῶν $\Phi_o(z_1)$ καί $\Psi_o(z_2)$, καθ' ὅσον μηδενίζονται ἐπιδεικνύουσαι τήν συμπεριφοράν (17) εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου. Οὕτως εὑρίσκομεν :

$$\begin{aligned}&(1+\mu_1^2)\Phi(t_1)+(1+\overline{\mu}_1^2)\overline{\Phi(t_1)}+(1+\mu_2^2)\Psi(t_2)+(1+\overline{\mu}_2^2)\overline{\Psi(t_2)}+\\&+\frac{\overline{dt}}{dt}\Big\{(1+i\mu_1)^2\Phi(t_1)+(1+i\overline{\mu}_1)^2\overline{\Phi(t_1)}+(1+i\mu_2)^2\Psi(t_2)+\\&+(1+i\overline{\mu}_2)^2\overline{\Psi(t_2)}\Big\} = 2f(t),\end{aligned} \tag{19}$$

ἔνθα ἐτέθη :

$$\begin{aligned}f(t) = \sigma_n(t)+i\sigma_t(t)&-\frac{1}{2}\Big\{(1+\mu_1^2)\Gamma+(1+\overline{\mu}_1^2)\overline{\Gamma}+(1+\mu_2^2)\Gamma'+\\&+(1+\overline{\mu}_2^2)\overline{\Gamma}'\Big\}-\frac{1}{2}\frac{\overline{dt}}{dt}\Big\{(1+i\mu_1)^2\Gamma+(1+i\overline{\mu}_1)^2\overline{\Gamma}+\\&+(1+i\mu_2)^2\Gamma'+(1+i\overline{\mu}_2)^2\overline{\Gamma}'\Big\}.\end{aligned} \tag{20}$$

Τόν τύπον (19) ἡμποροῦμεν νά γράψωμεν καί ὑπό τήν κάτωθι μορφήν :

$$(1+i\mu_1)\left\{(1-i\mu_1)+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\mu_1)\right\}\Phi(t_1)+(1+i\bar{\mu}_1)\left\{(1-i\bar{\mu}_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\bar{\mu}_1)\right\}\overline{\Phi(t_1)}+(1+i\mu_2)\left\{(1-i\mu_2)+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\mu_2)\right\}\Psi(t_2)+$$
$$+(1+i\bar{\mu}_2)\left\{(1-i\bar{\mu}_2)+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\bar{\mu}_2)\right\}\overline{\Psi(t_2)} = 2f(t), \qquad (21\alpha)$$

τῆς ὁποίας λαμβάνοντες τήν συζυγῆ καί πολλαπλασιάζοντες ἐπί $\overline{dt}/dt$ ἀμφότερα τά μέλη εὑρίσκομεν :

$$(1-i\mu_1)\left\{(1-i\mu_1)+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\mu_1)\right\}\Phi(t_1)+(1-i\bar{\mu}_1)\left\{(1-i\bar{\mu}_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\bar{\mu}_1)\right\}\overline{\Phi(t_1)}+(1-i\mu_2)\left\{(1-i\mu_2)+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\mu_2)\right\}\Psi(t_2)+$$
$$+(1-i\bar{\mu}_2)\left\{(1-i\bar{\mu}_2)+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\bar{\mu}_2)\right\}\overline{\Psi(t_2)} = 2\frac{\overline{dt}}{dt}\overline{f(t)}. \qquad (21\beta)$$

Οἱ τύποι (21) παρουσιάζουν τό μειονέκτημα ὅτι τυπικῶς ἐμφανίζονται εἰσερχόμεναι εἰς αὐτούς τέσσαρες μιγαδικαί συναρτήσεις, αἱ $\Phi(z_1)$, $\overline{\Phi}(z_1)$, $\Psi(z_2)$ καί $\overline{\Psi}(z_2)$. Ὡς θά φανῇ ὅμως κατωτέρω, διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἑνός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου θά μᾶς διηυκόλυνεν ἐξαιρετικῶς ἡ ἀπαλοιφή τῆς μιᾶς τούτων, πρᾶγμα ἀπλοῦν, δεδομένου ὅτι ἀνά δύο εἶναι συζυγεῖς μιγαδικαί. Ἐάν οὕτως θέλωμεν νά ἀπαλείψωμεν τήν $\overline{\Psi}(z_2)$, δέν ἔχομεν, εἰ μή νά πολλαπλασιάσωμεν τόν τύπον (21α) ἐπί $(1-i\bar{\mu}_2)$ καί τόν (21β) ἐπί $(1+i\bar{\mu}_2)$ καί ἀκολούθως νά ἀφαιρέσωμεν κατά μέλη τούς τύπους (21α) καί (21β), ὅτε εὑρίσκομεν :

$$(\mu_1-\bar{\mu}_2)\left\{(1-i\mu_1)+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\mu_1)\right\}\Phi(t_1)+(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)\left\{(1-i\bar{\mu}_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\bar{\mu}_1)\right\}\overline{\Phi(t_1)}+(\mu_2-\bar{\mu}_2)\left\{(1-i\mu_2)+\right.$$
$$\left.+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\mu_2)\right\}\Psi(t_2) = g(t), \qquad (23)$$

ἔνθα ἐτέθη :

$$g(t) = -i(1-i\bar{\mu}_2)f(t)+i\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\bar{\mu}_2)\overline{f(t)}. \qquad (24)$$

Εἰς τόν τύπον (23) δυνάμεθα κατ'ἄλλον τρόπον νά καταλήξωμεν ἐκκινοῦντες ἐκ τοῦ τύπου (11), τοῦ ὁποίου λαμβάνοντες τόν συζυγῆ ἔχομεν :

$$\int_0^s (\sigma_n - i\sigma_t)\overline{d\tau} = -i\int_0^s (X_n - iY_n)ds = (1-i\mu_1)\varphi_o(t_1) + $$
$$+(1-i\bar{\mu}_1)\overline{\varphi_o(t_1)} + (1-i\mu_2)\psi_o(t_2) + (1-i\bar{\mu}_2)\overline{\psi_o(t_2)} + C_1 - iC_2. \tag{25}$$

Ἐπιθυμοῦντες, ὡς καί πρότερον, ἐξάλειψιν τῆς συναρτήσεως $\bar{\psi}_o(z_2)$ πολλαπλασιάζομεν τόν τύπον (11) ἐπί $(1-i\bar{\mu}_2)$, τόν δέ τύπον (25) ἐπί $(1+i\bar{\mu}_2)$ καί ἀφαιροῦμεν τούς προκύπτοντας τύπους κατά μέλη, ὁπότε λαμβάνομεν :

$$(\mu_1-\bar{\mu}_2)\varphi_o(t_1) + (\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)\overline{\varphi_o(t_1)} + (\mu_2-\bar{\mu}_2)\psi_o(t_2) =$$
$$= \frac{1}{2i}\left\{(1-i\bar{\mu}_2)\int_0^s(\sigma_n+i\sigma_t)d\tau - (1+i\bar{\mu}_2)\int_0^s(\sigma_n-i\sigma_t)\overline{d\tau}\right\}. \tag{26}$$

Παραγωγίζομεν ἀκολούθως τόν τύπον (26) ὡς πρός t λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν καί τάς σχέσεις (10), (14), (15), (16), (20) καί (24), ὅτε προκύπτει ὁ τύπος (23), τοῦ ὁποίου ἑτέρα ἰσοδύναμος μορφή γραφῆς εἶναι καί ἡ κάτωθι :

$$(\mu_1-\bar{\mu}_2)(1-i\mu_1)\Phi(t_1) + (\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)(1-i\bar{\mu}_1)\overline{\Phi(t_1)} + (\mu_2-\bar{\mu}_2)(1-i\mu_2)\Psi(t_2) +$$
$$+\frac{\overline{dt}}{dt}\left\{(\mu_1-\bar{\mu}_2)(1+i\mu_1)\Phi(t_1) + (\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)(1+i\bar{\mu}_1)\overline{\Phi(t_1)} + \right.$$
$$\left. +(\mu_2-\bar{\mu}_2)(1+i\mu_2)\Psi(t_2)\right\} = g(t). \tag{27}$$

Θεωροῦντες ἤδη τήν ρωγμήν L τοῦ Σχήματος 1 μέ φοράν διαγραφῆς ἀπό τῆς ἀρχῆς της α πρός τό πέρας της β καί συμβολισμόν τῶν δύο πλευρῶν της μέ (+) καί (-), ὡς εἰς τό ἀνωτέρω Σχῆμα 1, λαμβάνομεν δύο τύπους ὡς ὁ (23) καί ὁ (27) διά τάς δύο πλευράς τῆς ρωγμῆς μέ τάς συναρτήσεις $\Phi(z_1)$ καί $\Psi(z_2)$ λαμβανούσας τάς δύο ὁριακάς των τιμάς $\Phi^{\pm}(t_1)$ καί $\Psi^{\pm}(t_2)$.

Σημειοῦται ὅτι αἱ μεταβληταί t_1 καί t_2, τῆς μεταβλητῆς t διαγραφούσης τήν ρωγμήν L, διαγράφουν τά τόξα L_1 καί L_2 ἀντιστοίχως εὑρισκόμενα βάσει καί τῶν σχέσεων (7β).

Λαμβανομένου ἤδη ὑπ'ὄψιν ὅτι αἱ συναρτήσεις $\Phi(z_1)$ καί $\Psi(z_2)$ εἶναι τμηματικῶς ὁλόμορφοι ἐφ'ὅλου τοῦ ἐπιπέδου πλήν τῶν τόξων L_1 καί L_2 ἀντιστοίχως, ἄνευ πόλων καί μέ συμπεριφοράν ὡς ἡ (17) εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου, αὗται δύνανται νά παρασταθοῦν δι'ὁλοκληρωμάτων CAUCHY μέ πυκνότητας $\varphi(t_1)$ καί $y(t_2)$ ἀντιστοίχως ὡς κάτωθι :

$$\Phi(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-z_1}d\tau_1, \tag{28α}$$

$$\Psi(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{y(\tau_2)}{\tau_2-z_2}d\tau_2. \tag{28β}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ δεῖκται $(_1)$ καί $(_2)$ κάτωθι τῶν μιγαδικῶν μεταβλητῶν οὐδέν νόημα ἔχουν, πέραν τοῦ ὅτι μᾶς ὑπενθυμίζουν ὅτι αἱ μιγαδικαί συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ ἐμφανίζονται εἰς τό πρόβλημά μας μέ τήν μεταβλητήν των z ἐμφανιζομένην ὡς z_1 καί z_2 ἀντιστοίχως, ἵνα μή γίνῃ σύγχυσις μέ τήν μεταβλητήν z. Τοῦτο ὅμως οὐδόλως ἐμποδίζει νά γράψωμεν τούς τύπους (28) ὡς :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau, \tag{29α}$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{y(\tau)}{\tau-z}d\tau. \tag{29β}$$

Βάσει τῶν τύπων τοῦ PLEMELJ ἔχομεν διά τάς ὁριακάς τιμάς τῆς συναρτήσεως $\Phi(z)$ ἐπί τοῦ τόξου L_1 :

$$\Phi^+(t_1)-\Phi^-(t_1) = \varphi(t_1), \tag{30α}$$

$$\Phi^+(t_1)+\Phi^-(t_1) = \frac{1}{\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t_1}d\tau \tag{30β}$$

καί διά τάς ὁριακάς τιμάς τῆς συναρτήσεως $\Psi(z)$ ἐπί τοῦ τόξου L_2:

$$\Psi^+(t_2)-\Psi^-(t_2) = y(t_2), \tag{31α}$$

$$\Psi^+(t_2)+\Psi^-(t_2) = \frac{1}{\pi i}\int_{L_2}\frac{y(\tau)}{\tau-t_2}d\tau. \tag{31β}$$

Γράφομεν ἤδη τόν τύπον (23) διά τάς δύο πλευράς τῆς ρωγμῆς L ὡς κάτωθι :

$$(\mu_1-\bar{\mu}_2)\left\{(1-i\mu_1)+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\mu_1)\right\}\Phi^{\pm}(t_1)+(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)\left\{(1-i\bar{\mu}_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\bar{\mu}_1)\right\}\overline{\Phi^{\pm}(t_1)}+(\mu_2-\bar{\mu}_2)\left\{(1-i\mu_2)+\right.$$
$$\left.+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\mu_2)\right\}\Psi^{\pm}(t_2) = g^{\pm}(t). \qquad (32)$$

Προσθέτοντες καί ἀφαιροῦντες τούς τύπους (32) κατά μέλη καί λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τούς τύπους (30) καί (31) εὑρίσκομεν :

$$(\mu_1-\bar{\mu}_2)\left\{(1-i\mu_1)+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\mu_1)\right\}\frac{1}{\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t_1}d\tau-$$
$$-(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)\left\{(1-i\bar{\mu}_1)+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\bar{\mu}_1)\right\}\frac{1}{\pi i}\int_{L_1}\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\bar{\tau}-\bar{t}_1}\overline{d\tau}+$$
$$+(\mu_2-\bar{\mu}_2)\left\{(1-i\mu_2)+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\mu_2)\right\}\frac{1}{\pi i}\int_{L_2}\frac{y(\tau)}{\tau-t_2}d\tau =$$
$$= g^{+}(t)+g^{-}(t), \qquad (33\alpha)$$

$$(\mu_1-\bar{\mu}_2)\left\{(1-i\mu_1)+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\mu_1)\right\}\varphi(t_1)+(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)\left\{(1-i\bar{\mu}_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\bar{\mu}_1)\right\}\overline{\varphi(t_1)}+(\mu_2-\bar{\mu}_2)\left\{(1-i\mu_2)+\frac{\overline{dt}}{dt}(1+i\mu_2)\right\}y(t_2) =$$
$$= g^{+}(t)-g^{-}(t). \qquad (33\beta)$$

Αἱ σχέσεις (33) λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν τύπων (14-15) γράφονται ἁπλούστερον ὡς ἑξῆς :

$$\frac{\mu_1-\bar{\mu}_2}{\pi i}\frac{dt_1}{dt}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-t_1}d\tau_1-\frac{\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2}{\pi i}\frac{\overline{dt}_1}{dt}\int_{L_1}\frac{\overline{\varphi(\tau_1)}}{\bar{\tau}_1-\bar{t}_1}\overline{d\tau}_1+$$
$$+\frac{\mu_2-\bar{\mu}_2}{\pi i}\frac{dt_2}{dt}\int_{L_2}\frac{y(\tau_2)}{\tau_2-t_2}d\tau_2 = p(t), \qquad (34\alpha)$$

$$(\mu_1-\bar{\mu}_2)\frac{dt_1}{dt}\varphi(t_1)+(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)\frac{\overline{dt}_1}{dt}\overline{\varphi(t_1)}+(\mu_2-\bar{\mu}_2)\frac{dt_2}{dt}y(t_2) = q(t), \qquad (34\beta)$$

ἔνθα ἐτέθησαν :

$$p(t)=\frac{1}{2}[g^{+}(t)+g^{-}(t)], \tag{35α}$$

$$q(t)=\frac{1}{2}[g^{+}(t)-g^{-}(t)]. \tag{35β}$$

Εἰς τάς σχέσεις (34) ἔχομεν ὡς ἀγνώστους συναρτήσεις τάς πυκνότητας $\varphi(t_1)$ καί $y(t_2)$ τῶν ὁλοκληρωμάτων CAUCHY (29) τῶν καθοριζουσῶν τάς ζητουμένας μιγαδικάς συναρτήσεις $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$. Ἐκ τῆς (34β) ὅμως δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν τήν συνάρτησιν $y(t_2)$ συναρτήσει τῆς $\varphi(t_1)$ ὡς κάτωθι :

$$y(t_2) = \frac{1}{\mu_2-\bar{\mu}_2}\frac{dt}{dt_2}q(t)-\frac{\mu_1-\bar{\mu}_2}{\mu_2-\bar{\mu}_2}\frac{dt_1}{dt_2}\varphi(t_1)-\frac{\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2}{\mu_2-\bar{\mu}_2}\frac{\overline{dt_1}}{dt_2}\overline{\varphi(t_1)}, \tag{36}$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες τήν τιμήν τῆς πυκνότητος $y(t_2)$ εἰς τό ὁλοκλήρωμα CAUCHY (29β) εὑρίσκομεν ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως $\Psi(z)$ συναρτήσει τῆς πυκνότητος $\varphi(t_1)$ τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (29α) τοῦ δίδοντος τήν συνάρτησιν $\Phi(z)$ ὡς ἑξῆς :

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i(\mu_2-\bar{\mu}_2)}\int_L\frac{q(\tau)}{\tau_2-z}d\tau-\frac{\mu_1-\bar{\mu}_2}{2\pi i(\mu_2-\bar{\mu}_2)}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_2-z}d\tau_1-$$
$$-\frac{\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2}{2\pi i(\mu_2-\bar{\mu}_2)}\int_{L_1}\frac{\overline{\varphi(\tau_1)}}{\tau_2-z}\overline{d\tau_1}. \tag{37}$$

Ἤδη δέν ἔχομεν παρά νά ἀντικαταστήσωμεν τήν ἔκφρασιν (36) τῆς συναρτήσεως $y(t_2)$ εἰς τήν ἐξίσωσιν (34α), διά νά λάβωμεν μίαν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν μέ ἄγνωστον συνάρτησιν τήν $\varphi(t_1)$. Οὕτως ἔχομεν :

$$\frac{\mu_1-\bar{\mu}_2}{\pi i}\frac{dt_1}{dt}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-t_1}d\tau_1-\frac{\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2}{\pi i}\frac{\overline{dt_1}}{dt}\int_{L_1}\frac{\overline{\varphi(\tau_1)}}{\bar{\tau}_1-\bar{t}_1}\overline{d\tau_1}-$$
$$-\frac{dt_2}{dt}\left\{\frac{\mu_1-\bar{\mu}_2}{\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_2-t_2}d\tau_1+\frac{\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2}{\pi i}\int_{L_1}\frac{\overline{\varphi(\tau_1)}}{\tau_2-t_2}\overline{d\tau_1}\right\} =$$
$$= p(t)-\frac{dt_2}{dt}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{q(\tau)}{\tau_2-t_2}d\tau. \tag{38}$$

Ὑπό ἄλλην μορφήν ἡ ἰδία ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (38) γράφεται :

$$\frac{\mu_1-\bar{\mu}_2}{\pi i}\int_{L_1}\left\{\frac{1}{\tau_1-t_1}\frac{dt_1}{dt}-\frac{1}{\tau_2-t_2}\frac{dt_2}{dt}\right\}\varphi(\tau_1)d\tau_1-$$
$$-\frac{\bar{\mu}_1-\mu_2}{\pi i}\cdot\int_{L_1}\left\{\frac{1}{\bar{\tau}_1-\bar{t}_1}\frac{\overline{dt_1}}{dt}+\frac{1}{\tau_2-t_2}\frac{dt_2}{dt}\right\}\overline{\varphi(\tau_1)}\,\overline{d\tau}_1 =$$
$$= p(t)-\frac{dt_2}{dt}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{q(\tau)}{\tau_2-t_2}d\tau. \qquad (39)$$

Ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (39) περιέχει ὡς ἄγνωστον συνάρτησιν τήν πυκνότητα $\varphi(t_1)$ τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (29α). Προσδιορισμός τῆς συναρτήσεως ταύτης ἐπιτρέπει προσδιορισμόν καί τῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ βάσει τῶν τύπων (29α) καί (37) ἀντιστοίχως καί περαιτέρω τῶν $\Phi_o(z)$ καί $\Psi_o(z)$ βάσει τῶν σχέσεων (16). Ὡς ἀκριβῶς ἰσχύει καί διά τήν περίπτωσιν τοῦ προβλήματος τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου, ἐπίλυσις κλειστῆς μορφῆς τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (39) δέν εἶναι δυνατή πλήν ὡρισμένων εἰδικῶν περιπτώσεων. Ἐν τούτοις εἶναι δυνατή ἡ προσεγγιστική ἐπίλυσίς της κατόπιν ἀναγωγῆς της εἰς σύστημα δύο πραγματικῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων. Μέθοδος ἐπιλύσεως πραγματικῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων ὡς καί συστημάτων τοιούτων ἐξισώσεων θέλει ἐκτεθῆ εἰς τό Κεφάλαιον Γ.

Ἡ συνάρτησις $\varphi(t_1)$ πρέπει πέραν τῆς ἐπαληθεύσεως τῆς ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως (39) νά ἐπαληθεύῃ καί τήν συνθήκην (1.16) τήν δηλοῦσαν τό μονοσήμαντον τῶν μετατοπίσεων κατά μῆκος τῆς ρωγμῆς L. Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν, ἀναλόγως πρός τήν περίπτωσιν τῆς ρωγμῆς ἐντός τοῦ ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου, ὅτι δι'ἕν ἀνισότροπον μέσον αἱ μετατοπίσεις $u(z)$ καί $v(z)$ εἰς τυχόν σημεῖόν του z δίδονται ὑπό τῶν τύπων { SAVIN, 1961, Ch. 1, § 3 } :

$$u(z) = 2Re\left\{p_1\varphi_o(z_1)+p_2\psi_o(z_2)\right\}, \qquad (40α)$$

$$v(z) = 2Re\left\{q_1\varphi_o(z_1)+q_2\psi_o(z_2)\right\}, \qquad (40β)$$

ἔνθα αἱ σταθεραί p_1, p_2, q_1 καί q_2 εἶναι χαρακτηριστικαί τοῦ ἑκάστοτε θεωρουμένου ἀνισοτρόπου μέσου, περαιτέρω δέ ὅτι συνδυάζοντες τούς τύπους (40) ἔχομεν :

$$u(z)+iv(z) = (p_1+iq_1)\varphi_o(z_1)+(\bar{p}_1+i\bar{q}_1)\overline{\varphi_o(z_1)}+ \\ +(p_2+iq_2)\psi_o(z_2)+(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)\overline{\psi_o(z_2)}, \tag{41}$$

δυνάμεθα νά γράψωμεν διά τάς μετατοπίσεις ἐπί τῆς ρωγμῆς L:

$$u^{\pm}(t)+iv^{\pm}(t) = (p_1+iq_1)\varphi_o^{\pm}(t_1)+(\bar{p}_1+i\bar{q}_1)\overline{\varphi_o^{\pm}(t_1)}+ \\ +(p_2+iq_2)\psi_o^{\pm}(t_2)+(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)\overline{\psi_o^{\pm}(t_2)}. \tag{42}$$

Ὁ τύπος (42) παραγωγιζόμενος ὡς πρός t δίδει διά τάς μεταβολάς τῶν μετατοπίσεων ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς κατά μῆκος αὐτῆς, λόγῳ καί τῶν σχέσεων (10) καί (16) :

$$\frac{du^{\pm}(t)}{dt}+\frac{dv^{\pm}(t)}{dt} = (p_1+iq_1)\frac{dt_1}{dt}\Phi^{\pm}(t_1)+(\bar{p}_1+i\bar{q}_1)\frac{\overline{dt_1}}{dt}\overline{\Phi^{\pm}(t_1)}+ \\ +(p_2+iq_2)\frac{dt_2}{dt}\Psi^{\pm}(t_2)+(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)\frac{\overline{dt_2}}{dt}\overline{\Psi^{\pm}(t_2)}, \tag{43}$$

ὁπότε ἡ συνθήκη (1.16) ἤ ἡ κάτωθι ἰσοδύναμος αὐτῆς :

$$\int_L \left\{ \frac{d\,[\,u^+(\tau)-u^-(\tau)\,]}{d\tau}+i\frac{d\,[\,v^+(\tau)-v^-(\tau)\,]}{d\tau} \right\} d\tau = 0 \tag{44}$$

λαμβάνουν τήν ἑξῆς μορφήν :

$$(p_1+iq_1)\int_{L_1}[\,\Phi^+(\tau_1)-\Phi^-(\tau_1)\,]\,d\tau_1+(\bar{p}_1+i\bar{q}_1)\int_{L_1}[\,\overline{\Phi^+(\tau_1)}- \\ -\overline{\Phi^-(\tau_1)}\,]\,\overline{d\tau}_1+(p_2+iq_2)\int_{L_2}[\,\Psi^+(\tau_2)-\Psi^-(\tau_2)\,]\,d\tau_2+ \\ +(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)\int_{L_2}[\,\overline{\Psi^+(\tau_2)}-\overline{\Psi^-(\tau_2)}\,]\,\overline{d\tau}_2 = 0. \tag{45}$$

Ἡ συνθήκη (45) λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν τύπων (30α) καί (36) δύναται νά ἐκφρασθῇ συναρτήσει μόνον τῆς συναρτήσεως $\varphi(t_1)$ ὡς κάτωθι :

$$(p_1+iq_1)\int_{L_1}\varphi(\tau_1)\,d\tau_1+(\bar{p}_1+i\bar{q}_1)\int_{L_1}\overline{\varphi(\tau_1)}\,\overline{d\tau}_1-$$

$$-\frac{p_2+iq_2}{\mu_2-\bar{\mu}_2}\left\{(\mu_1-\bar{\mu}_2)\int_{L_1}\varphi(\tau_1)d\tau_1+(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)\int_{L_1}\overline{\varphi(\tau_1)}\overline{d\tau}_1\right\}+$$

$$+\frac{\bar{p}_2+i\bar{q}_2}{\mu_2-\bar{\mu}_2}\left\{(\mu_1-\mu_2)\int_{L_1}\varphi(\tau_1)d\tau_1+(\bar{\mu}_1-\mu_2)\int_{L_1}\overline{\varphi(\tau_1)}\overline{d\tau}_1\right\}=$$

$$=-\frac{p_2+iq_2}{\mu_2-\bar{\mu}_2}\int_L q(\tau)d\tau+\frac{\bar{p}_2+i\bar{q}_2}{\mu_2-\bar{\mu}_2}\int_L\overline{q(\tau)}\overline{d\tau}. \qquad (46)$$

Ἡ συνθήκη (46) δύναται ἐπίσης νά γραφῇ καί ὡς ἑξῆς κατ' ἁπλούστερον τρόπον :

$$\left\{(p_1+iq_1)(\mu_2-\bar{\mu}_2)-(p_2+iq_2)(\mu_1-\bar{\mu}_2)+(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)(\mu_1-\mu_2)\right\}\int_{L_1}\varphi(\tau_1)d\tau_1+$$

$$+\left\{(\bar{p}_1+i\bar{q}_1)(\mu_2-\bar{\mu}_2)-(p_2+iq_2)(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)+\right.$$

$$\left.+(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)(\bar{\mu}_1-\mu_2)\right\}\int_{L_1}\overline{\varphi(\tau_1)}\overline{d\tau}_1=$$

$$=-(p_2+iq_2)\int_L q(\tau)d\tau+(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)\int_L\overline{q(\tau)}\overline{d\tau}. \qquad (47)$$

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Τό ἐξετασθέν εἰς τό τμῆμα τοῦτο πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα δι' ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου δέν ἔχει μέχρι σήμερον ἐπιλυθῆ εἰς τήν γενικήν του μορφήν. Μόνον τό πρόβλημα τῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου ἔχει ἀντιμετωπισθῆ λόγῳ καί τῆς ἁπλότητός του. Οὕτως οἱ SAVIN {1961}, MILNE-THOMSON {1968} καί ΓΑΛΙΔΑΚΗΣ {1968} ἐπέλυσαν εἰδικάς περιπτώσεις τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος δι' ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου τῇ χρήσει τῆς μεθόδου τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως τῆς ρωγμῆς ἐπί τοῦ μοναδιαίου κύκλου ἤ, ὅπερ ταύτό, διά θεωρήσεως τῆς ρωγμῆς ὡς ἀκραίας περιπτώσεως ἐλλείψεως εὑρισκομένης ἐντός τοῦ ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου. Ὅσον ἀφορᾷ εἰδικώτερον εἰς τήν ἐντατικήν κατάστασιν παρά τά ἄκρα τῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς, ἐνδιαφέρον παρουσιάζει τό ἄρθρον τῶν SIH, PARIS and IRWIN {1965}.

Τό πρόβλημα τῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἀνι-

σοτρόπου μέσου δύναται νά ἀντιμετωπισθῇ εὐκολώτερον διά χρήσεως τῆς μεθόδου τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν καί ἀναγωγῆς τοῦ ὅλου προβλήματος εἰς πρόβλημα RIEMANN-HILBERT ἐπί τῆς ρωγμῆς, ἀναλόγως πρός τήν ἐπίλυσιν τοῦ αὐτοῦ προβλήματος δι' ἰσότροπον μέσον ὑπό τοῦ MUSKHELISHVILI {1953A, §120}. Ἡ μέθοδος αὕτη παρουσιάζει ἔναντι τῆς προαναφερθείσης μεθόδου τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως πέραν τῆς σχετικῆς ἀπλότητός της καί τό πλεονέκτημα ὅτι δύναται νά ἐφαρμοσθῇ καί εἰς τήν περίπτωσιν ὑπάρξεως πολλῶν συγγραμμικῶν ρωγμῶν. Διά τῆς μεθόδου ταύτης ἀντεμετωπίσθη εἰδική περίπτωσις τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος τῶν συγγραμμικῶν ρωγμῶν ὑπό τῶν GREEN and ZERNA {1968, §9.10}, γενικώτεραι περιπτώσεις τοῦ αὐτοῦ προβλήματος ὑπό τῶν SIH and LIEBOWITZ {1968}, ἡ δέ γενική περίπτωσις ὑπό τοῦ ΙΩΑΚΕΙΜΙΔΗ {1973}, ὅστις ἐθεώρησεν ὅμως ὑφισταμένην μίαν μόνον ρωγμήν, καί ὑπό τοῦ KRENK {1975A}, ὅστις ἔδωσε τήν πλήρη λύσιν τοῦ προβλήματος εἰς περίπτωσιν ὑπάρξεως πολλῶν συγγραμμικῶν ρωγμῶν.

Τό πρόβλημα τῆς εὐθυγράμμου ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου ἐμελετήθη καί διά χρήσεως τῆς μεθόδου τῶν μεταστάσεων. Διά τῆς μεθόδου ταύτης ἀντεμετώπισαν τό πρόβλημα τοῦτο οἱ BARNETT and ASARO {1972} ὡς καί ὁ TUPHOLME {1974}. Σημειοῦται ὡσαύτως ὅτι τό πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐντατικοῦ πεδίου τοῦ προκαλουμένου ὑπό μεταστάσεων ἐντός ἀνισοτρόπου μέσου ἐμελετήθη ὑπό τοῦ STROH {1958}, ὅστις ἀντεμετώπισεν εἰς τό αὐτό ἄρθρον καί τό πρόβλημα τῆς ρωγμῆς τῇ χρήσει ὁλοκληρωτικῶν μετασχηματισμῶν, καί ὑπό τοῦ STEEDS {1973}, ὅστις ἐξήτασεν ὅλας τά δυναμένας νά παρουσιασθοῦν περιπτώσεις μεταστάσεων ἐντός ἀνισοτρόπου μέσου.

Ἡμεῖς εἰς τό τμῆμα τοῦτο ἠρκέσθημεν εἰς τό νά ἀναγάγωμεν τό πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου εἰς ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξόσωσιν, χωρίς νά ἑρμηνεύσωμεν τήν ἀκολουθηθεῖσαν μέθοδον τῇ χρήσει τῶν ἐννοιῶν τῶν συγκεντρωμένων δυνάμεων καί τῶν μεταστάσεων, ὡς εἴχομεν πράξει διά τό ἰσότροπον μέσον.

Α9. ΕΤΕΡΑ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΛΕΙΑΣ ΡΩΓΜΗΣ ΕΝΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΟΥ ΜΕΣΟΥ

Τό πρόβλημα τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου ἀνάγεται συμφώνως πρός ὅσα ἐξετέθησαν εἰς τό τμῆμα Α8 καί βάσει τῶν τύπων (8.29) εἰς τόν προσδιορισμόν τῶν συναρτήσεων $\varphi(t)$ καί $y(t)$ ἐπαληθευουσῶν τάς ὁριακάς συνθήκας (8.34), ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει τελικῶς ἡ ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (8.38) μέ ἄγνωστον συνάρτησιν τήν $\varphi(t)$. Αἱ ὁριακαί τιμαί τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ ὑπακούουν εἰς τούς τύπους τοῦ PLEMELJ (8.30) καί (8.31), εἰς τά δεξιά μέλη τῶν ὁποίων ἐμφανίζονται αἱ συναρτήσεις $\varphi(t)$ καί $y(t)$.

Ἤδη γεννᾶται τό ἐρώτημα διατί νά θεωρήσωμεν ὡς βασικάς καί προσδιοριστέας συναρτήσεις ἐπί τῆς ρωγμῆς L τάς πυκνότητας $\varphi(t)$ καί $y(t)$ τῶν ὁλοκληρωμάτων CAUCHY (8.29) καί ταύτοχρόνως διαφοράς τῶν ὁριακῶν τιμῶν τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς κατά τούς τύπους (8.30α) καί (8.31α) καί νά μή θεωρήσωμεν ὡς βασικάς καί προσδιοριστέας συναρτήσεις ἐπί τῆς ρωγμῆς L τάς συναρτήσεις $\omega(t)$ καί $\chi(t)$ ὁριζομένας ὡς ἀθροίσματα τῶν ὁριακῶν τιμῶν τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων $\Phi(z)$ καί $\Psi(z)$ ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς ρωγμῆς. Πράγματι οὐδείς λόγος ὑφίσταται, ὅστις νά ἐπιβάλλῃ τήν ἐκλογήν ὡς βασικῶν συναρτήσεων ἐπί τῆς ρωγμῆς τῶν $\varphi(t)$ καί $y(t)$ καί ὄχι τῶν $\omega(t)$ καί $\chi(t)$ ἤ καί γραμμικῶν συνδυασμῶν τῶν $\varphi(t)$ καί $\omega(t)$ καί $y(t)$ καί $\chi(t)$ ἀντιστοίχως.

Εἰσάγοντες ἤδη τάς συναρτήσεις $\omega(t)$ καί $\chi(t)$ κατά τά ἀνωτέρω δυνάμεθα νά γράψωμεν τούς τύπους τοῦ PLEMELJ (8.30) καί (8.31) ὡς ἑξῆς :

$$\Phi^{+}(t_1)-\Phi^{-}(t_1) = \varphi(t_1) = \frac{1}{\pi i X(t_1)} \int_{L_1} \frac{X(\tau_1)\omega(\tau_1)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 + \frac{2C_1}{X(t_1)}, \tag{1α}$$

$$\Phi^+(t_1)+\Phi^-(t_1) = \frac{1}{\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-t_1}d\tau_1 = \omega(\tau_1) \tag{1β}$$

καί :

$$\Psi^+(t_2)-\Psi^-(t_2) = y(t_2) = \frac{1}{\pi i X(t_2)}\int_{L_2}\frac{X(\tau_2)\chi(\tau_2)}{\tau_2-t_2}d\tau_2+\frac{2C_2}{X(t_2)}, \tag{2α}$$

$$\Psi^+(t_2)+\Psi^-(t_2) = \frac{1}{\pi i}\int_{L_2}\frac{y(\tau_2)}{\tau_2-t_2}d\tau_2 = \chi(\tau_2), \tag{2β}$$

τά δέ ὁλοκληρώματα CAUCHY (8.28) τά δίδοντα τάς συναρτήσεις $\Phi(z_1)$καί $\Psi(z_2)$λαμβάνουν τήν ἑξῆς μορφήν :

$$\Phi(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-z_1}d\tau_1 = \frac{1}{2\pi i X_1(z_1)}\int_{L_1}\frac{X_1(\tau_1)\omega(\tau_1)}{\tau_1-z_1}d\tau_1+ +\frac{C_1}{X_1(z_1)}, \tag{3α}$$

$$\Psi(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{y(\tau_2)}{\tau_2-z_2}d\tau_2 = \frac{1}{2\pi i X_2(z_2)}\int_{L_2}\frac{X_2(\tau_2)\chi(\tau_2)}{\tau_2-z_2}d\tau_2+ +\frac{C_2}{X_2(z_2)}, \tag{3β}$$

τῶν συναρτήσεων $X_{1,2}(z)$ διδομένων κατά τά γνωστά ὑπό τῶν τύπων :

$$X_{1,2}(z) = \sqrt{(z-\alpha_{1,2})(z-\beta_{1,2})}, \tag{4}$$

ἔνθα $\alpha_{1,2}$ καί $\beta_{1,2}$ τά ἄκρα τῶν τόξων $L_{1,2}$ τοῦ Σχήματος 8.1.

Συναρτήσει τῶν συναρτήσεων $\omega(\tau_1)$ καί $\chi(\tau_2)$ αἱ ὁριακαί συνθῆκαι (8.34) τοῦ προβλήματος δύνανται νά γραφοῦν προφανῶς, βάσει καί τῶν τύπων (1) καί (2), καί ὡς ἑξῆς :

$$(\mu_1-\bar{\mu}_2)\frac{dt_1}{dt}\omega(t_1)+(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)\frac{\overline{dt_1}}{dt}\overline{\omega(t_1)}+(\mu_2-\bar{\mu}_2)\frac{dt_2}{dt}\chi(t_2) = p(t), \tag{5α}$$

$$\begin{aligned}(\mu_1-\bar{\mu}_2)\frac{dt_1}{dt}&\left\{\frac{1}{\pi i X_1(t_1)}\int_{L_1}\frac{X_1(\tau_1)\omega(\tau_1)}{\tau_1-t_1}d\tau_1+\frac{2C_1}{X_1(t_1)}\right\}+\\ +(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)\frac{\overline{dt_1}}{dt}&\left\{-\frac{1}{\pi i\overline{X_1(t_1)}}\int_{L_1}\frac{\overline{X_1(\tau_1)}\,\overline{\omega(\tau_1)}}{\bar{\tau}_1-\bar{t}_1}\overline{d\tau_1}+\frac{2C_1}{\overline{X_1(t_1)}}\right\}+\\ +(\mu_2-\bar{\mu}_2)\frac{dt_2}{dt}&\left\{\frac{1}{\pi i X_2(t_2)}\int_{L_2}\frac{X_2(\tau_2)\chi(\tau_2)}{\tau_2-t_2}d\tau_2+\frac{2C_2}{X_2(t_2)}\right\} = q(t).\end{aligned} \tag{5β}$$

Ἐκφράζοντες βάσει τῆς σχέσεως (5α) τήν συνάρτησιν $\chi(t_2)$

συναρτήσει τῆς συναρτήσεως $\omega(t_1)$ ἔχομεν :

$$\chi(t_2) = \frac{1}{\mu_2-\bar{\mu}_2}\frac{dt}{dt_2}p(t)-\frac{\mu_1-\bar{\mu}_2}{\mu_2-\bar{\mu}_2}\frac{dt_1}{dt_2}\omega(t_1)-\frac{\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2}{\mu_2-\bar{\mu}_2}\frac{\overline{dt_1}}{\overline{dt_2}}\overline{\omega(t_1)}, \quad (6)$$

ἡ ὁποία ἔκφρασις εἶναι ἐντελῶς ἀνάλογος τῆς (8.36) διά τήν συνάρτησιν $y(t_2)$. Ἀντικαθιστῶντες ἤδη τήν τιμήν τῆς πυκνότητος $\chi(t_2)$ εἰς τό ὁλοκλήρωμα CAYCHY (3β) εὑρίσκομεν ἔκφρασιν, ἀντίστοιχον τῆς (8.37), τῆς συναρτήσεως $\Psi(z)$ συναρτήσει τῆς πυκνότητος $\omega(t_1)$ τοῦ ὁλοκληρώματος CAUCHY (3α) τοῦ δίδοντος τήν συνάρτησιν $\Phi(z)$ ὡς ἐξῆς :

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i(\mu_2-\bar{\mu}_2)X_2(z)}\int_L \frac{X_2(\tau_2)p(\tau)}{\tau_2-z}d\tau-$$
$$-\frac{\mu_1-\bar{\mu}_2}{2\pi i(\mu_2-\bar{\mu}_2)X_2(z)}\int_{L_1}\frac{X_2(\tau_2)\omega(\tau_1)}{\tau_2-z}d\tau_1-$$
$$-\frac{\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2}{2\pi i(\mu_2-\bar{\mu}_2)X_2(z)}\int_{L_1}\frac{X_2(\tau_2)\overline{\omega(\tau_1)}}{\tau_2-z}\overline{d\tau}_1+\frac{C_2}{X_2(z)}. \quad (7)$$

Ἤδη δέν ἔχομεν παρά νά ἀντικαταστήσωμεν τήν ἔκφρασιν (6) τῆς συναρτήσεως $\chi(t_2)$ εἰς τήν ἐξίσωσιν (5β), διά νά λάβωμεν μίαν ἰδιόμορφον ὁλοκληρωτικήν ἐξίσωσιν, ἀντίστοιχον τῆς (8.38), μέ ἄγνωστον συνάρτησιν τήν $\omega(t_1)$. Οὕτως ἔχομεν:

$$(\mu_1-\bar{\mu}_2)\frac{dt_1}{dt}\left\{\frac{1}{\pi i X_1(t_1)}\int_{L_1}\frac{X_1(\tau_1)\omega(\tau_1)}{\tau_1-t_1}d\tau_1+\frac{2C_1}{X_1(t_1)}\right\}+$$
$$+(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)\frac{\overline{dt_1}}{dt}\left\{-\frac{1}{\pi i\overline{X_1(t_1)}}\int_{L_1}\frac{\overline{X_1(\tau_1)}\overline{\omega(\tau_1)}}{\bar{\tau}_1-\bar{t}_1}\overline{d\tau}_1+\frac{2\bar{C}_1}{\overline{X_1(t_1)}}\right\}-$$
$$-\frac{dt_2}{dt}\left\{\frac{\mu_1-\bar{\mu}_2}{\pi i X_2(t_2)}\int_{L_1}\frac{X_2(\tau_2)\omega(\tau_1)}{\tau_2-t_2}d\tau_1+\right.$$
$$\left.+\frac{\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2}{\pi i X_2(t_2)}\int_{L_1}\frac{X_2(\tau_2)\overline{\omega(\tau_1)}}{\tau_2-t_2}\overline{d\tau}_1-\frac{2C_2(\mu_2-\bar{\mu}_2)}{X_2(t_2)}\right\} = q(t)-$$
$$-\frac{dt_2}{dt}\frac{1}{\pi i X_2(t_2)}\int_L\frac{X_2(\tau_2)p(\tau)}{\tau_2-t_2}d\tau. \quad (8)$$

Ὑπό ἄλλην μορφήν ἡ ἰδία ἰδιόμορφος ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις (8) γράφεται ἀντιστοίχως πρός τήν (8.39) :

$$\frac{\mu_1-\bar{\mu}_2}{\pi i}\int_{L_1}\left\{\frac{X_1(\tau_1)}{X_1(t_1)}\frac{1}{\tau_1-t_1}\frac{dt_1}{dt}-\frac{X_2(\tau_2)}{X_2(t_2)}\frac{1}{\tau_2-t_2}\frac{dt_2}{dt}\right\}\omega(\tau_1)d\tau_1-$$

$$-\frac{\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2}{\pi i}\int_{L_1}\left\{\overline{\frac{X_1(\tau_1)}{X_1(t_1)}}\frac{1}{\bar{\tau}_1-\bar{t}_1}\frac{\overline{dt}_1}{dt}+\frac{X_2(\tau_2)}{X_2(t_2)}\frac{1}{\tau_2-t_2}\frac{dt_2}{dt}\right\}\overline{\omega(\tau_1)}\overline{d\tau}_1=$$

$$=q(t)-\frac{dt_2}{dt}\frac{1}{\pi i X_2(t_2)}\int_L\frac{X_2(\tau_2)p(\tau)}{\tau_2-t_2}d\tau-\frac{2C_1(\mu_1-\bar{\mu}_2)}{X_1(t_1)}\frac{dt_1}{dt}-$$

$$-\frac{2\bar{C}_1(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)}{\overline{X_1(t_1)}}\frac{\overline{dt}_1}{dt}-\frac{2C_2(\mu_2-\bar{\mu}_2)}{X_2(t_2)}\frac{dt_2}{dt}\ . \tag{9}$$

Αἱ ἰδιόμορφοι ὁλοκληρωτικαί ἐξισώσεις (8.38) καί (8) λόγῳ τῶν τύπων (1) δύνανται νά γραφοῦν καί μέ ἀγνώστους συναρτήσεις ὄχι τάς $\varphi(t)$ καί $\omega(t)$ ἀντιστοίχως, ἀλλ' ἀντιστρόφως ἡ μέν (8.38) μέ ἄγνωστον συνάρτησιν τήν $\omega(t)$ καί ἡ (8) μέ ἄγνωστον συνάρτησιν τήν $\varphi(t)$ ὡς κάτωθι :

$$(\mu_1-\bar{\mu}_2)\frac{dt_1}{dt}\omega(t_1)+(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)\frac{\overline{dt}_1}{dt}\overline{\omega(t_1)}-$$

$$-\frac{dt_2}{dt}\left\{\frac{\mu_1-\bar{\mu}_2}{\pi i}\int_{L_1}\frac{1}{X_1(\tau_1)(\tau_2-t_2)}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{L_1}\frac{X_1(\tau'_1)\omega(\tau'_1)}{\tau'_1-\tau_1}d\tau'_1+\right.\right.$$

$$\left.+2C_1\right]d\tau_1+\frac{\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2}{\pi i}\int_{L_1}\frac{1}{\overline{X_1(\tau_1)}(\tau_2-t_2)}\left[-\frac{1}{\pi i}\int_{L_1}\frac{\overline{X_1(\tau'_1)}\overline{\omega(\tau'_1)}}{\bar{\tau}'_1-\bar{\tau}_1}\overline{d\tau'_1}+\right.$$

$$\left.\left.+2\bar{C}_1\right]\overline{d\tau}_1\right\}=p(t)-\frac{dt_2}{dt}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{q(\tau)}{\tau_2-t_2}d\tau \tag{10}$$

καί ἐπίσης :

$$(\mu_1-\bar{\mu}_2)\frac{dt_1}{dt}\varphi(t_1)+(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)\frac{\overline{dt}_1}{dt}\overline{\varphi(t_1)}-$$

$$-\frac{dt_2}{dt}\left\{\frac{\mu_1-\bar{\mu}_2}{\pi i X_2(t_2)}\int_{L_1}\frac{X_2(\tau_2)}{\tau_2-t_2}\frac{1}{\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau'_1)}{\tau'_1-\tau_1}d\tau'_1d\tau_1-\right.$$

$$\left.-\frac{\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2}{\pi i X_2(t_2)}\int_{L_1}\frac{X_2(\tau_2)}{\tau_2-t_2}\frac{1}{\pi i}\int_{L_1}\frac{\overline{\varphi(\tau'_1)}}{\bar{\tau}'_1-\bar{\tau}_1}\overline{d\tau'_1}\,\overline{d\tau}_1+\frac{2C_2(\mu_2-\bar{\mu}_2)}{X_2(t_2)}\right\}=$$

$$=q(t)-\frac{dt_2}{dt}\frac{1}{\pi i X_2(t_2)}\int_L\frac{X_2(\tau_2)p(\tau)}{\tau-t_2}d\tau. \tag{11}$$

Ἔχομεν οὕτω τέσσαρας ἰσοδυνάμους ἰδιομόρφους ὁλοκληρω-

τικάς έξισώσεις τάς (8.38), (8), (10) καί (11), άρκεῖ δέ ἡ έπίλυσις μιᾶς έκ τούτων πρός εὕρεσιν μιᾶς τῶν συναρτήσεων $\varphi(t)$ ἤ $\omega(t)$ καί έπίλυσιν τοῦ ὅλου προβλήματός μας. Ἀναλόγως θά ἠδυνάμεθα νά σχηματίσωμεν τέσσαρας άντιστοίχους ἰδιομόρφους ὁλοκληρωτικάς έξισώσεις μέ άγνώστους συναρτήσεις τάς $y(t)$ ἤ $\chi(t)$. Ὁπωσδήποτε πρέπει κατά τήν έπίλυσιν μιᾶς τῶν ἰδιομόρφων ὁλοκληρωτικῶν έξισώσεων νά ληφθῇ ὑπ' ὄψιν καί ἡ συνθήκη (8.47) τοῦ μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων, ἥτις εὐκόλως βάσει τοῦ τύπου (1α) δύναται νά έκφρασθῇ καί συναρτήσει τῆς συναρτήσεως $\omega(t)$, έφ' ὅσον αὕτη εἶναι ἡ άγνωστος συνάρτησις τῆς ἰδιομόρφου ὁλοκληρωτικῆς έξισώσεως.

Ἀπομένει ἤδη τό πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν σταθερῶν C_1 καί C_2 τῶν έκφράσεων (3) τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων $\Phi(z_1)$ καί $\Psi(z_2)$. Διά τήν εὕρεσιν τούτων διαπιστοῦμεν κατ' άρχήν βάσει τῶν έκφράσεων (3) ὅτι :

$$C_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\varphi(\tau_1)d\tau_1, \qquad C_2 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}y(\tau_2)d\tau_2, \tag{12}$$

λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι δυνάμεθα βάσει τῆς σχέσεως (4) νά θεωρήσωμεν ὅτι :

$$\frac{X_{1,2}(z)}{z} \to 1, \text{ δι' } |z| \to \infty \quad . \tag{13}$$

Περαιτέρω ἡ συνθήκη μονοσημάντου τῶν μετατοπίσεων (8.47) λόγῳ καί τῆς πρώτης τῶν σχέσεων (12) δύναται νά γραφῇ :

$$\left\{(p_1+iq_1)(\mu_2-\bar{\mu}_2)-(p_2+iq_2)(\mu_1-\bar{\mu}_2)+(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)(\mu_1-\mu_2)\right\}C_1-$$
$$-\left\{(\bar{p}_1+i\bar{q}_1)(\mu_2-\bar{\mu}_2)-(p_2+iq_2)(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)+(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)(\bar{\mu}_1-\mu_2)\right\}\bar{C}_1=$$
$$=\frac{p_2+iq_2}{2\pi i}\int_L q(\tau)d\tau-\frac{\bar{p}_2+i\bar{q}_2}{2\pi i}\int_L \overline{q(\tau)d\tau} \ . \tag{14}$$

Ἐκ τῆς μιγαδικῆς πρωτοβαθμίου έξισώσεως (14) δυναμένης νά άναλυθῇ εἰς ἕν σύστημα δύο πραγματικῶν πρωτοβαθμίων έξισώσεων δύναται εὐχερῶς νά προσδιορισθῇ ἡ σταθερά C_1 μέ ταύτόχρονον έξασφάλισιν τῆς ἰσχύος τῆς συνθήκης μονοσημάν-

του τῶν μετατοπίσεων (8.47), ἐκ τῆς ὁποίας καί προέκυψεν.

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τόν περαιτέρω προσδιορισμόν τῆς σταθερᾶς C_2, δύναται νά ληφθῇ ὑπ'ὄψιν ἡ σχέσις (8.45), ἥτις, λόγῳ καί τῶν σχέσεων (12), (8.30α) καί (8.31α), δύναται νά γραφῇ ὡς κάτωθι :

$$(p_1+iq_1)C_1-(\bar{p}_1+i\bar{q}_1)\bar{C}_1+(p_2+iq_2)C_2-(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)\bar{C}_2 = 0. \quad (15)$$

Ἡ σχέσις (15), διασφαλίζουσα ὡς καί ἡ (14) τό μονοσήμαντον τῶν μετατοπίσεων, ἀποτελεῖ κατά βάσιν μίαν μιγαδικήν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ πρός προσδιορισμόν τῆς σταθερᾶς C_2, ἐφ'ὅσον ἡ σταθερά C_1 θεωρηθῇ εὑρεθεῖσα ὡς λύσις τῆς μιγαδικῆς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως (14).

Ἡ σταθερά C_2 δύναται νά εὑρεθῇ καί κατ'ἄλλον τρόπον συναρτήσει τῆς σταθερᾶς C_1. Λαμβάνοντες οὕτως ὑπ'ὄψιν τάς σχέσεις (12) ὡς καί τήν (8.36) εὑρίσκομεν εὐκόλως τήν ἐξῆς ἔκφρασιν τῆς σταθερᾶς C_2 :

$$C_2 = \frac{1}{\mu_2-\bar{\mu}_2}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_L q(\tau)d\tau-(\mu_1-\bar{\mu}_2)C_1+(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)\bar{C}_1\right\}. \quad (16)$$

Δύναται νά διαπιστωθῇ ὅτι αἱ σχέσεις (14), (15) καί (16) αἱ ἐκφράζουσαι τάς σταθεράς C_1 καί C_2 βάσει τῆς συναρτήσεως $q(\tau)$ καί τῶν σταθερῶν τοῦ ὑλικοῦ εἶναι συμβιβασταί μεταξύ των, ὡς ἐξ ἄλλου ἀνεμένετο.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Αἱ ἐκτεθεῖσαι εἰς τό τμῆμα τοῦτο μέθοδοι ἐπιλύσεως τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος δι' ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου ἀποτελοῦν ἐναλλακτικάς μεθόδους ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος τούτου πέραν τῆς ἀναπτυχθείσης εἰς τό τμῆμα Α8, πλήν ἀρκετά ὁμοίας κατά τόν τρόπον ἐργασίας ἐκείνης. Προσέτι δέ ἀποτελοῦν ἐπέκτασιν διά τήν περίπτωσιν τοῦ ἀνισοτρόπου μέσου τῶν ἀναπτυχθεισῶν εἰς τό τμῆμα Α2 μεθόδων ἐπιλύσεως τοῦ πρώτου θεμελιώδους προβλήματος διά τήν ἁπλῆν λείαν ρωγμήν ἐντός ἀπείρου ἰσοτρόπου μέσου.

Καίτοι ἐν γένει δέον ὅπως ἡ ἀναπτυχθεῖσα εἰς τό τμῆμα Α8 μέθοδος ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἁπλῆς λείας ρωγμῆς ἐντός ἀπείρου ἀνισοτρόπου μέσου προτιμᾶται τῶν παρομοίων της εἰς τό τμῆμα τοῦτο ἀναπτυχθεισῶν μεθόδων, ἐν τούτοις αἱ τελευταῖαι αὗται ἀποδεικνύουν κατά τόν καλύτερον τρόπον τό γεγονός ὅτι ἕν πρόβλημα ρωγμῆς δύναται νά ἀντιμετωπισθῇ διά πολλῶν τρόπων κατά βάσιν βεβαίως ἀρκετά ἀναλόγων. Διά τήν ρωγμήν ἐντός ἰσοτρόπου μέσου ἔχομεν ἀναφέρει εἰς τά τμήματα Α1 ἕως Α5 ἔτι περισσοτέρας μεθόδους ἀντιμετωπίσεως ἡ ἐνταῦθα διά τήν ρωγμήν ἐντός ἀνισοτρόπου μέσου, δυνάμεθα δέ νά παρατηρήσωμεν ὅτι ὅλαι αἱ μέθοδοι αἱ ἀναπτυχθεῖσαι διά τό πρόβλημα τῆς ρωγμῆς ἐντός ἰσοτρόπου μέσου δύνανται νά ἐπεκταθοῦν καί εἰς τήν περίπτωσιν ρωγμῆς ἐντός ἀνισοτρόπου μέσου.